Divulgaciones Matemáticas Vol. 13 No. 1(2005), pp. 73–76

El Círculo de los Nueve Puntos y la Recta de Euler

The Nine Points Circle and Euler's Line

Darío Durán C. (dduran1@telcel.net.ve)
Universidad del Zulia
Maracaibo, Venezuela.

Resumen

Se definen los conceptos de segmentos y puntos de Poncelet en un tringulo y se justifica la pertinencia de estos conceptos con tres ejemplos relacionados con el círculo de los nueve puntos.
Palabras y frases clave: Círculo de los nueve puntos, punto de Euler, punto de Poncelet, recta de Euler, segmento de Euler, segmento de Poncelet.

Abstract

Poncelet's points and segments are defined and the pertinence of these concepts is justified with three examples related to the nine points circle.
Key words and phrases: Euler's point, Euler's line, Euler's segment, nine points circle, Poncelet's point, Poncelet's segment.

1 Introducción

En 1765 el gran matemático suizo Leonhard Euler (1707–1783) demostró que la circunferencia que pasa por los pies de las alturas de un triángulo es la misma circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados de ese triángulo.

Se llama *segmento de Euler* de un tringulo ABC a un segmento que une el ortocentro del triángulo con uno de sus vértices. Se llama *punto de Euler* al punto medio de un segmento de Euler.

Recibido 2005/04/11. Aceptado 2005/06/11.
MSC (2000): Primary 51M04.

En la Figura 1 los segmentos AH, BH y CH son los segmentos de Euler. Sus respectivos puntos medios K, L y M son los puntos de Euler del triángulo ABC. En un triángulo hay tres segmentos de Euler y tres puntos de Euler.

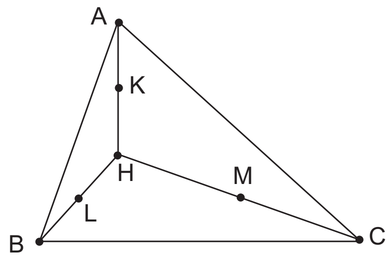

Figura 1: Puntos y segmentos de Euler.

En 1820 los matemáticos franceses Charles Julien Brianchon (1783–1864) y Jean Victor Poncelet (1788–1867) redescubrieron la circunferencia hallada por Euler y demostraron que dicha circunferencia también pasa por los puntos de Euler. Esta circunferencia fue llamada por ellos *círculo de los nueve puntos*.

2 Definiciones y resultados

Definición 1. Llamaremos *segmento de Poncelet* de un triángulo a un segmento que une el ortocentro del triángulo con un punto de su circuncírculo. Al punto medio de un segmento de Poncelet lo llamaremos *punto de Poncelet*. Esta definición no es estándar, pero se justifica en razón de los tres ejemplos siguientes.

Ejemplo 1. Es evidente que cada punto de Euler es un punto de Poncelet.

Sea ABC un triángulo, H el ortocentro (corte de las alturas), G el baricentro (corte de las medianas), Γ el circuncírculo (circunferencia que pasa por los vértices del triángulo), O el circuncentro (centro del circuncírculo) y R el circunradio (radio del circuncírculo). El punto medio del lado BC se denotará mediante D. Sea P el punto diametralmente opuesto al vértice A en Γ. El ángulo ACP es recto porque AP es diámetro, lo que indica que CP es perpendicular al lado AC. Ya que BH es altura se sigue que CP y BH son paralelos. Análogamente, el ángulo ABP es recto porque AP es diámetro y al ser CH altura vemos que CH y BP son paralelas. Por tanto, la figura

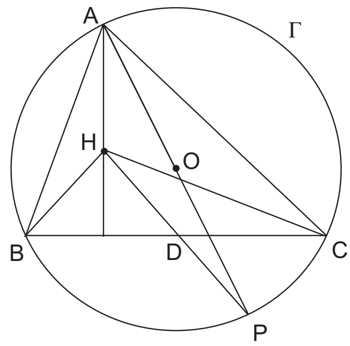

Figura 2: Ejemplo 2.

$HBPC$ es un paralelogramo y sus diagonales BC y HP se bisecan en el punto medio D. Hemos dado solución al

Ejemplo 2. Los puntos medios de los lados de un triángulo son puntos de Poncelet.

Sea U el punto de intersección de la altura AX del triángulo ABC con el circuncírculo. Sea CZ otra altura. Los ángulos UCX y BAX son iguales al estar inscritos en el mismo arco BU. Los ángulos HCX y BAX son iguales por ser complementarios del mismo ángulo B en los triángulos rectángulos BCZ y ABX. Luego, los ángulos UCX y HCX son iguales y CX es bisectriz del ángulo C en el triángulo UCH. Como CH es perpendicular a HU se tiene que CH es también altura de ese triángulo y por tanto será mediana. Vemos entonces que $HX = XU$. Hemos dado solución al

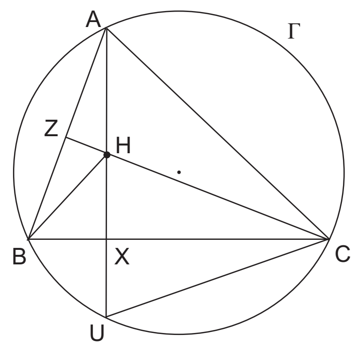

Figura 3: Ejemplo 3.

Ejemplo 3. Los pies de las alturas de un triángulo son puntos de Poncelet.

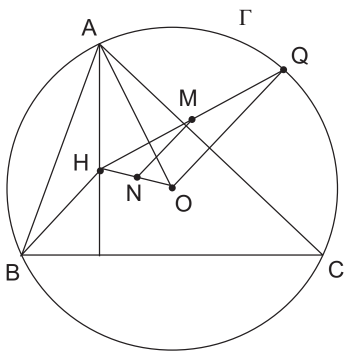

Figura 4: Teorema 1.

Sea HQ un segmento de Poncelet y sea M su punto medio. Sea N el punto medio del segmento HO. En el triángulo HOQ se tiene que $NM = OQ/2 = R/2$. Hemos demostrado el

Teorema 1. *Los puntos de Poncelet de un triángulo están en la circunferencia de centro el punto medio del segmento que une el ortocentro con el circuncentro, y de radio la mitad del circunradio del triángulo*

Este teorema junto con los ejemplos 1, 2 y 3 dicen que en cada triángulo existe una circunferencia que pasa por los puntos de Euler, los puntos medios de sus lados y los pies de sus alturas. Este es el círculo de los nueve puntos.

En 1765 el mismo Euler demostró analíticamente el siguiente teorema.

Teorema 2. *El circuncentro, el baricentro y el ortocentro de un triángulo son colineales, y la distancia del baricentro al ortocentro es igual a dos veces la distancia del baricentro al circuncentro.*

La recta que contiene a esos tres puntos se llama *recta de Euler*. De la Figura 2 extraemos la Figura 5. Como AD y HO son medianas en el triángulo ABP se sigue que esas medianas se cortan en el baricentro G de ese triángulo. Luego, $HG = 2GO$ y $AG = 2GD$. Pero, G es también el baricentro del triángulo ABC ya que es el único punto de la mediana AD que lo divide en la razón 2 a 1. Hemos demostrado el Teorema 2.

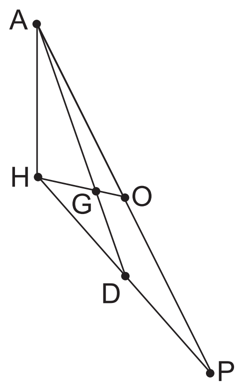

Figura 5: Recta de Euler.

En la Figura 6 hemos representado el ortocentro H, el circuncentro O, el baricentro G y el centro N del círculo de los nueve puntos. Si se hace $HO = 6$, entonces $HN = NO = 3$, $HG = 4$, $GO = 2$ y $NG = 1$. Por tanto, $HN/NG = HO/OG = 3$. Hemos demostrado el

Teorema 3. *El centro N del círculo de los nueve puntos de un triángulo y su circuncentro O son conjugados armónicos respecto del segmento HG que une el ortocentro con el baricentro.*

Figura 6: Recta de Euler

Para detalles adicionales sobre estos temas vea [1].

Referencias

[1] Durán, D., *La Geometría Euclidiana*, Astrodata, Maracaibo, 2003.