Divulgaciones Matemáticas Vol. 14 No. 1(2006), pp. 93–94

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@demat.org.ve)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Apartado Postal 526
Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor, en español o inglés, a la dirección arriba indicada. También pueden enviarse por correo electrónico, preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be sent to the editor, in Spanish or English, to the address given above. They may also be sent by e-mail, preferably as a LaTeX source file. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

113. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Universidad Complutense de Madrid y Universidad de Valladolid, España.*

Sea $a > 0$ un número real y definamos

$$I(a) = \int_0^1 \frac{a-x}{a+x}\,dx, \qquad J(a) = \int_0^1 \frac{1-ax}{1+ax}\,dx.$$

Calcular

$$\lim_{a\to 1} \left(\frac{I(a)}{J(a)}\right)^{\frac{1}{a-1}}.$$

114. (Olimpiada de Mayo 2006) En el pizarrón eatán escritos varios números primos (algunos repetidos). Mauro sumó los números del pizarrón. Fernando los multiplicó, obteniendo un resultado igual a cuarenta veces el que obtuvo Mauro. Determine cuáles pueden ser los números del pizarrón. Halle todas las posibilidades.

115. (Olimpiada de Mayo 2006) En cada esquina de un hexágono regular se escribe un entero positivo, de manera tal que los seis sean diferentes y entre todos sumen 100. Luego se multiplica cada número por el que le sigue, en el sentido de las agujas del reloj, y se suman los seis productos obteniendo un resultado x. Halle el menor valor que puede tomar x.

116. (Olimpiada Bolivariana 2006, nivel intermedio) Angélica escribe una lista de números formada por ceros y unos de la siguiente manera: primero, escribe un 1 y un 0; luego, para la posición n, observa el número que está en la posición $n-1$, cuenta el número m de veces que aparece en la lista y escribe en la posición n el mismo número que aparece en la posición m. Demuestre que para cualquier entero positivo k, en algún momento Angélica va a escribir k unos consecutivos.

117. (Olimpiada Bolivariana 2006, nivel intermedio) Encuentre todos los números reales a tales que el polinomio

$$P(x) = x^4 + 2ax^3 + 2a^2x^2 + 2ax + 1$$

tiene al menos una raíz real.

118. (Olimpiada Bolivariana 2006, nivel intermedio) Se define una sucesión mediante $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 3$. Sea α el número cuya escritura decimal es $0.F_1F_2\ldots$ (después del punto decimal, se ponen los dígitos de F_1, despues los de F_2 y así sucesivamente). Demostrar que α es irracional.