Divulgaciones Matemáticas Vol. 16 No. 2 (2008), pp. 299–326

π desde sus bases

π from its foundations

Douglas Jiménez (dougjim@cantv.net)
Sección de Matemática
Universidad Nacional Experimental Politécnica
Antonio José de Sucre
Vicerrectorado de Barquisimeto
Barquisimeto, Venezuela

Resumen

Todo estudiante de matemática responde de inmediato las preguntas básicas acerca de π: el área del círculo, la longitud de la circunferencia, la irracionalidad de π y sus aproximaciones decimales. Sin embargo, muy pocos de ellos han visto una demostración rigurosa de cualquiera de las respuestas. Este artículo muestra las cuatro respuestas con un lenguaje adaptado a las notaciones modernas, pero respetando el espíritu histórico con el cual fueron expuestas por vez primera. Asimismo se da el crédito correspondiente a los matemáticos que las produjeron.
Palabras y frases clave: π, principio de Arquímedes, polígonos regulares inscritos y circunscritos, área del círculo, longitud de la circunferencia, irracionalidad, aproximaciones decimales.

Abstract

Every math student knows the basic questions about π and can answer them inmediately: area of the circle, length of the circumference, π is irrational and its decimal approximations. However, very few of these students have seen a rigurous proof of the mentioned answers. This article shows the four answers with a language that follows the modern notations, but preserving the historical spirit of their first expositions. Also, the authors of the answers are credited.
Key words and phrases: π, Archimedes principle, inscribed and circunscribed regular polygons, area of the circle, length of the circumference, irrationality, decimal approximations.

Recibido 2008/09/04. Aceptado 2008/12/15.
MSC (2000): Primary 51-01; Secondary 51-03, 01-01.

Las primeras preguntas acerca de π

Hay algunas preguntas que un estudiante de matemática (o de carreras que de ella requieran, como la ingeniería por ejemplo) contesta apenas se le formulen. Entre otras, podríamos escoger las cuatro siguientes (con sus respuestas):

1. ¿Cuál es el área de un círculo?
   R. $A = \pi r^2$.
2. ¿Cuál es la longitud de una circunferencia?
   R. $L = 2\pi r$.
3. ¿Es π un número racional o irracional?
   R. π es irracional.
4. ¿Cuál es el valor decimal de π?
   R. $\pi = 3,14\ldots$.

Sin embargo, la gran mayoría quedará muda cuando le pregunten: *¿Has visto la demostración de alguna de estas respuestas?* Realmente es asombroso: el estudiante puede decir cosas tan avanzadas de π como que $e^{\pi i} + 1 = 0$ o manejarlo en ambientes tan extraños a su origen como la teoría de la probabilidad y, sin embargo, desconocer las bases que sustentan la existencia y la naturaleza de este tan omnipresente numerito.

Evidentemente, muchos se interrogan al respecto desde muy temprano y no faltará quien ensaye respuestas tomadas de conocimientos básicos. Por ejemplo, cuando oímos la tan manida frase "*la integral es el área bajo la curva*", no podemos esperar hasta estar en capacidad de calcular

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx,$$

para lo cual, luego del aprendizaje de los métodos de cálculo de antiderivadas, nos sentimos harto felices de escribir

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r} \Bigg|_{-r}^{r} = \frac{1}{2}\pi r^2.$$

¡Listo! ¡Problema resuelto!

Pero... ¡siempre hay un pero! ¿De dónde salió π en el cálculo anterior? Bueno... de

$$\operatorname{arc\,sen}(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{2},$$

que no significa nada distinto a que un cuarto de arco de la circunferencia unitaria mide $\pi/2$... es decir, que la circunferencia unitaria mide 2π... ¡lo cual no es otra cosa que volver al principio! En otras palabras: *estamos dando vueltas en círculo*. Pues... nada más propio de π que hacernos dar vueltas en círculo... Lo que sucede es que la trigonometría está montada sobre la base del conocimiento de π, y la integral anterior precisa para su resolución de una buena dosis de trigonometría.

Claro como el agua aparece entonces la necesidad de buscar otros caminos, lo que nos hace recordar que también se nos dijo que los griegos habían resuelto el problema por el procedimiento de aproximar el círculo (o la circunferencia) mediante polígonos regulares inscritos y circunscritos al mismo. El sentido y propósito de este artículo es llenar los vacíos elementales que vamos dejando de π; para ello usaremos el procedimiento de verter el vino viejo en botas nuevas, es decir, usar las demostraciones que legaron los griegos pero expresándolas en el lenguaje de la matemática moderna.

En la historia de los polígonos regulares, sin embargo, hay dos cabos sueltos que no se suelen mencionar. Una es el hecho de que las demostraciones se realizaron por el método de la reducción al absurdo; de hecho una *doble reducción al absurdo*, puesto que la negación de la igualdad entre cantidades implica dos proposiciones opuestas: o bien que una de ellas es menor que la otra, o bien que esta misma es mayor que la otra. De ser cierta la igualdad, ambas suposiciones deben conducir a contradicción.

Lo segundo es que los griegos evadían el infinito como concepto tangible. Por lo tanto, cualquier razonamiento que implicara caer en él, debía ser tratado de manera que su resolución se consiguiera mediante un número finito de pasos. Esto ameritaba de un principio suficientemente sólido y fue Eudoxo –de la escuela platónica– quien lo proveyó aunque nosotros lo solemos adjudicar a Arquímedes, por el uso definitivamente consistente que este último le dio. Recordémoslo:

Lema 1 (Principio de Eudoxo–Arquímedes)**.** *Dados dos números reales positivos a y b existe un número entero n tal que $na > b$.*

Para el problema que nos ocupa se usó una forma derivada de este lema, que expresa que una cantidad cualquiera se puede hacer menor que otra restando de ella más de su mitad y, en caso de no alcanzar lo buscado, volvemos a restar más de la mitad hasta que, en un número finito de restas sucesivas, alcancemos el propósito. En términos rigurosos queda así:

Lema 2. *Sean a y b números reales positivos y supongamos que la sucesión*

$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ *es tal que*

$$a_1 = a,\ a_n < \frac{1}{2}a_{n-1},\ n \geq 2,$$

entonces existe $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n < b$.

Demostración Aplicando el principio de Arquímedes, podemos encontrar n tal que $nb > a = a_1$. Si $n = 1$ entonces $a_1 < b$ y el lema está demostrado. Supongamos entonces que $n \geq 2$.

Como

$$b \leq \frac{1}{2}nb$$

entonces

$$nb - b \geq nb - \frac{1}{2}nb,$$

que equivale a

$$(n-1)b \geq \frac{1}{2}nb > \frac{1}{2}a_1 > a_2.$$

Si $n - 1 = 1$ entonces $a_2 < b$ y el lema está demostrado. Supongamos que $n - 1 \geq 2$, entonces de

$$b \leq \frac{1}{2}(n-1)b,$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}(n-2)b = (n-1)b - b &\geq (n-1)b - \frac{1}{2}(n-1)b \\ &\geq \frac{1}{2}(n-1)b \\ &> \frac{1}{2}a_2 \\ &> a_3\end{aligned}$$

Continuando de esta manera, después de $n - 1$ pasos se tendrá que

$$[n - (n-1)]b > a_n,$$

es decir

$$b > a_n,$$

tal como queríamos demostrar.

Tanto el principio de Arquímedes como el lema 2 aparecen en el libro de los *Elementos* de Euclides, el primero como la definición V.4 (esto es, definición

4 del libro V... son 13 libros) y el segundo como la proposición (quiere decir, teorema) X.1. La demostración (ya lo dijimos: *verter el vino viejo en botas nuevas*) es idéntica a la nuestra, excepto por la notación.

Este conocimiento nos coloca en situación de volver a los polígonos inscritos y circunscritos. A los primeros el círculo los aventaja en área, mientras que los segundos ganan un área respecto al círculo. El próximo paso es demostrar que estas diferencias de área, tanto en un caso como en el otro, satisfacen las hipótesis del lema 2, cuando pasamos de cierto polígono a aquel que tiene el doble del número de lados.

Lema 3. *Sea C un círculo de área A y p_n, $n \geq 3$, el polígono regular de n lados inscrito en C. Sea a_n el área de p_n. Entonces*

$$A - a_{2n} < \frac{1}{2}(A - a_n)$$

Demostración Sean (figura 1) $\overline{MQ}$ un lado de p_n y $\overline{OR}$ un radio de C que biseca a $\overline{MQ}$. Consideremos ahora a $\overline{TS}$ tangente a C en R tal que $TS = MQ$ y R es el punto medio de $\overline{TS}$.

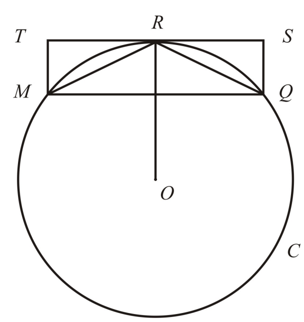

Figura 1: Polígonos regulares inscritos

Se tiene entonces que $MQST$ es un rectángulo y

$$(MQR) = \frac{1}{2}(MQST)$$

(Siguiendo cierta tradición, la notación (MQR) denota el área del triángulo de vértices M, Q y R; mientras que $(MQST)$ es el área del cuadrilatero de vértices M, Q, S y T. La notación puede extenderse a polígonos con cualquier número de vértices.)

Observemos ahora la región cuya frontera es el $\mathrm{arc}(MRQ)$ y los segmentos $\overline{MR}$ y $\overline{RQ}$; sea α el área de esta región. (La notación $\mathrm{arc}(MRQ)$ se refiere al arco de circunferencia que contiene a los puntos M, R y Q. Se puede escribir $\mathrm{arc}(MQ)$ si está claro por el contexto a cual de los dos arcos posibles queremos identificar.) Afirmamos que

$$(MRQ) > \frac{1}{2}\alpha;$$

en efecto, suponiendo lo contrario llegamos a

$$\begin{aligned}(MRQ) \leq \frac{1}{2}\alpha &\Rightarrow 2(MRQ) \leq \alpha \\ &\Rightarrow (MQST) \leq \alpha,\end{aligned}$$

lo cual es contradictorio.

Pero $\overline{MR}$ y $\overline{RQ}$ son dos lados de p_{2n}, lo cual (si se aplica este resultado a cada uno de los lados de p_n) demuestra el teorema.

Lema 4. *Sea C un círculo de área A y P_n, $n \geq 3$, el polígono regular de n lados circunscrito a C. Sea A_n el área de P_n. Entonces*

$$A_{2n} - A < \frac{1}{2}(A_n - A)$$

Demostración

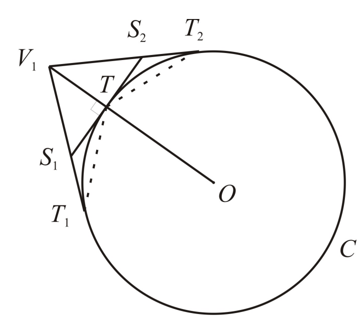

Figura 2: Polígonos regulares circunscritos

Nos apoyamos ahora en la figura 2. Sean T_1, T_2 los puntos de tangencia sobre la circunferencia, de los lados de P_n que parten del vértice V_1. Destacamos también a O, el centro del círculo y T el punto de corte de $\overline{OV_1}$ con la circunferencia.

Asimismo, S_1 y S_2 son los puntos donde la tangente al círculo en T corta a $\overline{V_1T_1}$ y $\overline{V_1T_2}$, respectivamente. Se tiene que $\overline{S_1S_2}$ es un lado de P_{2n}.

Ahora bien, $\triangle V_1TS_1$ es rectángulo en T, por lo cual $V_1S_1 > S_1T$; pero $S_1T = S_1T_1$, pues son segmentos tangentes a C desde el mismo punto. Entonces

$$(S_1TT_1) < \frac{1}{2}(V_1TT_1)$$

y, por simetría

$$(S_2TT_2) < \frac{1}{2}(V_1TT_2).$$

Con relación a P_n (desde el vértice V_1) la frontera de la región que queda fuera del círculo está formada por $\overline{V_1T_1}$, $\mathrm{arc}(T_1TT_2)$ y $\overline{V_1T_2}$; sea α su área. Con relación a P_{2n}, la región que queda fuera de C tiene como frontera $\overline{T_2S_2}$, $\overline{S_2S_1}$, $\overline{S_1T_1}$ y $\mathrm{arc}(T_1TT_2)$; sea β su área. Como estas regiones quedan en el interior de los triángulos, las últimas desigualdades implican que

$$\alpha < \frac{1}{2}\beta.$$

Aplicando este mismo razonamiento a los n vértices de P_n, se demuestra el teorema.

Un griego llamado Antifón definió el círculo como un polígono regular de infinitos lados. Esta definición era casi herética debido a la reticencia de los griegos a pensar en el infinito como un objeto y fue atacada nada más y nada menos que por Aristóteles, razón suficiente para su desaparición. Hoy, en beneficio de Antifón, podemos considerar el círculo como un límite de polígonos regulares; de hecho, las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{A_n\}$ definidas en los lemas anteriores son sucesiones convergentes, por cuanto la primera es creciente y acotada superiormente (por A_1), mientras que la segunda es decreciente y acotada inferiormente (por a_1).

Carentes de una definición de límite, los griegos se las apañaron con el lema 2 y con un conocimiento previo de los resultados adquirido por el uso correcto de una poderosa intuición. Dado que las sucesiones $\{A - a_n\}$ y $\{A_n - A\}$ satisfacen las hipótesis del lema, podemos estar seguros de que, dada cualquier cantidad, siempre podremos conseguir que uno de sus términos sea menor que esta cantidad.

En la sección siguiente veremos como pudimos obtener de los griegos la respuesta a la primera pregunta que nos planteamos al principio.

1 $A = \pi r^2$

El primer lema de esta sección (que Euclides recoge en sus *Elementos* como proposición XII.1) involucra a los polígonos regulares semejantes, y establece que las áreas de los mismos son directamente proporcionales a los cuadrados de los diámetros de los círculos donde están inscritos. Le hará falta recordar

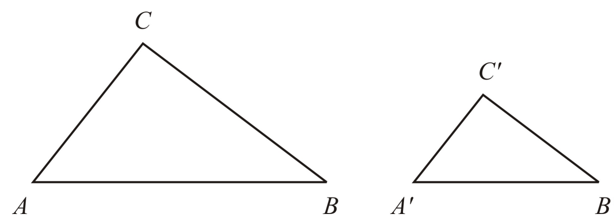

Figura 3: rea de triángulos semejantes

que las áreas de los triángulos semejantes están entre sí como los cuadrados de los lados correspondientes en la semejanza; esto es, de acuerdo a la figura 3, en la que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, se tiene:

$$\frac{(ABC)}{(A'B'C')} = \frac{(AB)^2}{(A'B')^2}.$$

Si el lector no recuerda la demostración, haría bien intentándola.

Lema 5. *Sean $P_1^{(n)}$ y $P_2^{(n)}$ dos polígonos regulares de n lados y C_1, C_2 los círculos donde están inscritos. Supongamos que $A_i^{(n)}$ = área de $P_i^{(n)}$ y d_i = diámetro de C_i, $i = 1, 2$. Entonces*

$$\frac{A_1^{(n)}}{A_2^{(n)}} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

Demostración

Sean R_1, R_2, R_3, R_4; S_1, S_2, S_3, S_4 vértices consecutivos respectivamente de $P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$ y R_1R, S_1S diámetros respectivos de C_1 y C_2.

Ahora bien, por las propiedades de los polígonos regulares, afirmamos que

$$\triangle R_1R_2R_3 \sim \triangle S_1S_2S_3;$$

pero también

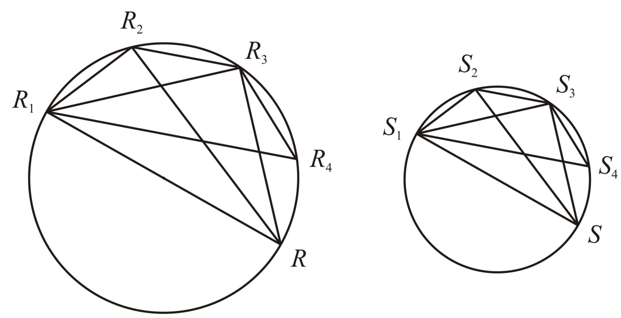

Figura 4: Polígonos regulares semejantes

a. $m\angle R_2R_3R_1 = m\angle R_2RR_1$, pues subtienden el mismo arco,

b. $m\angle S_2S_3S_1 = m\angle S_2SS_1$, por idéntica razón y

c. $\angle R_1R_2R$ y $\angle S_1S_2S$ son rectos;

por lo tanto

$$\triangle R_1R_2R \sim \triangle S_1S_2S.$$

Estas semejanzas producen las siguientes proporcionalidades:

$$\frac{(R_1R_2R_3)}{(S_1S_2S_3)} = \frac{(R_1R_2)^2}{(S_1S_2)^2}, \qquad \frac{(R_1R_2R)}{(S_1S_2S)} = \frac{(R_1R_2)^2}{(S_1S_2)^2},$$

por lo tanto

$$\frac{(R_1R_2R_3)}{(S_1S_2S_3)} = \frac{(R_1R_2R)}{(S_1S_2S)}.$$

Pero también

$$\frac{(R_1R_2R)}{(S_1S_2S)} = \frac{(R_1R)^2}{(S_1S)^2} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

de donde

$$\frac{(R_1R_2R_3)}{(S_1S_2S_3)} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Por consideraciones angulares

$$\triangle R_1R_3R_4 \sim \triangle S_1S_3S_4$$

y, por analogía con un razonamiento anterior

$$\triangle R_1R_3R \sim \triangle S_1S_3S$$

lo cual, igualmente, significa que

$$\frac{(R_1R_3R_4)}{(S_1S_3S_4)} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Continuando en forma similar hasta $n-2$ veces, obtenemos

$$\frac{(R_1R_2R_3)}{(S_1S_2S_3)} = \frac{(R_1R_3R_4)}{(S_1S_3S_4)} = \cdots = \frac{(R_1R_{n-1}R_n)}{(S_1S_{n-1}S_n)} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Ahora bien, por propiedades de las proporciones

$$\frac{(R_1R_2R_3) + (R_1R_3R_4) + \cdots + (R_1R_{n-1}R_n)}{(S_1S_2S_3) + (S_1S_3S_4) + \cdots + (S_1S_{n-1}S_n)} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

pero las sumas del lado izquierdo son, respectivamente, $A_1^{(n)}$ y $A_2^{(n)}$, por lo cual

$$\frac{A_1^{(n)}}{A_2^{(n)}} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

tal como queríamos demostrar.

Es aquí donde debió entrar en juego la fabulosa intuición griega. Pues si Antifón había pensado el círculo como un polígono regular con infinitos lados, parece natural trasladar este resultado (lema 5) hacia el círculo. Resultó ser cierto. Se dice que fue Hipócrates de Quíos quien primero lo mostró; otros piensan que fue Eudoxo. Cualquiera sea la conjetura válida en estas afirmaciones históricas, lo cierto es que la demostración rigurosa nos la da Euclides en la proposición XII.2. Veamos.

Teorema 1 (Hipócrates–Eudoxo–Euclides)**.** *Sean C_1, C_2 dos círculos de áreas A_1, A_2 y diámetros d_1, d_2 respectivamente. Entonces*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Demostración Por reducción al absurdo, supongamos que la proporción de la tesis es falsa. Esto significa que hay que cambiar un término de la proporción, digamos A_2 por otro valor que llamamos B, así

$$\frac{A_1}{B} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

con $A_2 \neq B$. Tenemos entonces dos posibilidades (doble reducción al absurdo):

i. $A_2 > B$.

Entonces $A_2 - B > 0$; por los lemas 2 y 3 podemos conseguir un polígono regular Q de área A_Q, inscrito en C_2 tal que $A_2 - A_Q < A_2 - B$; por lo tanto $A_Q > B$.

Sea P el polígono regular de igual número de lados de Q inscrito en C_1; supongamos que su área es A_P. Por el lema 5

$$\frac{A_P}{A_Q} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

por lo tanto

$$\frac{A_1}{B} = \frac{A_P}{A_Q}.$$

Pero $A_1 > A_P$, por ser P polígono inscrito en C_1 lo que, de acuerdo a la proporción anterior, significaría que $B > A_Q$, lo cual es contradictorio.

ii. $A_2 < B$.

Podemos reescribir

$$\frac{B}{A_1} = \frac{d_2^2}{d_1^2}.$$

Consideremos ahora que D es la cuarta proporcional entre B, A_1 y A_2, es decir

$$\frac{B}{A_1} = \frac{A_2}{D}.$$

Como $B > A_2$, esta última proporción implica que $A_1 > D$. Además

$$\frac{A_2}{D} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

con lo cual reproducimos el caso i que ya constatamos contradictorio.

La doble contradicción garantiza que

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

como queríamos demostrar.

Estamos listos entonces para la entrada en escena de nuestro protagonista principal.

Corolario 1. *Si C es un círculo cualquiera de área A y radio r, existe una constante $\pi > 0$ tal que*

$$A = \pi r^2.$$

Demostración La tesis del teorema anterior puede escribirse en la forma

$$\frac{A_1}{d_1^2} = \frac{A_2}{d_2^2},$$

lo que significa que la razón (área del círculo)–(cuadrado del diámetro) es una constante $k > 0$ para cualquier círculo. En nuestro caso particular

$$\frac{A}{(2r)^2} = k,$$

de donde

$$A = (4k)r^2.$$

Haciendo $\pi = 4k$ se tiene el resultado enunciado.

2 $L = 2\pi r$

Como buenos matemáticos, los griegos no se conformaban con demostrar un teorema de una forma; sabían que nuevos puntos de vista traen nuevos resultados. Arquímedes, algunos años después de Euclides, también abordó el problema del área del círculo y mostró que este último era igual en área a un triángulo rectángulo uno de cuyos catetos mide la longitud de la circunferencia y el otro el radio. Veamos cómo.

Teorema 2 (Arquímedes)**.** *Si C es un círculo de área A, longitud de circunferencia L y radio r entonces*

$$A = \frac{1}{2}Lr.$$

Demostración Supongamos que la tesis es falsa; entonces hay dos posibilidades

i. $A > \frac{1}{2}Lr$.

   Es decir: $A - \frac{1}{2}Lr > 0$. Sea P un polígono regular de área A_P, inscrito en C, tal que

$$A - A_P < A - \frac{1}{2}Lr,$$

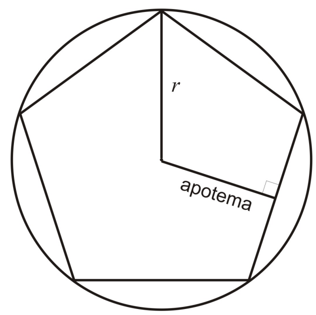

Figura 5: Polígonos regulares inscritos

entonces

$$A_P > \frac{1}{2}Lr.$$

Ahora bien (ver la figura 5)

$$A_P = \frac{1}{2}(\text{perímetro}) \cdot (\text{apotema}),$$

y como P es inscrito, se tiene que

$$\text{perímetro} < L \qquad \text{y} \qquad \text{apotema} < r;$$

por lo tanto

$$A_P < \frac{1}{2}Lr,$$

lo cual es contradictorio.

ii. $A < \frac{1}{2}Lr$.

Es decir: $\frac{1}{2}Lr - A > 0$. Sea Q un polígono regular de área A_Q, circunscrito a C, tal que

$$A_Q - A < \frac{1}{2}Lr - A,$$

entonces

$$A_Q < \frac{1}{2}Lr.$$

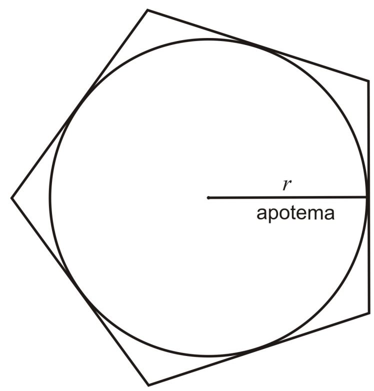

Figura 6: Polígonos regulares circunscritos

Por otro lado (ver la figura 5),

$$A_Q = \frac{1}{2}(\text{perímetro}) \cdot (\text{apotema}),$$

y como Q es circunscrito, se tiene que

$$\text{perímetro} > L \qquad \text{y} \qquad \text{apotema} = r;$$

por lo tanto

$$A_Q > \frac{1}{2}Lr,$$

lo cual es contradictorio.

Ambas contradicciones garantizan que

$$A = \frac{1}{2}Lr,$$

como queríamos demostrar.

Ya estamos listos para identificar a π como la relación circunferencia–diámetro.

Corolario 2. *Con las mismas hipótesis del teorema anterior, se tiene*

$$L = 2\pi r.$$

Demostración El resultado se obtiene directamente de la igualdad

$$\frac{1}{2}Lr = \pi r^2.$$

Una nota histórica

La letra π es la decimosexta letra del alfabeto griego. Ese detalle podría hacernos suponer que fueron los propios griegos quienes la usaron para referirse a la razón circunferencia–diámetro. Pensar de esta manera es atribuir a los griegos la posesión de un concepto de número, al que todavía le faltaba algún tiempo para adquirir carta de residencia dentro del territorio matemático.

Cuando los griegos descubrieron la constancia de la razón área del círculo–cuadrado del diámetro, lo que había en su mente no eran números ni operaciones. Esta afirmación es rara para nosotros: el número se ha convertido de tal manera en nuestro intermediario con la realidad, que nos cuesta pensar que ésta pueda interpretarse de otra manera que no sea a través de aquellos.

Sin embargo, los griegos –carentes de nuestro concepto de número real– pensaban los objetos matemáticos en términos de relaciones de comparación. Por ejemplo, la expresión "*los círculos están entre sí como los cuadrados de sus diámetros*" no era una afirmación numérica sino una comparación entre círculos y cuadrados concebidos geométricamente. La naturaleza de esta comparación no está suficientemente clarificada, pero pudiéramos elaborar un ejemplo que ayude a entenderla un poco más.

Imaginemos una moneda construida de cierto material y con determinado espesor. Usando el mismo material construyamos un cuadrado cuyo lado sea el diámetro de la moneda; debemos suponer también que el espesor del cuadrado es el mismo que el de la moneda. Si construimos ahora (ver la figura 7) una balanza que mantenga el equilibrio entre la moneda y el cuadrado, es evidente que esta balanza ha de tener los brazos desiguales, siendo más largo aquel del lado del cual está la moneda. La afirmación "*los círculos están entre sí como los cuadrados de sus diámetros*" significa que esta misma balanza equilibrará cualquier otra moneda y cuadrado construidos con las mismas especificaciones, aún cuando variemos el diámetro de la moneda. Esto es: si construimos moneda y cuadrado con el mismo material y espesor.

Es claro que para concebir lo expresado en el párrafo anterior no necesitamos los números. La balanza (que, además, es una balanza ideal) juega el papel de nuestra constante de proporcionalidad. En realidad, esta última fue concebida para despojar la proporcionalidad de cualquier alusión física o

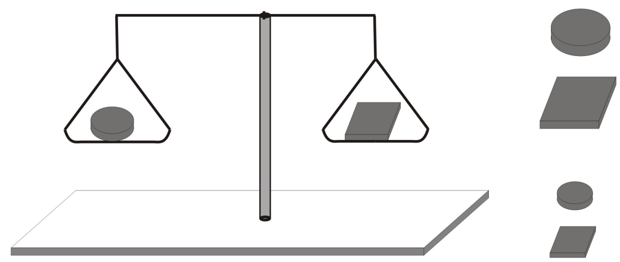

Figura 7: Balanza de proporcionalidad

extramatemática, pero fue una concepción muy posterior en el tiempo. (Al margen: si el brazo correspondiente al platillo de la moneda se usa como unidad de medida de longitudes, ¿cuál es la longitud del otro brazo?)

En esta misma línea de pensamiento, es claro ahora que lo establecido en el resultado arquimediano (teorema 2) es el equilibrio –en una balanza de brazos iguales– entre un círculo y cierto triángulo rectángulo.

Para cerrar esta pequeña disgresión, es bueno decir que la letra π para indicar la relación constante circunferencia–diámetro fue usada por vez primera por William Jones, en 1706. Antes de esto, las menciones a la constante o bien eran textuales explícitas, es decir "*relación constante circunferencia/diámetro*" o bien adoptaban formas como $\frac{\pi}{\delta}$, en las que π era la inicial de $\pi\epsilon\rho\iota\phi\epsilon\rho\epsilon\iota\alpha$ (circunferencia) y δ la de $\delta\iota\alpha\mu\epsilon\tau\rho o\varsigma$ (diámetro).

La iniciativa de Jones fue seguida (con o sin conocimiento de causa) por Euler, quien adopta el símbolo (y el propósito) de manera definitiva en 1748 en su *Introductio in analysin infinitorium* y publicaciones posteriores. Entre algunas idas y venidas de otros escritores menos notables, Legendre le da carta de bienvenida al símbolo en sus *Elements de Geometrie*, el primer libro de texto elemental en el que π se usa con el significado que hoy le damos.

La trigonometría... ¡por fin!

Sí... ¡por fin! Toda la discusión anterior evidencia que el resultado de la integral que, con visión ingenua, calculamos en busca del área de un círculo es, en esencia, correcto. Es más, tal como lo previó Arquímedes, el cálculo de la integral muestra que la determinación del área del círculo se puede hacer a través de la longitud de la circunferencia. Pero, en todo caso, el resultado de la integral sirve más de constatación que de prueba. Es, quizás, una manera de ver que la aproximación de Riemann por rectángulos debe coincidir, obligatoriamente, con la aproximación griega por polígonos regulares.

De cualquier modo, el cálculo de la integral se apoya en la trigonometría y ésta se basa en el conocimiento de la longitud de la circunferencia (o el área del círculo). En efecto, una definición de las funciones trigonométricas se realiza midiendo longitudes sobre la circunferencia usando el radio de la misma como unidad de longitud y proyectando sus puntos sobre ejes perpendiculares. Los valores notables de dichas funciones se obtienen en múltiplos y submúltiplos de π.

Todo esto –que es harto conocido al lector– viene a cuento para poder continuar nuestra discusión, puesto que en la próxima sección estudiaremos la irracionalidad de π y las pruebas que conocemos de este hecho están basadas en propiedades de las funciones trigonométricas.

3 π es irracional

La primera prueba que se conoce de la irracionalidad de π la hizo J. H. Lambert. Tratar de reproducirla íntegramente nos llevaría al terreno de la teoría de las fracciones continuas, terreno realmente hermoso pero exigente de un espacio que no queremos extender. Sin embargo, dada su importancia histórica, se hace difícil ceder a la tentación de exponer sus líneas generales.

Figura 8: Johann Heinrich Lambert (1728 1777)

En primer lugar, Lambert demostró para la función tangente el siguiente desarrollo en fracción continua

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cdots}}}}$$

Posteriormente, Lambert demostró un teorema general que da condiciones suficientes para reconocer cuando una fracción continua converge a un número irracional. Toma como modelo la fracción continua

$$\alpha = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}},$$

en la que los a_i y los b_i son números enteros. Pues bien, Lambert muestra (en una demostración deficiente que fue mejorada luego por Lagrange) que α es irracional si existe algún j_0 tal que, cuando $j \geq j_0$:

a. $0 < b_j \leq a_j$, si todos los a_j y los b_j son positivos o

b. $2|b_j| \leq a_j - 1$, si algunos b_j son negativos.

En este sentido, el teorema estrella de Lambert es el siguiente:

Teorema 3 (Lambert)**.** *Si r es racional entonces $\operatorname{tg} r$ es irracional.*

Demostración Sea $r = \frac{a}{b}$, donde a y b son enteros, con $b > 0$. Aplicando a r el desarrollo en fracción continua de la tangente tenemos:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{b} = \cfrac{a}{b - \cfrac{a^2}{3b - \cfrac{a^2}{5b - \cfrac{a^2}{7b - \cdots}}}}.$$

La sucesión

$$\{b,\, 3b,\, 5b,\, 7b,\, \ldots\} = \{(2j-1)b\}_{j=1}^{\infty}$$

es una sucesión creciente y no acotada, por lo cual, es claro que, independientemente del valor de a, existirá un j_0 tal que

$$2a^2 \leq (2j-1)b-1, \quad \forall j \geq j_0,$$

condición que, como vimos en el párrafo anterior es suficiente para la irracionalidad de la fracción continua.

Nuestro resultado principal, entonces, es un corolario de este teorema.

Corolario 3. *π es irracional.*

Demostración Como $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$ entonces, por el teorema anterior, $\pi/4$ es irracional y, en consecuencia, π es irracional.

§

La demostración de Lambert, aunque irreprochable, nos deja una cierta desazón. En realidad, el énfasis está en una propiedad de la función tangente y nuestro resultado principal queda como un subproducto de este estudio. Además de eso, adeudamos a la demostración algunos resultados de la teoría de las fracciones continuas. Nos gustaría una demostración al estilo de "$\sqrt{2}$ *es irracional*", una que comience diciendo "*Sea* $\pi = \dfrac{a}{b}$ ...". Ahora bien, en el caso de $\sqrt{2}$, no pareciera difícil darse cuenta de que el primer paso de la demostración es eliminar la raíz por elevación al cuadrado y ya, con un primer paso adelantado, el resto de la heurística pudiera venir solo, dependiendo de la mayor o menor experiencia (o habilidad) del aprendiz.

Sin embargo, en el caso de π no se ve fácil el asunto y, de hecho, no lo es. No obstante, alguien lo vio y ese alguien fue I. M. Niven, especialista en teoría de números, quien publicó su demostración en el Boletín del American Mathematical Society (AMS), Volumen 53, Número 6 (1947) con una breve exposición que ocupaba apenas tres cuartos del espacio de la página 509. A pesar de la brevedad, algunos de los pasos, pueden desarrollarse un poco más. Dedicaremos el resto de la sección a ello.

Teorema 4 (Niven)**.** *π es irracional.*

Demostración Sea $\pi = \dfrac{a}{b}$ con a, $b \in \mathbb{Z}^+$. Definamos los polinomios de Niven de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{1}{n!}x^n(a-bx)^n, \quad n \geq 0.$$

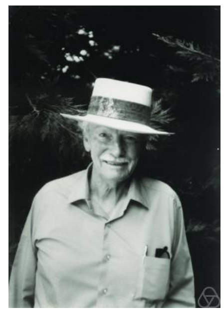

Figura 9: Ivan Morton Niven (1915 1999)

Factorizando a b, el polinomio queda:

$$f(x) = \frac{b^n}{n!} x^n \left(\frac{a}{b} - x \right)^n = \frac{b^n}{n!} x^n (\pi - x)^n,$$

ecuación a partir de la cual se deduce que

$$f(x) = f(\pi - x),$$

lo cual viene a ser una importante propiedad de simetría para lo que sigue. Por lo menos, aplicando la regla de la cadena j veces ($j \geq 0$), de ella resulta

$$f^{(j)}(x) = (-1)^j f^{(j)}(\pi - x).$$

También podemos extraer información del polinomio desarrollando el binomio:

$$f(x) = \frac{b^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \pi^{n-k} x^{n+k},$$

de lo cual concluimos:

a. $\mathrm{gr}(f) = 2n$ y

b. n es el grado del término de menor grado.

Es claro, a partir de esta información, que si derivamos f menos de n veces obtendremos un polinomio sin término independiente, mientras que si lo derivamos más de $2n$ veces obtendremos la función nula; así que

$$1 \leq j < n \Rightarrow f^{(j)}(0) = f^{(j)}(\pi) = 0 \quad \text{y} \quad j > 2n \Rightarrow f^{(j)}(x) = 0, \ \forall x.$$

El caso interesante es, por lo tanto, cuando derivamos entre n y $2n$ veces y no le será difícil al lector demostrar que, cuando $0 \leq j \leq n$, se cumple

$$f^{(n+j)}(0) = (-1)^j \frac{(n+j)!}{n!} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j,$$

(las herramientas para la demostración son la fórmula de derivación iterada

$$D_x^j x^k = \frac{k!}{(k-j)!} x^{k-j}$$

y algo de inducción) de donde se tiene que $f^{(n+j)}(0) = \pm f^{(n+j)}(\pi)$ son números enteros.

Sea ahora F definida por

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f^{(2k)}(x).$$

Derivándola una vez, resulta

$$F'(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f^{(2k+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(2k+1)}(x),$$

y, una segunda derivación da

$$F''(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(2k+2)}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} f^{(2k)}(x)$$

Una mirada atenta a los sumandos de F'' y F muestra que podemos escribir

$$F''(x) + F(x) = f(x).$$

Por otra parte, por la regla del producto podemos ver lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[F'(x)\operatorname{sen} x - F(x)\cos x] &= [F''(x) + F(x)]\operatorname{sen} x \\ &= f(x)\operatorname{sen} x, \end{aligned}$$

así que llegamos a esta interesante integral

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x)\operatorname{sen} x\, dx &= [F'(x)\operatorname{sen} x - F(x)\cos x]\big|_0^\pi \\ &= F(\pi) + F(0) \end{aligned}$$

que, como resultado de toda la discusión anterior, viene a ser un número entero. Y además entero positivo, puesto que el integrando lo es en el intervalo de integración.

Por otra parte, un ejercicio sencillo de derivación nos muestra que

$$\text{máx}\{f(x)\}_{0\leq x\leq\pi} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{b^n}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} = \frac{(a^2/4b)^n}{n!},$$

y como

$$0 \leq \operatorname{sen} x \leq 1, \quad \text{si } 0 \leq x \leq \pi$$

se tiene que

$$0 \leq f(x)\operatorname{sen} x \leq \frac{(a^2/4b)^n}{n!}, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

o, mejor aún:

$$0 \leq \int_0^\pi f(x)\operatorname{sen} x\, dx \leq \frac{(a^2/4b)^n \pi}{n!},$$

desigualdad que resulta entonces ser válida para cualquier valor de n. Es aquí donde radica la contradicción del argumento, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a^2/4b)^n \pi}{n!} = 0,$$

y esto significa que para algún valor de n,

$$\frac{(a^2/4b)^n \pi}{n!} < 1,$$

con lo cual estaríamos encontrando un entero entre 0 y 1.

La demostración de Niven es sencilla en tanto no necesita herramientas de muy alto nivel: de todo su aparataje se encuentra equipada cualquier persona que haya terminado un primer curso de cálculo. Sin embargo, su heurística –vale decir: las motivaciones que llevan a seleccionar cada paso de ella– no es en absoluto elemental. Como sea, su hermosura resalta al lado del asombro.

4 $\pi = 3,14\ldots$

Los puntos suspensivos son, por supuesto, para quienes gozan de formación matemática; ellos saben que un número irracional tiene infinitas cifras decimales que no siguen patrones periódicos de repetición. La mayoría de la gente, sin embargo, no necesita de los puntos suspensivos: tiene suficiente con $\pi = 3,14$.

Así es en la práctica y difícilmente una actividad de la vida diaria exija más que eso para resolver cualquier problema; de hecho a veces con menos basta.

Es posible que la tecnología de muy alto nivel (digamos: colocar un hombre en un cuerpo celeste distinto del nuestro) necesite mayor cantidad de cifras exactas de π, pero resulta difícil concebir que alguna vez nos haga falta la cifra en la posición 100 para la solución de un problema práctico.

Sin embargo, el cálculo de las cifras exactas de π ya anda por el orden de los millardos y todavía se buscan más; este número ejerce cierta fascinación, más que cualquier otro número irracional. *Cazadores de cifras* se llama a quienes andan detrás de estos misteriosos dígitos (bueno... los cazadores de cifras los han hecho misteriosos) y sorprende saber que el primer cazador de cifras de la historia fue nada más y nada menos que el propio Arquímedes, quien consiguió $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

Dado que sitúa a π en un intervalo, la misma longitud del intervalo nos sirve para determinar la magnitud del error, en este caso

$$3\frac{1}{7} - 3\frac{10}{71} = \frac{1}{497} = 0,00201\ldots,$$

lo que nos habla de dos cifras exactas, por lo que, calculando cualquiera de los extremos del intervalo a dos cifras decimales tenemos $\pi = 3,14$. ¡Nuestro famoso $3,14$!

Claro que a todas estas, algunos de los lectores se estarán preguntando cómo fue que Arquímedes encontró esta prodigiosa aproximación. Y es que la historia no deja de ser interesante, pues el hombre parte del hexágono regular inscrito, cuya longitud es fácil de calcular. Ayudado con la longitud del hexágono inscrito, calcula la longitud del hexágono circunscrito usando para ello la siguiente aproximación de $\sqrt{3}$:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780},$$

sin dar ninguna explicación de dónde la obtiene, y con la de éste la del dodecágono inscrito y así sucesivamente hasta llegar a los polígonos regulares de 96 lados, donde detuvo su cálculo con la aproximación ya comentada, no sin antes dejar de introducir algunas aproximaciones racionales que, aunque no tan misteriosas como la de $\sqrt{3}$, no dejan de asombrar.

Veamos como queda el asunto desde nuestro punto de vista, apoyados en la figura 10.

El arco ATB está subtendido por el lado $\overline{AB}$ del n–gono regular inscrito en la circunferencia de centro O y radio OA; por su parte, $\overline{CD}$ es el lado

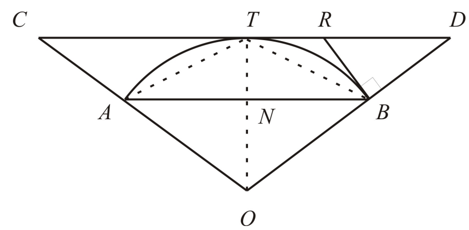

Figura 10: Cálculo arquimediano de π

(paralelo a $\overline{AB}$) del n–gono regular circunscrito y T es el punto de tangencia de este lado con la circunferencia. El punto N es el corte entre $\overline{OT}$ y $\overline{AB}$.

Es claro entonces que las líneas punteadas $\overline{AT}$ y $\overline{TB}$ son los lados del $2n$–gono regular inscrito en la circunferencia. Nos ayudará la línea auxiliar $\overline{BR}$, tangente a la circunferencia en B, con R situado sobre $\overline{TD}$; este segmento es la mitad del lado del $2n$-gono circunscrito y se tiene que $TR = BR$, pues son tangentes a la misma circunferencia desde el mismo punto exterior. Denotaremos con P_n el perímetro del polígono regular circunscrito de n lados, y con p_n el perímetro del polígono regular inscrito. Nos apoyaremos en tres afirmaciones fundamentales.

TR es la mitad de la media armónica entre TD y NB; es decir,

$$\frac{1}{TR} = \frac{1}{TD} + \frac{1}{NB}.$$

Veamos. La relación $\triangle DBR \sim \triangle DTO$ lleva a la proporción

$$\frac{RB}{RD} = \frac{OT}{OD}$$

que por

$$RB = TR, \qquad RD = TD - TR \qquad \text{y} \qquad OT = OB$$

se transforma en

$$\frac{TR}{TD - TR} = \frac{OB}{OD}.$$

De la misma forma, la relación $\triangle DTO \sim \triangle BNO$ produce la proporción

$$\frac{NB}{TD} = \frac{OB}{OD},$$

y ambas proporciones conducen a

$$\frac{TR}{TD - TR} = \frac{NB}{TD},$$

que es, en esencia, el resultado buscado.

TB es la media geométrica entre AB y TR, es decir

$$\frac{AB}{TB} = \frac{TB}{TR}.$$

La misma proporción sugiere la semejanza de triángulos que hay que establecer.

Finalmente, la afirmación principal es: *P_{2n} es la media armónica entre P_n y p_n, mientras que p_{2n} es la media geométrica entre P_{2n} y p_n.*

En efecto:

$$P_n = 2nTD, \qquad p_n = nAB = 2nNB,$$

$$P_{2n} = 2n(2TR) = 4nTR, \qquad p_{2n} = 2nTB.$$

Es decir:

$$TR = \frac{P_{2n}}{4n}, \qquad TD = \frac{P_n}{2n}, \qquad NB = \frac{p_n}{2n},$$

$$AB = \frac{p_n}{n}, \qquad TB = \frac{p_{2n}}{2n}.$$

Por la relación de media armónica ya descrita:

$$\frac{2}{P_{2n}} = \frac{1}{P_n} + \frac{1}{p_n},$$

y, por la relación de media geométrica

$$\frac{P_{2n}}{p_{2n}} = \frac{p_{2n}}{p_n}.$$

Las igualdades con las que remata la demostración anterior pueden escribirse en la forma

$$P_{2n} = \frac{2P_n p_n}{P_n + p_n} \qquad \text{y} \qquad p_{2n} = \sqrt{P_{2n} p_n},$$

y éstas son relaciones de recurrencia que facilitan el cálculo. Por ejemplo, si $n = 6$ estamos partiendo –como Arquímedes– de un hexágono regular para el cual es fácil ver que $P_6 = 4\sqrt{3} \approx 6,92820323$ y $p_6 = 6$ (tomando la circunferencia de radio 1). La aplicación de la recurrencia da:

$$\begin{array}{ll} P_{12} = 6,430780618; & p_{12} = 6,211657082 \\ P_{24} = 6,319319884; & p_{24} = 6,265257226 \\ P_{48} = 6,292172430; & p_{48} = 6,278700406 \\ P_{96} = 6,285429199; & p_{96} = 6,282063902 \end{array}$$

lo que significa aproximaciones para π por exceso de 3,142714599 y por defecto de 3,140845070, con lo que garantizamos igualmente dos cifras exactas.

Todavía algunos se preguntan por qué Arquímedes detuvo el cálculo en el polígono de 96 lados. Habría que contestarles: *el cálculo duele*; más todavía si para realizarlo dispones solo de un sistema de numeración bastante primitivo que ni siquiera es posicional. Además de ello, al admirar las maravillosas aproximaciones racionales de Arquímedes tiene uno derecho a preguntarse cuánto tiempo le llevarían. Sin ellas, el resultado no hubiera tenido la finura con que lo disfrutamos.

Las computadoras actuales nos permiten participar, con relativa facilidad, en el deporte de la caza de dígitos de π. Por ejemplo, si aplicamos la recurrencia anterior con el programa Octave (este programa emula, en el ambiente Linux, el programa comercial MatLab), con una precisión de 15 cifras decimales, obtenemos luego de 20 pasos (es decir, para los polígonos de 6 291 456 lados) aproximaciones por defecto y por exceso, respectivamente de

$$3,14159265358966 \quad \text{y} \quad 3,14159265359005,$$

lo que nos da 11 cifras exactas.

Claro... esto es una minucia para los verdaderos cazadores de cifras y el algoritmo anterior es terriblemente ineficiente. De hecho, la mayoría de los algoritmos más conocidos para calcular π son sumamente lentos; vienen en forma de series o productos infinitos. Podemos ver algunos de ellos a continuación:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots \qquad \text{(Viète)}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots} \qquad \text{(Wallis)}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \text{(Euler)}$$

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cdots}}}} \qquad \text{(Brouncker)}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \qquad \text{(Leibniz–Gregory)}$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2^7} + \cdots \qquad \text{(Newton)}$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \cdots \right) \qquad \text{(Sharp)}$$

$$10 - \pi^2 = \frac{1}{1^3 \cdot 2^3} + \frac{1}{2^3 \cdot 3^3} + \frac{1}{3^3 \cdot 4^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 (n+1)^3} \qquad \text{(Ramanujan)}$$

Podemos añadir a esta lista una fórmula harto curiosa. En los *Elementos* de Euclides se demuestra que el conjunto de los números primos es infinito; ésta es la proposición IX.20. Como ya hemos comentado, también en los *Elementos* se demuestra (proposición XII.2) que la razón círculo–cuadrado del diámetro es una constante. ¿Pudo haber soñado Euclides alguna vez que existiría una relación entre estos dos teoremas? Es improbable. Sin embargo, Srinivasa Ramanujan la consiguió en el siglo XX:

$$\frac{105}{\pi^4} = \left(1 + \frac{1}{2^4}\right)\left(1 + \frac{1}{3^4}\right)\left(1 + \frac{1}{5^4}\right)\left(1 + \frac{1}{7^4}\right) \cdots = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 + \frac{1}{p^4}\right).$$

Todas son buenas oportunidades para ingresar al pasatiempo de la caza de cifras de π... Pero, posiblemente, haya mejores cosas en que ocupar el tiempo. π tiene mucho más que dar que sus dígitos.

5 Reconocimiento

Este artículo provino de la charla *¿Conoces a π desde abajo?*, dictada en el marco de los Talleres de Formación Matemática (IX TForMa), realizados en la Universidad de Oriente en la ciudad de Cumaná.

Referencias

[1] Archimedes, *The works of Archimedes* (Edited by T. L. Heath), Dover, New York, 2002.

[2] Euclid, *The thirteen books of the Elements*, (Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath). 3 vols., Dover, New York, 1956.

[3] Euclides, *Elementos*, (Traducción y notas de María Luisa Puertas Castaño), 3 vols., Editorial Gredos, Madrid, 1991.

[4] Hairer, E., Wanner, G., *Analysis by its history*, Springer, 2008.

[5] Niven, I., *A simple proof that π is irrational.*, Bull. Amer. Math. Soc., **53** (6) (1947), 509.