

Series de Fourier, Transformadas de Fourier y Aplicaciones

Fourier series, Fourier Transforms and Applications

Genaro González

Departamento de Matemática y Computación

Facultad Experimental de Ciencias

Universidad del Zulia. Apartado Postal 526

Maracaibo 4001 - Venezuela

gonzalez@luz.ve

Resumen

En este artículo se estudian las series de Fourier en el círculo y la transformada de Fourier de funciones reales infinitamente diferenciables con todas sus derivadas rápidamente decrecientes. También se dan ejemplos de algunas de las aplicaciones más importantes del análisis de Fourier a varias ramas de la matemática y de la física.

Palabras y frases clave: Teorema del isomorfismo, serie de Fourier, transformada de Fourier, identidad de Parseval, identidad de Plancherel, funciones de Schwartz.

Abstract

In this article we study the Fourier series in the circle and the Fourier transform of infinitely differentiable real functions with all its derivatives rapidly decreasing. We also provide examples of some of the most important applications of Fourier analysis to several branches of mathematics and physics.

Key words and phrases: The isomorphism theorem, Fourier series, Fourier transform, Parseval identity, Plancherel identity, Schwartz functions.

1 Introducción

La idea básica de las series de Fourier es que toda función periódica de período T puede ser expresada como una suma trigonométrica de senos y cosenos del mismo período T . El problema aparece naturalmente en astronomía, de hecho Neugebauer (1952) descubrió que los Babilonios utilizaron una forma primitiva de las series de Fourier en la predicción de ciertos eventos celestiales.

La historia moderna de las series de Fourier comenzó con D'Alembert (1747) y su tratado de las oscilaciones de las cuerdas del violín. El desplazamiento $u = u(t, x)$ de una cuerda de violín, como una función del tiempo t y de la posición x , es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$

sujeto a las condiciones iniciales $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ para $t \geq 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0$ para $0 < x < 1$. La solución de este problema es la superposición de dos ondas viajando en direcciones opuestas a la velocidad 1, como lo expresa la fórmula de D'Alembert:

$$u(t, x) = \frac{1}{2}f(x+t) + \frac{1}{2}f(x-t),$$

en la cual f es una función impar de período 2 que se anula en los puntos $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Euler en 1748 propuso que tal solución podía ser expresada en una serie de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) \sin n\pi x,$$

y como consecuencia

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) \cos n\pi t \sin n\pi x.$$

Las mismas ideas fueron luego expuestas por D. Bernoulli (1753) y Lagrange (1759). La fórmula

$$\hat{f}(n) = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx$$

para calcular los coeficientes apareció por primera vez en un artículo escrito por Euler en 1777.

La contribución de Fourier comenzó en 1807 con sus estudios del problema del flujo del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

presentado a la *Académie des Sciences* en 1811 y publicado en parte como la célebre *Théorie analytique de la chaleur* en 1822. Fourier hizo un intento serio por demostrar que cualquier función diferenciable puede ser expandida en una serie trigonométrica. Una prueba satisfactoria de este hecho fue dada por Dirichlet en 1829. Riemann también hizo contribuciones importantes al problema.

Modernamente el análisis de Fourier ha sido impulsado por matemáticos de la talla de Lebesgue, Hardy, Littlewood, Wiener, Frobenius, Selberg, Weil y Weyl entre otros.

En este artículo se estudian los fundamentos teóricos de mayor relevancia de las series y transformadas de Fourier y se presentan algunas de sus aplicaciones.

2 Espacios de Hilbert

Definición 1. Un espacio euclídeo es un espacio vectorial complejo \mathbf{H} junto con una función que asocia a cada par ordenado de vectores $x, y \in \mathbf{H}$ un número complejo (x, y) , llamado producto interior de x e y , de manera tal que se verifican las siguientes propiedades:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$, (la barra denota conjugación compleja).
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, para todo $x, y, z \in \mathbf{H}$.
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$, para todo $x, y \in \mathbf{H}$ y para todo escalar α .
4. $(x, x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbf{H}$.
5. $(x, x) = 0$ sólo si $x = 0$.

En virtud de la propiedad 4 podemos definir la *norma* de un vector x de \mathbf{H} mediante la fórmula $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Se satisfacen las siguientes relaciones:

1. **Desigualdad de Schwarz.** Para todo $x, y \in \mathbf{H}$, $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$.
2. **Desigualdad triangular.** Para todo $x, y \in \mathbf{H}$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Si definimos la distancia entre x e y mediante $d(x, y) = \|x - y\|$ tenemos ahora que \mathbf{H} es un espacio métrico.

Definición 2. Un espacio euclídeo \mathbf{H} recibe el nombre de espacio de Hilbert si toda sucesión de Cauchy converge en \mathbf{H} , es decir, si \mathbf{H} es completo con la métrica inducida por el producto interno.

Definición 3. Sea \mathbf{H} un espacio de Hilbert. Si $(x, y) = 0$ para ciertos $x, y \in \mathbf{H}$ decimos que x es ortogonal a y . Como $(x, y) = 0$ implica que $(y, x) = 0$ tenemos que la relación de ortogonalidad es una relación simétrica. Un conjunto de vectores u_α en \mathbf{H} , donde α recorre algún conjunto de índices A , se llama ortonormal si se satisfacen las relaciones de ortogonalidad $(u_\alpha, u_\beta) = 0$ para todo $\alpha, \beta \in A$ con $\alpha \neq \beta$, y si está normalizado de modo que $\|u_\alpha\| = 1$ para cada $\alpha \in A$. En otras palabras, $\{u_\alpha\}$ es ortonormal si

$$(u_\alpha, u_\beta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = \beta \\ 0, & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Si $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ es ortonormal, asociamos a cada $x \in \mathbf{H}$ una función compleja \hat{x} sobre el conjunto de índices A , definida mediante

$$\hat{x}(\alpha) = (x, u_\alpha) \quad (\alpha \in A).$$

Los números $\hat{x}(\alpha)$ se llaman los coeficientes de Fourier de x relativos al conjunto $\{u_\alpha\}$.

Los cuatro teoremas siguientes establecen algunas de las propiedades más importantes de los conjuntos ortonormales y los coeficientes de Fourier en espacios de Hilbert. Las demostraciones pueden verse en [2] o [3].

Teorema 1. En un espacio de Hilbert todo conjunto ortonormal es linealmente independiente.

Teorema 2. Sea \mathbf{H} un espacio de Hilbert. Supongamos que $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ es un conjunto ortonormal con A a lo sumo numerable. Entonces para todo $x \in \mathbf{H}$ se satisface la siguiente desigualdad:

$$\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\text{Desigualdad de Bessel})$$

Algunos autores requieren en la definición de espacio de Hilbert que el espacio sea de dimensión infinita y separable, i.e., se requiere la existencia de un subconjunto numerable denso en \mathbf{H} . Bajo estas hipótesis puede demostrarse la existencia de un subconjunto ortonormal maximal que es a lo sumo numerable. Los conjuntos ortonormales maximales se llaman frecuentemente *conjuntos ortonormales completos o bases*.

Teorema 3. Sea $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ un conjunto ortonormal en \mathbf{H} con A numerable. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\{u_\alpha\}$ es un conjunto ortonormal maximal en \mathbf{H} .
2. El conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de $\{u_\alpha\}$ es denso en \mathbf{H} .
3. Para todo $x \in \mathbf{H}$, $\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2$ (Identidad de Plancherel).
4. Si $x, y \in \mathbf{H}$, entonces $(x, y) = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha) \overline{\hat{y}(\alpha)}$ (Identidad de Parseval).

Teorema 4 (Teorema del isomorfismo). Si u_1, u_2, \dots es una base en \mathbf{H} entonces la aplicación $x \mapsto \hat{x}(n)$ es un isomorfismo entre \mathbf{H} y el espacio l_2 formado por el conjunto de todas las sucesiones de cuadrado sumable.

Este último teorema establece que todos los espacios de Hilbert de dimensión infinita que posean una base ortonormal numerable son isomorfos.

3 Geometría de $L^2(I)$

El espacio $L^2(I)$ se define como la clase de todas las funciones complejas medibles definidas en el intervalo $I \subset \mathbf{R}$ que satisfacen $(\int_I |f|^2)^{1/2} < \infty$. Para $f, g \in L^2(I)$, definimos

$$(f, g) = \int_I f \bar{g}. \quad (1)$$

Observe que

$$|(f, g)| \leq \int_I |f \bar{g}| = \int_I |f| |g| \leq \int_I \frac{1}{2} (|f|^2 + |g|^2) < \infty$$

y por lo tanto, la fórmula 1 define un número complejo. Es fácil verificar que la fórmula 1 define un producto interno en $L^2(I)$ y que, con la norma inducida por dicho producto interno $L^2(I)$ es un espacio métrico completo, es decir, $L^2(I)$ es un espacio de Hilbert de acuerdo con la definición 2. Si A y B son subintervalos disjuntos de I entonces

$$(\chi_A, \chi_B) = \int_I \chi_A \overline{\chi_B} = \int_I \chi_{A \cap B} = 0$$

donde χ_A y χ_B son las funciones características de los conjuntos A y B , respectivamente. En consecuencia existe un conjunto ortogonal infinito, lo

cual implica, en virtud del teorema 1, que $L^2(I)$ es de dimensión infinita. Puede también probarse que el conjunto formado por todas las combinaciones lineales finitas de funciones características de subintervalos de I con extremos racionales es un subconjunto denso y numerable de $L^2(I)$. En otras palabras, $L^2(I)$ es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Probemos ahora el siguiente

Teorema 5. *Existe un subconjunto ortonormal numerable tal que todas las combinaciones lineales finitas de miembros de dicho conjunto es denso en $L^2(I)$, i.e., $L^2(I)$ posee una base numerable.*

Demostración. Puesto que $L^2(I)$ es separable, podemos encontrar un conjunto numerable de funciones $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ que es denso en $L^2(I)$. Si la función f_n puede ser expresada como una combinación lineal compleja de las funciones f_1, f_2, \dots, f_{n-1} , entonces la eliminamos de nuestro conjunto denso numerable. Así continuamos con nuestro proceso y el conjunto restante, que también es denso y numerable, lo enumeramos como $g_1, g_2, g_3 \dots$. Ahora aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para construir una familia ortonormal la cual evidentemente será una base para $L^2(I)$. \square

Como consecuencia del teorema 4 (teorema del isomorfismo) tenemos que la aplicación $f \mapsto \hat{f}(n) = (f, g_n) = \int_I f \overline{g_n}$ define un isomorfismo de espacios de Hilbert entre $L^2(I)$ y el espacio l_2 de todas las sucesiones de cuadrado sumable.

4 Funciones de cuadrado sumable en el círculo y sus series de Fourier

En esta sección nos concentraremos en el espacio $L^2(S^1)$, donde S^1 denota la circunferencia unidad. El espacio S^1 puede interpretarse como el intervalo unidad $0 \leq x \leq 1$, con los extremos 0 y 1 identificados. Las funciones definidas en S^1 pueden verse como funciones de variable real periódicas de período 1, i.e., funciones que satisfacen $f(x+1) = f(x)$, para $0 \leq x < 1$. El espacio $L^2(S^1)$ es el espacio de Hilbert de todas las funciones complejas medibles f definidas en S^1 que satisfacen

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

En este espacio el producto interno está definido por

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)} dx.$$

Es claro que $L^2(S^1)$ es canónicamente isomorfo a $L^2(I)$. El principal resultado referente a este espacio es el siguiente teorema:

Teorema 6. *La familia de funciones definidas por*

$$e_n(x) = e^{2\pi inx} = \cos(2\pi nx) + i \sin(2\pi nx)$$

forman una base ortonormal para $L^2(S^1)$. En consecuencia, toda función $f \in L^2(S^1)$ puede ser expandida mediante una serie de Fourier en la forma

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e_n.$$

con coeficientes

$$\hat{f}(n) = (f, e_n) = \int_0^1 f \overline{e_n} = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx} dx.$$

De acuerdo con el teorema 4, la aplicación $f \mapsto \hat{f}$ es un isomorfismo entre $L^2(S^1)$ y $L^2(\mathbb{Z})$ y por lo tanto tenemos la identidad de Plancherel,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2.$$

Lema 1. *Si $f \in L^2(S^1)$, entonces $\hat{f}'(n) = \frac{1}{2\pi in} \hat{f}(n)$.*

Demostración. $\hat{f}'(n) = \int_0^1 f'(x)e^{-2\pi inx} dx$. Integrando por partes obtenemos que $\hat{f}'(n) = e^{-2\pi inx} f(x)|_0^1 - \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx} (-2\pi in) dx = 2\pi in \hat{f}(n)$ \square

5 Transformadas de Fourier

Las funciones de Schwartz son aquellas funciones definidas en \mathbf{R} que son infinitamente diferenciables y rápidamente convergentes a cero. Más formalmente.

Definición 4. Una función f se llama función de Schwartz si $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ y $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (1+x^2)^k f^{(p)}(x) = 0$, para todo par de enteros no negativos k y p . En nuestra notación, $f^{(0)} = f$. Equivalentemente, f es una función de Schwartz si $\lim_{|x| \rightarrow \infty} P(x)f^{(n)}(x) = 0$ para todo entero no negativo n y para todo polinomio $P(x)$.

El conjunto formado por todas las funciones de Schwartz se denota por $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Evidentemente $\mathcal{S}(\mathbf{R}) \subset L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$. Puede probarse fácilmente que $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ es denso en $L^1(\mathbf{R})$ y en $L^2(\mathbf{R})$.

Definición 5. Para $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, definimos

$$\hat{f}(\gamma) = \int f(x) \exp(-2\pi i x \gamma) dx \quad (2)$$

$$\check{f}(x) = \int f(\gamma) \exp(2\pi i \gamma x) d\gamma \quad (3)$$

La ecuación (2) es llamada la *transformada de Fourier* de f , y la (3) la *transformada inversa de Fourier* de f . El siguiente teorema resume los resultados más importantes respecto a las transformadas de Fourier.

Teorema 7.

1. La aplicación $f \mapsto \hat{f}$ es lineal y biyectiva de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ en sí mismo.
2. $\check{\hat{f}} = f$, para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$,
3. $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$, para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Definición 6. Para $f, g \in L^1(\mathbf{R})$, definimos la convolución de f y g mediante

$$(f \circ g)(x) = \int f(x-y)g(y) dy.$$

Es fácil probar que $\|f \circ g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ y por lo tanto la convolución define un producto en $L^1(\mathbf{R})$.

La integral de Fourier puede definirse mediante (2) para funciones en $L^1(\mathbf{R})$. Sus principales propiedades vienen dadas en el siguiente teorema.

Teorema 8. Para cualquier función f en $L^1(\mathbf{R})$ la transformada de Fourier

$$\hat{f}(\gamma) = \int f(x) \exp(-2\pi i \gamma x) dx$$

existe como una integral de Lebesgue ordinaria y satisface las siguientes propiedades:

1. $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.
2. $\hat{f} \in C(\mathbf{R})$.
3. $\lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} \hat{f}(\gamma) = 0$.
4. $\widehat{(f \circ g)} = \hat{f}\hat{g}$.
5. $\hat{f} = 0$ si y sólo si $f = 0$.

6 Aplicaciones

El poder extraordinario y la flexibilidad de las series y transformadas de Fourier se ponen de manifiesto en la asombrosa variedad de las aplicaciones que ellas tienen en diversas ramas de la matemática y de la física matemática, desde teoría de números y geometría hasta mecánica cuántica. En esta sección presentamos algunas de las más importantes aplicaciones del análisis de Fourier. Comenzamos dando una hermosa y elegante solución al que demostró ser uno de los más complejos problemas de la geometría plana: el famoso problema isoperimétrico.

6.1 El problema isoperimétrico

Teorema 9. *Si \mathcal{C} es una curva cerrada simple de clase C^1 y de longitud 1, entonces el área A encerrada por \mathcal{C} satisface la desigualdad $A \leq \frac{1}{4\pi}$. La igualdad se satisface si y sólo si \mathcal{C} es una circunferencia. En consecuencia, entre todas las curvas cerradas simples de longitud 1 la que encierra mayor área es la circunferencia.*

Demostración. Supongamos que la curva \mathcal{C} está parametrizada en la forma $(x(t), y(t))$, donde el parámetro t representa la longitud de arco. En virtud del teorema de Stokes

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{C}} (x \, dy - y \, dx) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x\dot{y} - y\dot{x}) \, dt \\
 &= \frac{1}{2} ((\hat{x}, \hat{y})_{l_2} - (\hat{y}, \hat{x})_{l_2}) \quad (\text{Parseval}) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} (\hat{x}\overline{\hat{y}} - \overline{\hat{y}}\hat{x})(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} i\pi n (\overline{\hat{x}}\hat{y} - \hat{x}\overline{\hat{y}})(n) \quad (\text{En virtud del lema 1}) \\
 &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} i\pi n 2i \operatorname{Im}(\overline{\hat{x}(n)}\hat{y}(n)) = -2\pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} n \operatorname{Im}(\overline{\hat{x}(n)}\hat{y}(n)).
 \end{aligned}$$

Por otra parte, puesto que la curva \mathcal{C} tiene perímetro 1, tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \|\dot{\hat{x}}\|_{l_2} + \|\dot{\hat{y}}\|_{l_2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} 4\pi^2 n^2 (|\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2) = 4\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 (|\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2). \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{4\pi} - A \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[n^2 (|\hat{x}|^2 + |\hat{y}|^2) + 2n \operatorname{Im}(\overline{\hat{x}(n)} \hat{y}(n)) \right].$$

Escribamos $\hat{x} = \alpha + i\beta$, $\hat{y} = \gamma + i\delta$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{4\pi} - A \right) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + 2n(\alpha\delta - \beta\gamma) \\ &= \sum_{n \neq 0} [(n\alpha + \delta)^2 + (n\beta - \gamma)^2 + (n^2 - 1)(\delta^2 + \gamma^2)] \geq 0. \end{aligned}$$

Luego $A \leq \frac{1}{4\pi}$, que es precisamente el área encerrada por una circunferencia de longitud 1.

Supongamos ahora que se satisface la igualdad $A = \frac{1}{4\pi}$ y demostremos que la curva \mathcal{C} es una circunferencia. En efecto, si $A = \frac{1}{4\pi}$, entonces

$$\sum_{n \neq 0} [(n\alpha + \delta)^2 + (n\beta - \gamma)^2 + (n^2 - 1)(\delta^2 + \gamma^2)] = 0.$$

Esta última relación implica que si $|n| \geq 2$, entonces $\delta = \gamma = \alpha = \beta = 0$, y sí $|n| = 1$, entonces $\alpha(\pm 1) = \mp \delta(\pm 1)$ y $\beta(\pm 1) = \pm \gamma(\pm 1)$. Por otra parte, $\alpha(1) = \operatorname{Re}(\hat{x}(1)) = \int_0^1 x(t) \cos(2\pi t) = \alpha(-1)$, similarmente $\beta(1) = \operatorname{Im}(\hat{x}(1)) = \int_0^1 x(t) \sin(2\pi t) = -\beta(-1)$. Análogamente, $\gamma(1) = \gamma(-1)$ y $\delta(1) = -\delta(-1)$.

Desarrollando las funciones $x(t)$ y $y(t)$ en series de Fourier, obtenemos entonces que:

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{x}(n) e^{2\pi i n t} = \hat{x}(0) + 2\alpha(1) \cos(2\pi t) - 2\beta(1) \sin(2\pi t) \quad (4)$$

$$y(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{y}(n) e^{2\pi i n t} = \hat{y}(0) + 2\beta(1) \cos(2\pi t) + 2\alpha(1) \sin(2\pi t). \quad (5)$$

Luego, de las ecuaciones (4) y (5) deducimos que:

$$(x(t) - x(0))^2 + (y(t) - y(0))^2 = 4(\alpha(1)^2 + \beta(1)^2).$$

En otras palabras la curva \mathcal{C} es una circunferencia. \square

6.2 Temperatura de la tierra

Un problema sencillo pero muy interesante es el de calcular la temperatura de la tierra a una profundidad x a partir de la temperatura de la superficie. Describamos la temperatura de la superficie terrestre como una función f periódica en el tiempo t y de período 1 (un año). La temperatura $u(t, x)$ en el tiempo $t \geq 0$ y profundidad $x \geq 0$ es también periódica en t y es natural asumir que $|u| \leq \|f\|_\infty$. Bajo estas circunstancias $u(t, x)$ puede ser expandida mediante una serie de Fourier para cada $0 \leq x < \infty$ fijo como sigue:

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(x) e^{2\pi i n t},$$

con coeficientes de Fourier

$$c_n(x) = \int_0^1 u(t, x) e^{-2\pi i n t} dt.$$

Sabemos que la función u satisface la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (\text{Ecuación del calor}).$$

Por lo tanto,

$$c_n'' = \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) e^{-2\pi i n t} dt = 2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) e^{-2\pi i n t} dt = 4\pi i n c_n.$$

En otras palabras, los coeficientes c_n satisfacen la ecuación

$$c_n'' = [(2\pi|n|)^{1/2}(1 \pm i)]^2 c_n,$$

tomando el signo positivo o negativo de acuerdo a si $n > 0$ ó $n < 0$. Por otra parte, sabemos que $c_n(0) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt = \hat{f}(n)$. Resolviendo la ecuación, obtenemos que:

$$c_n(x) = \hat{f}(n) \exp[-(2\pi|n|)^{1/2}(1 \pm i)x],$$

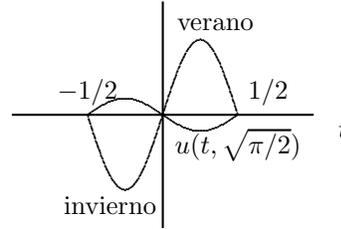
y por lo tanto resulta finalmente

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \exp[-(2\pi|n|)^{1/2}x] \exp[2\pi int \mp (2\pi|n|)^{1/2}ix].$$

Supongamos por ejemplo que la temperatura de la superficie viene dada por una función sinusoidal simple $f(t) = \sin(2\pi t)$ (lo cual significa que la temperatura anual media $\hat{f}(0) = \int_0^1 f$ es cero). En este caso, la función u vendrá dada por:

$$u(t, x) = \exp(-\sqrt{2\pi}x) \sin(2\pi t - \sqrt{2\pi}x).$$

Esta fórmula nos dice que la temperatura a la profundidad $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ queda afectada por el factor $e^{-\pi}$ y está completamente fuera de fase con respecto a las estaciones como lo indica la siguiente figura.



6.3 Evaluación de series no triviales

La identidad de Plancherel puede usarse para evaluar algunas sumas infinitas no triviales. Por ejemplo, demostremos que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$. En efecto, considérese la función $f(x) = x$ definida en el intervalo cerrado $[0, 1]$. El n -ésimo coeficiente de Fourier de dicha función viene dado por:

$$\int_0^1 x \exp(-2\pi inx) dx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } n = 0 \\ -(2\pi in)^{-1}, & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, en virtud de la identidad de Plancherel, tenemos que

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx = \|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2 = \frac{1}{4} + (2\pi^2)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}.$$

Despejando la suma de esta expresión, obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = 2\pi^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \pi^2/6.$$

Como un segundo ejemplo de este tipo, demostremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \pi^4/90.$$

En efecto, consideremos la función $f(x) = x^2$ definida en el intervalo cerrado $[0, 1]$. El n -ésimo coeficiente de Fourier de dicha función es

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{si } n = 0, \\ \frac{1}{2\pi^2 n^2} + \frac{1}{2\pi n} i, & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Luego $|\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{4\pi^4 n^4} + \frac{1}{4\pi^2 n^2}$. En virtud de la identidad de Plancherel tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} &= \int_0^1 x^2 \exp(-2\pi i n x) dx = \|f\|^2 = \|\hat{f}(n)\|^2 \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{2\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 2\pi^4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} - \frac{1}{2\pi^2} \frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

6.4 Desigualdad de Wirtinger

Teorema 10. Si f es una función continua definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ con $f(a) = f(b) = 0$, entonces

$$\|f\|_2 \leq \left(\frac{b-a}{\pi} \right) \|f'\|_2,$$

donde la constante $\frac{b-a}{\pi}$ no puede ser mejorada.

Demostración. Es suficiente probar la desigualdad en el intervalo $[0, 1/2]$. En efecto, dada $f \in C([a, b])$ sea $h : [a, b] \rightarrow [0, 1/2]$ la función lineal $h(x) = (x-a)/(2(b-a))$, pongamos $y = h(x)$ y definamos $g(y) = (f \circ h^{-1})(y)$.

Entonces

$$\begin{aligned}
 \int_a^b |f(x)|^2 dx &= \int_0^{1/2} |g(y)|^2 2(b-a) dy = 2(b-a) \|g(y)\|_2^2 \\
 &\leq 2(b-a) \frac{1}{4\pi^2} \|g'(y)\|_2^2 \\
 &= \frac{b-a}{2\pi^2} \int_0^{1/2} |g'(y)|^2 dy \\
 &= \frac{b-a}{2\pi^2} \int_a^b |2(b-a)f'(x)|^2 \frac{dx}{2(b-a)} \\
 &= \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \|f'(x)\|_2^2.
 \end{aligned}$$

Supongamos pues que $f \in C([0, 1/2])$ con $f(0) = f(1/2) = 0$. Extendamos f a una función impar en $[-1/2, 1/2]$. Entonces dicha extensión es una función periódica de período 1, i.e., $f \in L^2(S^1)$ y por consiguiente,

$$\begin{aligned}
 \|f'\|_{L^2(S^1)}^2 &= \sum_{\mathbb{Z}} |\hat{f}'(n)|^2 = \sum_{\mathbb{Z}} |2\pi i n \hat{f}(n)|^2 \\
 &= \sum_{n \neq 0} 4\pi^2 n^2 |\hat{f}(n)|^2 \geq 4\pi^2 \sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)|^2 \\
 &= 4\pi^2 \|f\|_{L^2(S^1)}^2.
 \end{aligned}$$

Observemos ahora que la igualdad se obtiene si y sólo si $\hat{f}(n) = 0$ para todo n tal que $|n| > 1$ lo cual implica que la función $f(x) = c_1 e^{2\pi i x} + c_2 e^{-2\pi i x} = d_1 \cos 2\pi x + d_2 \sin 2\pi x$ satisface $\|f'\| = \frac{1}{2\pi} \|f\|$, i.e., la constante $1/2\pi$ no puede ser mejorada. \square

6.5 Solución de ecuaciones diferenciales

Tal vez una de las propiedades más importantes de las integrales de Fourier es que transforma operadores diferenciales con coeficientes constantes en multiplicación por polinomios de acuerdo con la fórmula $\hat{f}' = 2\pi i \gamma \hat{f}$.

Veamos en el siguiente ejemplo cómo resolver la ecuación diferencial

$$u'' - u = -f,$$

en la cual f es una función conocida y debemos encontrar u . Aplicando el operador $\hat{\cdot}$ en ambos lados de la ecuación, obtenemos que $(4\pi^2 \gamma^2 + 1)\hat{u} = \hat{f}$,

o equivalentemente,

$$\hat{u} = (4\pi^2\gamma^2 + 1)^{-1}\hat{f}.$$

Pero $(1 + 4\pi^2\gamma^2)^{-1}$ es la transformada de Fourier de la función $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ y por consiguiente, tenemos que:

$$\begin{aligned} u &= [(4\pi^2\gamma^2 + 1)^{-1}\hat{f}]^\vee = [(4\pi^2\gamma^2 + 1)^{-1}]^\vee \circ (\hat{f})^\vee = \frac{1}{2}e^{-|x|} \circ f \\ &= \frac{1}{2} \int e^{-|x-y|} f(y) dy. \end{aligned}$$

6.6 Flujo del calor

El problema del flujo del calor se describe mediante la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R} \quad (6)$$

con condición de borde $\lim_{t \rightarrow 0} u = f$. La solución de este problema es similar a la solución del problema anterior. Primero aplicamos la transformada de Fourier en ambos lados de la ecuación (6):

$$\partial \hat{u} / \partial t = -2\pi^2\gamma^2 \hat{u},$$

luego calculamos \hat{u} :

$$\hat{u} = \hat{f} \exp(-2\pi^2\gamma^2 t),$$

finalmente invertimos y obtenemos

$$u(t, x) = [\exp(-2\pi^2\gamma^2 t)\hat{f}]^\vee = p_t \circ f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-(x-y)^2/2t]}{(2\pi t)^{1/2}} f(y) dy,$$

donde $p_t(x) = \frac{\exp(-x^2/2t)}{(2\pi t)^{1/2}}$ es el llamado *kernel de Gauss*.

6.7 Ecuación de ondas

La ecuación de ondas viene dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R},$$

con condiciones de borde $\lim_{t \rightarrow 0} u = f$ y $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial t} = g$.

El procedimiento para resolver esta ecuación ya nos es familiar; primero aplicamos la transformada de Fourier:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = -4\pi^2 \gamma^2 \hat{u},$$

después encontramos \hat{u} :

$$\begin{aligned} \hat{u}(t, \gamma) &= \cos 2\pi\gamma t \hat{f}(\gamma) + \frac{\sin 2\pi\gamma t}{2\pi\gamma} \hat{g}(\gamma) \\ &= \frac{1}{2} [e^{2\pi i\gamma t} + e^{-2\pi i\gamma t}] \hat{f}(\gamma) + \frac{1}{2} \int_{-t}^t e^{2\pi i\gamma y} dy \hat{g}(\gamma), \end{aligned}$$

y luego invertimos para finalmente obtener:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy.$$

Esta es la llamada *fórmula de D'Alembert*.

6.8 Fórmula de Poisson

Teorema 11. Sea $f \in C^1(\mathbf{R})$ tal que

$$|f(x)| + |f'(x)| \leq \frac{c}{1+x^2}$$

para todo $x \in \mathbf{R}$ (esta condición se satisface por ejemplo si $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$).
Entonces

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n).$$

Demostración. Fijemos $x \in [0, 1]$ y definamos $\tau f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(x+n)$. Es fácil ver que esta serie es absolutamente convergente.

Por otra parte, en el intervalo $[k, k+1]$ podemos definir $\tau f(x+k) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(x+k+n) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} f(x+l) = \tau f(x)$, para todo $k \in \mathbf{Z}$, lo que indica que τf es una función periódica de período 1; esto es $\tau f \in C(S^1)$. Similarmente, $\tau f'(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f'(x+n)$ converge absolutamente en \mathbf{R} a una función periódica en S^1 ; luego tenemos que $(\tau f)' = \tau f'$ y por consiguiente τf puede desarrollarse en una serie de Fourier.

$$\tau f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{\tau f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

Donde,

$$\hat{\tau}f(n) = \int_0^1 \tau f(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) &= \tau f(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\tau}f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \tau f(x) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+m) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_m^{m+1} f(y) e^{-2\pi i n (y-m)} dy \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int f(y) e^{-2\pi i n y} dy = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n). \end{aligned}$$

□

6.9 Identidad de Jacobi

La función θ es una función trascendente que aparece en diferentes áreas de la matemática como teoría de números, funciones elípticas, ecuaciones de la física matemática y mecánica estadística. Se define mediante la suma

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2 t), \quad \text{para } t > 0.$$

La *Identidad de Jacobi* establece que:

$$\theta(t) = t^{-1/2} \theta(1/t), \quad \text{para } t > 0.$$

Demostración: Consideremos el kernel de Gauss

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}.$$

Entonces

$$\hat{p}_t(\gamma) = e^{-2\pi^2\gamma^2 t},$$

y aplicando la fórmula de Poisson, obtenemos que:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-n^2/2t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi^2 n^2 t}.$$

Luego, haciendo el cambio $t \rightarrow t/2\pi$, obtenemos que:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}.$$

Es decir,

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

□

Referencias

- [1] Dym, H., McKean, H. P., *Fourier Series and Integrals*. Academic Press, New York, 1972.
- [2] Rudin, W., *Análisis Real y Complejo*. Alhambra, Madrid, 1979.
- [3] Kolmogorov, A. N., Fomín, S. V., *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. Editorial MIR, Moscú, 1972.