Divulgaciones Matemáticas v. 6, No. 2 (1998), 93–112

Una Fórmula Distribucional de Sumación del Tipo de Euler–MacLaurin en Dos Variables †

(A Distributional Summation Formula of Euler–MacLaurin type in two variables)

Carlos Ml. Ulate (cmulate@ns.so.ucr.ac.cr)
Sede de Occidente, Universidad de Costa Rica
San Ramón, Costa Rica

Ricardo Estrada (restrada@cariari.ucr.ac.cr)
Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica
San José, Costa Rica

Resumen

En el presente artículo, a partir del concepto de derivada en el sentido distribucional, se obtiene una fórmula de sumación del tipo de Euler–Maclaurin en dos dimensiones.
Palabras y frases clave: Fórmulas de sumación, distribuciones, Euler–MacLaurin.

Abstract

In the present paper we obtain, from the concept of derivative in the distributional sense, a summation formula of Euler–MacLaurin type in two variables .
Key words and phrases: Summation formulas, distributions, Euler–MacLaurin.

†Recibido 98/05/12. Aceptado 98/10/22.
MSC (1991): 41A60; 46F10.

1 Introducción

La fórmula de sumación de Euler–Maclaurin es bien conocida [5, sección 1.8]. Muchos autores la han generalizado obteniendo diversas variantes [7, 8, 9]. Recientemente en [1], usando la teoría de distribuciones, se obtiene una versión distribucional con resto para fórmulas de sumación del tipo de Euler–Maclaurin en una variable. Específicamente la fórmula establece que si g es una distribución de orden q con soporte contenido en $[0,1]$, $\operatorname{supp}(g) \subseteq [0,1]$, tal que que g sea integrable cerca de los extremos $x = 0$ y $x = 1$ y tal que $\langle g(x), 1\rangle$=1, entonces

$$\sum_{k=N}^{M-1} \langle g(x-k), \phi(x)\rangle = \int_N^M \phi(x)dx + \sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j \rho_j (\phi^{(j)}(M) - \phi^{(j)}(N)) + R_q \tag{1.1}$$

para cada $\phi \in C^q[N,M]$, donde los ρ_j son constantes que no dependen de ϕ, dadas por $\rho_j = G_{j+1}(0)$, donde G_n es la n-ésima primitiva periódica de media cero de $G_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(x-k) - 1$. El resto $R_q = R_q(\phi)$ está dado por

$$R_q = (-1)^q \int_N^M G_q(x)\phi^{(q)}(x)dx. \tag{1.2}$$

Obsérvese que la notación $\langle f(x), \phi(x)\rangle$ denota la evaluación de la distribución f en la función prueba ϕ.

La utilidad de tomar g como una distribución general es que permite obtener como caso particular muchas fórmulas conocidas así como fórmulas nuevas, por ejemplo, si $g(x) = \delta(x-\beta)$, $0 < \beta < 1$, se obtiene la aproximación usual para la suma $\sum_{k=N}^{M-1} \phi(k+\beta)$ y, así, para $\sum_{k=N}^{M-1} \phi(x)$ si se hace $\beta \to 0^+$. Pero si tomamos

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=1}^{p} \omega_{ij} \delta^{(j)}(x - \beta_i)$$

obtenemos el error en las cuadraturas numéricas, basadas en aproximación por splines.

El objetivo del presente artículo es generalizar la fórmula distribucional (1.1) al caso de dos variables.

2 Preliminares

En este trabajo usamos la notación usual de multiíndices, a saber si $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ entonces $\mathbf{k}! = k_1!k_2!$, $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2$, $\mathbf{D}^{\mathbf{k}} = \frac{\partial^{|\mathbf{k}|}}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}}$.

Denotamos por $\mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$ el espacio de funciones de prueba sobre $\mathbb{R}^p$, es decir, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$ si ϕ es infinitamente diferenciable y $\mathrm{supp}(\phi)$ es compacto. Su dual, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$ es el espacio de distribuciones sobre $\mathbb{R}^p$ [6, 10].

Si $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ son distribuciones en una variable, entonces su producto tensorial $f_1 \otimes f_2$ se define por

$$\langle (f_1 \otimes f_2)(x, y), \phi(x, y)\rangle = \langle f_1(x), \langle f_2(y), \phi(x, y)\rangle\rangle, \tag{2.1}$$

para $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

3 Sobre las fórmulas de cuadratura

Suponga que estamos interesados en aproximar la integral doble

$$\int_0^1 \int_0^1 \phi(x, y) dx\, dy. \tag{3.1}$$

Sean $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p$ y $w_1, w_2, \dots, w_p$, números tales que $w_1 + \cdots + w_p = 1$ y donde denotamos $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j)$ para $j = 1, 2, \dots, p$. Se puede definir una regla de cuadratura de 2 dimensiones Q para la integral (3.1), mediante:

$$Q(\phi) = \sum_{j=1}^{p} w_j \phi(x_j, y_j) = \sum_{j=1}^{p} w_j \phi(\mathbf{x}_j), \quad \sum_{j=1}^{p} w_j = 1. \tag{3.2}$$

La regla (3.2) podemos aplicarla a cualquier integral del tipo

$$\int_a^b \int_c^d \phi(x, y) dx\, dy, \tag{3.3}$$

mediante el cambio de escala,

$$Q_{a,b}^{c,d}(\phi) = (b - a)(d - c)Q\left(\phi((b - a)x + a, (d - c)y + c)\right). \tag{3.4}$$

La m^2-copia de la regla Q dada en (3.2), se obtiene al dividir el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ en m^2 cuadrados de lado $1/m$ y aplicar la correspondiente cuadratura a cada uno de ellos,

$$Q^m(\phi) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} Q_{k/m,(k+1)/m}^{j/m,(j+1)/m}(\phi), \tag{3.5}$$

donde $Q_{k/m,(k+1)/m}^{j/m,(j+1)/m}(\phi)$ se obtienen mediante (3.4). Un cálculo fácil muestra que

$$Q_{k/m,(k+1)/m}^{j/m,(j+1)/m}(\phi) = \sum_{i=1}^{p} \frac{w_i}{m^2} \phi\left(\frac{x_i + k}{m}, \frac{y_i + j}{m}\right), \tag{3.6}$$

con lo cual (3.5) se escribe como

$$Q^m(\phi) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{p} \frac{w_i}{m^2} \phi\left(\frac{x_i + k}{m}, \frac{y_i + j}{m}\right). \tag{3.7}$$

Obsérvese que la fórmula de cuadratura (3.2) puede ser escrita como

$$Q(\phi) = \langle g(x, y), \phi(x, y)\rangle, \tag{3.8}$$

donde g es la distribución

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^{p} w_i \delta(x - x_i, y - y_i). \tag{3.9}$$

También se puede ver que

$$g(mx - k, my - j) = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{p} w_i \delta\left(x - \left(\frac{k}{m} + \frac{x_i}{m}\right), y - \left(\frac{j}{m} + \frac{y_i}{m}\right)\right), \tag{3.10}$$

con lo que (3.7) se puede escribir como

$$Q^m(\phi) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \langle g(mx - k, my - j), \phi(x, y)\rangle, \tag{3.11}$$

donde la distribución $g(mx - k, my - j)$ está dada por (3.10).

4 Medias parciales

Si $G(x)$ es una distribución periódica en una variable entonces su media se puede definir como el término constante en su expansión de Fourier o, de manera más sugestiva, como el límite $\lim_{x\to\infty} G(x)$ (C). Nótese que como el límite ordinario de $G(x)$ cuando $x \to \infty$ normalmente no existe, es necesario calcular el límite en el sentido de Cesàro [2, 3].

Sea ahora $G(x, y)$ una distribución periódica de dos variables, de periodos $p > 0$ y $q > 0$,

$$G(x + p, y + q) = G(x, y). \tag{4.1}$$

En este caso no solo es útil definir la media de $G(x, y)$, sino también las medias parciales $A(x)$ y $C(y)$. Iniciemos con $A(x)$: esta media parcial es la distribución de la variable x definida como el límite distribucional en el sentido Cesàro

$$A(x) = \lim_{y\to\infty} G(x, y) \ \ (C), \tag{4.2}$$

esto es

$$\langle A(x), \phi(x)\rangle = \lim_{y\to\infty} \langle G(x, y), \phi(x)\rangle \ \ (C) \tag{4.3}$$

para $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Nótese que el límite en la derecha de (4.3) existe para cada $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pues $\Phi(y) = \langle G(x, y), \phi(x)\rangle$ es una distribución periódica de la variable y, de periodo q.

Por otra parte, $A(x)$ es a su vez periódica, de periodo p. Así, $A(x)$ tiene una bien definida media,

$$c = \lim_{x\to\infty} A(x) \ \ (C). \tag{4.4}$$

De manera similar, podemos definir la media parcial $C(y)$ como el límite distribucional

$$C(y) = \lim_{x\to\infty} G(x, y) \ \ (C). \tag{4.5}$$

Esta media parcial $C(y)$ es periódica, de periodo q. Es interesante que las medias de $A(x)$ y de $C(y)$ coinciden: este valor común es la media de $G(x, y)$.

Lema 1. *Sea $G(x, y)$ una distribución periódica, con periodos $p > 0$ y $q > 0$, de modo que $G(x + p, y + q) = G(x, y)$. Sea*

$$G(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{kj} e^{2\pi i(kx/p+jy/q)}, \tag{4.6}$$

su expansión de Fourier. Entonces las medias parciales $A(x)$ y $C(y)$ de $G(x, y)$ vienen dadas por las fórmulas

$$A(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k0} e^{2\pi ikx/p}, \tag{4.7a}$$

$$C(y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{0j} e^{2\pi i j y/q}. \tag{4.7b}$$

Las medias de $A(x)$ y $C(y)$ coinciden y ambas son iguales al valor a_{00}. □

Si $G(x)$ es una distribución periódica de una variable, una condición necesaria y suficiente para que tenga una primitiva periódica es que su media se anule. En tal caso existen primitivas periódicas de todo orden. Algo similar ocurre para funciones de dos variables.

Lema 2. *Sea $G(x,y)$ una distribución periódica, con periodos $p > 0$ y $q > 0$, de modo que $G(x+p, y+q) = G(x,y)$. Si las medias parciales de $G(x,y)$ se anulan entonces existe una familia de distribuciones $\{G_{k,j}(x,y)\}_{k,j=0}^{\infty}$ de modo que*

$$G_{0,0}(x,y) = G(x,y), \tag{4.8}$$

$$G_{k,j}(x+p, y+q) = G_{k,j}(x,y), \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial G_{k,j}}{\partial x} = G_{k-1,j}, \quad k \geq 1, \tag{4.10a}$$

$$\frac{\partial G_{k,j}}{\partial y} = G_{k,j-1}, \quad j \geq 1. \tag{4.10b}$$

Las condiciones (4.8–4.10) determinan a la familia $\{G_{k,j}(x,y)\}_{k,j=0}^{\infty}$ de manera única.

Recíprocamente, la existencia de tal familia de primitivas periódicas implica que las medias parciales se anulan. □

5 Fórmula del tipo Euler–Maclaurin en dos variables

En esta sección obtenemos una fórmula para sumas del tipo

$$\sum_{k=0}^{M-1} \sum_{j=P}^{Q-1} \langle g(x-k, y-j), \phi(x,y) \rangle, \tag{5.1}$$

donde g es una distribución de dos variables con soporte contenido en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ y donde N, M, P y Q son enteros. Como se explicó en la Sección 3, con $g(x,y) = \sum_{i=1}^{p} \omega_i \delta(x-x_i, y-y_i)$ se obtiene la fórmula de Euler–Maclaurin para cuadraturas numéricas. El caso $g(x,y) = \delta(x-x_0, y-y_0)$ produce la fórmula de Euler–Maclaurin usual en el plano. Otras elecciones de g

producen fórmulas para cuadraturas basadas en la cuasi–interpolación o en la aproximación por splines. Más aún, con $g(x,y) = e^{2\pi i(nx+my)}\chi_{[0,1]}(x)\chi_{[0,1]}(y)$ se obtienen fórmulas aproximadas para los coeficientes de Fourier de una función de dos variables. La notación χ_E significa la función característica de un conjunto E.

Conviene iniciar recordando la fórmula en una variable [1]. Sea $f(x)$ una distribución con soporte contenido en [0,1]. Supondremos que f es integrable en las vecindades de los extremos, $x = 0$ y $x = 1$. Sea $a = \langle f(x), 1\rangle$. Entonces la distribución $F(x)$ definida por $F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x-k)$ es periódica, de periodo 1 y media a y se tiene

$$\begin{aligned} F(x)\chi_{[N,M]}(x) &= a\chi_{[N,M]}(x) + \sum_{j=0}^{q-1} F_{j+1}(0)(\delta^{(j)}(x-M) - \delta^{(j)}(x-N)) \\ &\quad + \frac{d^q}{dx^q}\left[F_q(x)\chi_{[N,M]}(x)\right], \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es la familia de primitivas periódicas de media cero de $F_0(x) = F(x) - a$, es decir, $F'_{n+1}(x) = F_n(x)$, $F_n(x+1) = F_n(x)$.

Nótese que $F(x)\chi_{[N,M]}(x) = \sum_{k=N}^{M-1} f(x-k)$.

Evaluando en una función de prueba $\phi \in C^q[N,M]$, (5.2) da la fórmula de Euler–Maclaurin

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{M-1} \langle f(x-k), \phi(x)\rangle &= a\int_N^M \phi(x)dx \\ &\quad + \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j F_{j+1}(0)(\phi^{(j)}(M) - \phi^{(j)}(N)) + R_q, \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde el resto $R_q = R_q(\phi)$ viene dado por

$$R_q = (-1)^q \int_N^M F_q(x)\phi^{(q)}(x)dx. \tag{5.4}$$

Pasamos ahora al caso de funciones de dos variables. Sea $g(x,y)$ una distribución con soporte en $[0,1]\times[0,1]$. Supondremos que g es integrable en las vecindades de la frontera del cuadrado.

Sea $G(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} g(x-k, y-j)$. Entonces $G(x,y)$ es periódica, de periodo 1 en x y en y. Sean $A(x)$ y $C(y)$ las medias parciales de $G(x,y)$. Sea c la media de $G(x,y)$ y sean $A_0(x) = A(x) - c$ y $C_0(y) = C(y) - c$. Obsérvese que $c = \langle g(x,y), 1\rangle$.

Sea $\{G_{k,j}(x,y)\}_{k,j=0}^{\infty}$ la familia de primitivas periódicas de $G_{0,0}(x,y) = G(x,y) - A_0(x) - C_0(y) - c$, de modo que $\mathbf{D}^{(r,s)}G_{k,j} = G_{k-r,j-s}$ para $r \leq k$ y $s \leq j$.

Obtendremos la fórmula del tipo Euler–Maclaurin para

$$G(x,y)\chi_{[N,M]}(x)\chi_{[P,Q]}(y) = \sum_{k=N}^{M-1}\sum_{j=P}^{Q-1} g(x-k,y-j)$$

usando las técnicas de la derivación en el sentido distribucional. Fórmulas para las derivadas distribucionales de cualquier orden de una función de dos variables con discontinuidad de salto en una o varias curvas se pueden encontrar en [4]. En este caso, sin embargo, las discontinuidades de $G(x,y)\chi_{[N,M]}(x)\chi_{[P,Q]}(y)$ se localizan en la frontera del rectángulo $[N,M] \times [P,Q]$ y como esa frontera consiste de segmentos de líneas rectas, bastará aplicar la fórmula válida para funciones de una variable [5, 6], a saber, si una función de una variable $f(x)$ tiene una discontinuidad en $x = x_0$ de magnitud a, pero tiene derivadas continuas para $x \neq x_0$, entonces su derivada distribucional $\overline{f}'$ viene dada por

$$\overline{f}'(x) = f'(x) + a\delta(x - x_0), \tag{5.5}$$

donde f' es la derivada ordinaria.

Para simplificar la notación llamaremos $X = [N,M] \times [P,Q]$, de modo que $\chi_X(x,y) = \chi_{[N,M]}(x)\chi_{[P,Q]}(y)$. Los números N, M, P y Q serán siempre enteros.

Usando (5.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(G_{1,0}(x,y)\chi_X(x,y)\right) &= -G_{1,0}(0,y)\chi_{[P,Q]}(y)\left(\delta(x-M) - \delta(x-N)\right) \\ &\quad + G_{0,0}(x,y)\chi_X(x,y). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Pero

$$-G_{1,0}(0,y)\chi_{[P,Q]}(y)\left(\delta(x-M) - \delta(x-N)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(G_{1,0}(x,y)\chi_X(x,y)\right) \tag{5.7}$$

y

$$G_{0,0}(x,y) = G(x,y) - A_0(x) - C_0(y) - c. \tag{5.8}$$

Así, si usamos las fórmulas

$$\begin{aligned} A_0(x)\chi_X(x,y) =& A_1(0)\chi_{[P,Q]}(y)\left(\delta(x-M)-\delta(x-N)\right) \\ &+\frac{\partial}{\partial x}\left[A_1(x)\chi_X(x,y)\right] \end{aligned} \tag{5.9}$$

y

$$\begin{aligned} C_0(x)\chi_X(x,y) =& C_1(0)\chi_{[N,M]}(x)\left(\delta(y-Q)-\delta(y-P)\right) \\ &+\frac{\partial}{\partial y}\left[C_1(x)\chi_X(x,y)\right], \end{aligned} \tag{5.10}$$

que se obtienen de (5.2) tomando $F = A_0$ y $F = C_0$, respectivamente, obtenemos de (5.6) la fórmula

$$\begin{aligned} G(x,y)\chi_X(x,y) &= c\chi_X(x,y) + A_1(0)\left(\delta(x-M)-\delta(x-N)\right)\chi_{[P,Q]}(y) \\ &+ C_1(0)\chi_{[N,M]}(x)\left(\delta(y-Q)-\delta(y-P)\right) + R_1(x,y), \end{aligned} \tag{5.11}$$

donde el resto $R_1(x,y)$ viene dado por

$$\begin{aligned} R_1(x,y) =& \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(G_{1,0}(x,y)-G_{1,0}(0,y)-A_1(x)\right)\chi_X(x,y)\right] \\ &+\frac{\partial}{\partial y}\left[C_1(y)\chi_X(x,y)\right]. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Evaluando (5.11) en una función de prueba $\phi \in C^1([N,M]\times[P,Q])$ obtenemos la aproximación de primer orden

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{M-1}\sum_{j=P}^{Q-1}\langle g(x-k,y-j),\phi(x,y)\rangle = c\int_N^M\int_P^Q \phi(x,y)dy\,dx \\ + A_1(0)\int_P^Q(\phi(M,y)-\phi(N,y))dy \\ + C_1(0)\int_N^M(\phi(x,Q)-\phi(x,P))dx + R_1, \end{aligned} \tag{5.13}$$

donde el error $R_1 = R_1(\phi)$ viene dado por

$$\begin{aligned} R_1 = -\int_N^M\int_P^Q \Big\{ &\left[G_{1,0}(x,y)-G_{1,0}(0,y)-A_1(x)\right]\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) \\ &+ C_1(y)\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)\Big\}\,dy\,dx. \end{aligned} \tag{5.14}$$

La fórmula de segundo orden se obtiene calculando la derivada distribucional $\frac{\partial^2}{\partial x^2}[G_{2,0}(x,y)\chi_X(x,y)]$. Usando (5.5) se obtiene

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[G_{2,0}(x,y)\chi_X(x,y)\right] = \\
&\frac{\partial}{\partial x}\left[-G_{2,0}(0,y)\chi_{[P,Q]}(y)(\delta(x-M)-\delta(x-N)) + G_{1,0}(x,y)\chi_X(x,y)\right] = \\
&-G_{2,0}(0,y)\chi_{[P,Q]}(y)(\delta'(x-M)-\delta'(x-N)) \\
&-G_{1,0}(0,y)\chi_{[P,Q]}(y)(\delta(x-M)-\delta(x-N)) \\
&+G_{0,0}(x,y)\chi_X(x,y),
\end{aligned}$$

y despejando G de la identidad $G_{0,0}(x,y) = G(x,y) - A_0(x) - C_0(y) - c$ y usando (5.2) con $F = A_0$ y $F = C_0$, respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned}
G(x,y)\chi_X(x,y) = {}& c\chi_X(x,y) \\
&+ A_1(0)(\delta(x-M)-\delta(x-N))\chi_{[P,Q]}(y) \\
&+ A_2(0)(\delta'(x-M)-\delta'(x-N))\chi_{[P,Q]}(y) \\
&+ C_1(0)(\delta(y-Q)-\delta(y-P))\chi_{[N,M]}(x) \\
&+ C_2(0)(\delta'(y-Q)-\delta'(y-P))\chi_{[N,M]}(x) \\
&+ G_{1,1}(0,0)(\delta(x-M)-\delta(x-N))(\delta(y-Q)-\delta(y-P)) \\
&+ R_2(x,y),
\end{aligned} \tag{5.15}$$

donde

$$\begin{aligned}
R_2(x,y) = {}& \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(G_{2,0}(x,y) - G_{2,0}(0,y) + A_2(x)\right)\chi_X(x,y)\right] \\
&- \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[G_{1,1}(0,y)\chi_X(x,y)\right] \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}[C_2(y)\chi_X(x,y)].
\end{aligned} \tag{5.16}$$

La evaluación en una función de prueba $\phi \in C^2([N,M]\times[P,Q])$ produce la aproximación de segundo orden:

$$\begin{aligned}\sum_{k=N}^{M-1}\sum_{j=P}^{Q-1}\langle g(x-k,y-j),\phi(x,y)\rangle &= c\int_N^M\int_P^Q \phi(x,y)dy\,dx\\ &+ A_1(0)\int_P^Q(\phi(M,y)-\phi(N,y))dy\\ &- A_2(0)\int_P^Q\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}(M,y)-\frac{\partial\phi}{\partial x}(N,y)\right)dy\\ &+ C_1(0)\int_N^M(\phi(x,Q)-\phi(x,P))dx\\ &- C_2(0)\int_N^M\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,Q)-\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,P)\right)dx\\ &+ G_{1,1}(0,0)\,(\phi(M,Q)-\phi(M,P))\\ &+ G_{1,1}(0,0)\,(\phi(N,P)-\phi(N,Q))\\ &+ R_2,\end{aligned}\tag{5.17}$$

donde $R_2 = R_2(\phi)$ viene dado por

$$\begin{aligned}R_2 = \int_N^M\int_P^Q \Bigg\{&(G_{2,0}(x,y)-G_{2,0}(0,y)+A_2(x))\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\\ &- G_{1,1}(0,y)\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+C_2(y)\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\Bigg\}\,dy\,dx.\end{aligned}\tag{5.18}$$

La fórmula general se obtiene por inducción, tras usar (5.5) en el cálculo de la derivada distribucional $\frac{\partial^q}{\partial x^q}[G_{q,0}(x,y)\chi_X(x,y)]$. El resultado es el siguiente:

Teorema 1. *Sea $g(x,y)$ una distribución de dos variables cuyo soporte está contenido en el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$. Supóngase que g sea integrable en un vecindario de la frontera del cuadrado. Sea*

$$G(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} g(x-k,y-j),\tag{5.19}$$

de modo que G es periódica, $G(x+k,y+j) = G(x,y)$, $k,j\in\mathbb{Z}$. Sean $A(x)$ y $C(y)$ las medias parciales de $G(x,y)$, sea c su media y sean $A_0(x) = A(x)-c$, $C_0(y) = C(y)-c$. Entonces si N, M, P, Q son enteros y si

$X = [N, M] \times [P, Q]$, *se tiene*

$$\begin{aligned} G(x,y)\chi_X(x,y) &= c\chi_X(x,y) + \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_j(\delta^{(j)}(x-M) - \delta^{(j)}(x-N))\chi_{[P,Q]}(y) \\ &+ \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j(\delta^{(j)}(y-Q) - \delta^{(j)}(y-P))\chi_{[N,M]}(x) \\ &+ \sum_{i=0}^{q-2}\sum_{j=0}^{q-2-i} \gamma_{i,j}(\delta^{(i)}(x-M) - \delta^{(i)}(x-N))(\delta^{(j)}(y-Q) \\ &- \delta^{(j)}(y-P)) + R_q(x,y), \end{aligned} \tag{5.20}$$

donde

$$\begin{aligned} R_q(x,y) = \frac{\partial^q}{\partial x^q}&\left[(G_{q,0}(x,y) - G_{q,0}(0,y) + A_q(x))\chi_X(x,y)\right] \\ &- \sum_{i=0}^{q-2} \frac{\partial^q}{\partial x^{i+1}\partial y^{q-i-1}}\left[G_{i+1,q-i-1}(0,y)\chi_X(x,y)\right] \\ &+ \frac{\partial^q}{\partial y^q}[C_q(y)\chi_X(x,y)], \end{aligned} \tag{5.21}$$

$\{A_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *es la familia de primitivas periódicas de orden* n *de* $A_0(x)$,

$\{C_n(y)\}_{n=0}^{\infty}$ *es la familia de primitivas periódicas de orden* n *de* $C_0(y)$,

$\{G_{k,j}(x,y)\}_{k,j=0}^{\infty}$ *es la familia de primitivas periódicas de*

$$G_{0,0}(x,y) = G(x,y) - A_0(x) - C_0(y) - c$$

y donde

$$\alpha_j = A_{j+1}(0), \quad \beta_j = C_{j+1}(0), \quad \gamma_{i,j} = G_{i+1,j+1}(0,0), \tag{5.22}$$

son constantes. □

Y evaluando en una función de prueba $\phi(x,y)$ se obtiene la fórmula de Euler–Maclaurin de orden q.

Teorema 2. *Bajo las hipótesis del Teorema 1, si* $\phi \in C^q([N,M] \times [P,Q])$ *entonces*

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=N}^{M-1}\sum_{j=P}^{Q-1}\langle g(x-k,y-j),\phi(x,y)\rangle = c\int_N^M\int_P^Q \phi(x,y)dy\,dx\\
&+\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\alpha_j\int_P^Q\left(\frac{\partial^j\phi}{\partial x^j}(M,y)-\frac{\partial^j\phi}{\partial x^j}(N,y)\right)dy\\
&+\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\beta_j\int_N^M\left(\frac{\partial^j\phi}{\partial y^j}(x,Q)-\frac{\partial^j\phi}{\partial y^j}(x,P)\right)dx\\
&+\sum_{i=0}^{q-2}\sum_{j=0}^{q-2-i}(-1)^{i+j}\gamma_{i,j}\left(\frac{\partial^{i+j}\phi}{\partial x^i\partial y^j}(M,Q)-\frac{\partial^{i+j}\phi}{\partial x^i\partial y^j}(M,P)\right.\\
&\left.-\frac{\partial^{i+j}\phi}{\partial x^i\partial y^j}(N,Q)+\frac{\partial^{i+j}\phi}{\partial x^i\partial y^j}(N,P)\right)+R_q,
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

donde el resto $R_q = R_q(\phi)$ viene dado por

$$
\begin{aligned}
R_q = (-1)^q\int_N^M\int_P^Q\Bigg\{&(G_{q,0}(x,y)-G_{q,0}(0,y)+A_q(x))\frac{\partial^q\phi}{\partial x^q}\\
&-\sum_{i=0}^{q-2}G_{i+1,q-i-1}(0,y)\frac{\partial^q\phi}{\partial x^{i+1}\partial y^{q-i-1}}\\
&+C_q(y)\frac{\partial^q\phi}{\partial y^q}\ \Bigg\}\,dy\,dx,
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

para q mayor o igual al orden de $g(x,y)$. □

Es interesante observar que la fórmula de Euler–Maclaurin con resto, (5.20) o (5.23), se puede obtener también calculando otras derivadas distribucionales, a saber, $\frac{\partial^q}{\partial x^i\partial y^{q-i}}[G_{i,q-i}(x,y)\chi_X(x,y)]$. El resultado que se obtiene es naturalmente el mismo, excepto que el resto se expresa de una manera equivalente. Por ejemplo, si se trabaja con $\frac{\partial}{\partial y}[G_{0,1}(x,y)\chi_X(x,y)]$, el resto en (5.11) se convierte en

$$
\begin{aligned}
R_1(x,y) = &\frac{\partial}{\partial x}[A_1(x)\chi_X(x,y)]\\
&+\frac{\partial}{\partial y}[(G_{0,1}(x,y)-G_{0,1}(x,0)+C_0(y))\chi_X(x,y)],
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

que no es difícil ver que es equivalente a (5.12).

6 Otras fórmulas para los coeficientes

La fórmula distribucional de Euler–Maclaurin dada en el Teorema 2 es válida para todas las funciones de prueba ϕ. Especializando la función ϕ , sin embargo, es posible reconocer casos cuando la fórmula adquiere un aspecto más sencillo. Esto nos permitirá obtener representaciones alternativas para los coeficientes α_j, β_j y $\gamma_{i,j}$ de la fórmula de Euler–Maclaurin (5.23).

Comencemos con el caso en el que ϕ es un polinomio. Sea p su grado total. Entonces las derivadas de ϕ de orden mayor que p se anulan y, así, si se usa la fórmula de sumación de orden $q > p$ el resto se anulará y la fórmula aproximada se volverá exacta. Es decir

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=N}^{M-1}\sum_{j=P}^{Q-1}\langle g(x-k,y-j),\phi(x,y)\rangle = c\int_N^M\int_P^Q \phi(x,y)dy\,dx \\
&+\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\alpha_j\int_P^Q\left(\frac{\partial^j\phi}{\partial x^j}(M,y)-\frac{\partial^j\phi}{\partial x^j}(N,y)\right)dy \\
&+\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\beta_j\int_N^M\left(\frac{\partial^j\phi}{\partial y^j}(x,Q)-\frac{\partial^j\phi}{\partial y^j}(x,P)\right)dx \\
&+\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{p-1-i}(-1)^{i+j}\gamma_{i,j}\left(\frac{\partial^{i+j}\phi}{\partial x^i\partial y^j}(M,Q)-\frac{\partial^{i+j}\phi}{\partial x^i\partial y^j}(M,P)\right. \\
&\left.-\frac{\partial^{i+j}\phi}{\partial x^i\partial y^j}(N,Q)+\frac{\partial^{i+j}\phi}{\partial x^i\partial y^j}(N,P)\right).
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Obsérvese que aun cuando las derivadas de orden p de un polinomio de grado total p no tienen por qué anularse, la fórmula contiene tan solo derivadas hasta el orden $p-1$. La razón es que las derivadas de orden p, aunque no se anulen, son funciones constantes y la evaluación $\psi(M,Q)-\psi(M,P)-\psi(N,Q)+\psi(N,P)$ en los vértices del rectángulo $[N,M]\times[P,Q]$ se anula si ψ es una función constante.

Una fórmula aun más sencilla se obtiene si el polinomio ϕ se escoge de manera que todos excepto uno de los términos del lado derecho de (6.1) se anulen. Para obtener una fórmula aun más sencilla tomaremos $N=P=0$ y $M=Q=1$, de modo que el miembro izquierdo de (6.1) se reduce a $\langle g(x,y),\phi(x,y)\rangle$. Tomando $\phi(x,y)=1$ obtenemos

$$\langle g(x,y),\phi(x,y)\rangle = c. \tag{6.2}$$

Más generalmente, tomando $\phi(x,y) = B_{j+1}(x)B_0(y)$, donde los $B_j(x)$ son los polinomios de Bernoulli [5, capítulo 1], i.e., $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = x - 1/2$, $B_2(x) = x^2 - x + 1/6$, $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$, etc., obtenemos

$$\langle g(x,y), B_{j+1}(x)B_0(y)\rangle = (-1)^j (j+1)!\alpha_j, \tag{6.3}$$

pues las propiedades de los polinomios de Bernoulli, a saber,

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{6.4}$$

$$\int_0^1 B_n(x)dx = 0, \quad n \geq 1, \tag{6.5}$$

implican que si $\phi(x,y) = B_{j+1}(x)B_0(y)$ entonces todos los términos de la identidad (6.1) con la salvedad del término

$$(-1)^j \alpha_j \int_0^1 (\frac{\partial^j \phi}{\partial x^j}(1,y) - \frac{\partial^j \phi}{\partial x^j}(0,y))dy = (-1)^j \alpha_j (j+1)!$$

se anulan.

En realidad, (6.3) nos da una representación alternativa de los coeficientes de la expansión de Euler–Maclaurin, es decir,

$$\alpha_j = \frac{(-1)^j}{(j+1)!}\langle g(x,y), B_{j+1}(x)B_0(y)\rangle. \tag{6.6}$$

De manera similar, obtenemos

$$\beta_j = \frac{(-1)^j}{(j+1)!}\langle g(x,y), B_0(x)B_{j+1}(y)\rangle, \tag{6.7}$$

en tanto que

$$\gamma_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j}}{(i+1)!(j+1)!}\langle g(x,y), B_{i+1}(x)B_{j+1}(y)\rangle. \tag{6.8}$$

Otro caso particular interesante de la fórmula de Euler–Maclaurin se obtiene cuando ϕ es una función periódica de periodo $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $\phi(x+k, y+j) = \phi(x,y)$, $k,\ j \in \mathbb{Z}$. Este caso ilustra los límites de la aplicación de la fórmula y es útil para algunos contraejemplos. La cuestión es que si ϕ es periódica de periodo

$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ entonces todos los términos de la fórmula excepto el primero se anulan; así,

$$\sum_{k=N}^{M-1}\sum_{j=P}^{Q-1}\langle g(x-k,y-j),\phi(x,y)\rangle = c\int_N^M\int_P^Q \phi(x,y)dx\,dy + R_q(\phi), \quad (6.9)$$

para cualquier q. Más aun, si la integral doble se anula se obtiene que $\sum_{k=N}^{M-1}\sum_{j=P}^{Q-1}\langle g(x-k,y-j),\phi(x,y)\rangle$ se reduce a $R_q(\phi)$ para todo q.

7 La fórmula clásica

En esta sección veremos como nuestra fórmula distribucional permite obtener la fórmula de Euler–Maclaurin para la suma

$$\sum_{k=N}^{M-1}\sum_{j=P}^{Q-1}\phi(k,j). \quad (7.1)$$

Esta fórmula corresponde al caso $g(x,y)=\delta(x)\delta(y)$; sin embargo, el Teorema 2 no se aplica a esta distribución pues $\delta(x)\delta(y)$ no es integrable en la frontera del cuadrado $[0,1]^2$. Nuestro enfoque será entonces tomar $g(x,y)=\delta(x-\alpha)\delta(y-\beta)$, donde $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$ y luego tomar el límite cuando $\alpha\to 0^+$ y $\beta\to 0^+$.

Cuando $g(x,y)=\delta(x-\alpha)\delta(y-\beta)$ entonces su extensión periódica a $\mathbb{R}^2$ es dada por

$$G(x,y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\delta(x-\alpha-k)\delta(y-\beta-j). \quad (7.2)$$

Las medias parciales vienen dadas por

$$A(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-\alpha-k), \quad (7.3)$$

y

$$C(y)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\delta(y-\beta-j). \quad (7.4)$$

Las medias de $A(x)$ y de $C(y)$ son iguales a 1. Así,

$$A_0(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - \alpha - k) - 1, \tag{7.5}$$

en tanto que

$$A_n(x) = -\frac{B_n(\{x-\alpha\})}{n!}, \quad n \geq 1, \tag{7.6}$$

donde $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ es la parte fraccionaria del número x y los B_n son los polinomios de Bernoulli.

Similarmente,

$$C_0(y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(y - \beta - j) - 1, \tag{7.7}$$

$$C_n(y) = -\frac{B_n(\{y-\beta\})}{n!}, \quad n \geq 1. \tag{7.8}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} G_{0,0}(x,y) = &\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x-\alpha-k)\delta(y-\beta-j) \\ &- \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-\alpha-k) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(y-\beta-j) + 1, \end{aligned} \tag{7.9}$$

de modo que

$$G_{n,m}(x,y) = \frac{B_n(\{x-\alpha\})B_m(\{y-\beta\})}{n!m!}, \quad n \geq 1,\ m \geq 1. \tag{7.10}$$

Los coeficientes de la expansión de Euler–Maclaurin se pueden obtener de (5.22) como

$$\alpha_j = A_{j+1}(0) = -\frac{B_{j+1}(1-\alpha)}{(j+1)!}, \tag{7.11}$$

$$\beta_j = C_{j+1}(0) = -\frac{B_{j+1}(1-\beta)}{(j+1)!}, \tag{7.12}$$

$$\gamma_{i,j} = G_{i+1,j+1}(0,0) = -\frac{B_{i+1}(1-\alpha)B_{j+1}(1-\beta)}{(i+1)!(j+1)!}. \tag{7.13}$$

También pudimos haber usado (6.6), (6.7) y (6.8). Por ejemplo, (6.6) da

$$\alpha_j = \frac{(-1)^j}{(j+1)!}\langle\delta(x-\alpha)\delta(y-\beta), B_{j+1}(x)B_0(y)\rangle = \frac{(-1)^j}{(j+1)!}B_{j+1}(\alpha),$$

que coinciden con (7.11) pues los polinomios de Bernoulli satisfacen la propiedad

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x). \tag{7.14}$$

Obtenemos así la expansión

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N}^{M-1}\sum_{j=P}^{Q-1}\phi(k+\alpha, j+\beta) &= \int_N^M\int_P^Q \phi(x,y)dy\,dx \\
&+ \sum_{j=0}^{q-1}\frac{(-1)^{j+1}B_{j+1}(1-\alpha)}{(j+1)!}\int_P^Q\left(\frac{\partial^j\phi}{\partial x^j}(M,y) - \frac{\partial^j\phi}{\partial x^j}(N,y)\right)dy \\
&+ \sum_{j=0}^{q-1}\frac{(-1)^{j}B_{j+1}(1-\beta)}{(j+1)!}\int_N^M\left(\frac{\partial^j\phi}{\partial y^j}(x,Q) - \frac{\partial^j\phi}{\partial y^j}(x,P)\right)dx \\
&+ \sum_{i=0}^{q-2}\sum_{j=0}^{q-2-i}\frac{(-1)^{i+j}B_{i+1}(1-\alpha)B_{j+1}(1-\beta)}{(i+1)!(j+1)!}\left(\frac{\partial^{i+j}\phi}{\partial x^i\partial y^j}(M,Q)\right. \\
&\left.-\frac{\partial^{i+j}\phi}{\partial x^i\partial y^j}(M,P) - \frac{\partial^{i+j}\phi}{\partial x^i\partial y^j}(N,Q) + \frac{\partial^{i+j}\phi}{\partial x^i\partial y^j}(N,P)\right) \\
&+ R_q,
\end{aligned} \tag{7.15}$$

donde el resto $R_q = R_q(\phi)$ viene dado por

$$\begin{aligned}
R_q &= \\
&(-1)^q\left[\int_N^M\int_P^Q\frac{B_q(1-\alpha)-B_q(\{x-\alpha\})}{q!}\sum_{j=P}^{Q-1}\frac{\partial^q\phi}{\partial x^q}(x,\beta+j)dx\right. \\
&-\int_N^M\int_P^Q\frac{B_q(\{x-\alpha\})}{q!}\frac{\partial^q\phi(x,y)}{\partial x^q}dy\,dx \\
&-\sum_{i=0}^{q-1}\int_N^M\int_P^Q\frac{B_{i+1}(1-\alpha)B_{q-i-1}(\{y-\beta\})}{(i+1)!(q-i-1)!}\frac{\partial^q\phi(x,y)}{\partial x^{i+1}\partial y^{q-i-1}}dy\,dx \\
&\left.-\int_N^M\int_P^Q\frac{B_q(\{y-\beta\})}{q!}\frac{\partial^q\phi(x,y)}{\partial y^q}dy\,dx\right],
\end{aligned} \tag{7.16}$$

como se sigue de (5.24) al usar (7.9), (7.10) y la fórmula

$$G_{q,0}(x,y) = -\frac{B_q(\{x-\alpha\})}{q!}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\delta(y-\beta-j)-1\right). \tag{7.17}$$

Ahora podemos hacer $\alpha \to 0^+$ y $\beta \to 0^+$. Nótese que esto produce términos que contienen la expresión $B_{j+1}(1)$; éstos se pueden simplificar observando que $B_n(1) = B_n = B_n(0)$, $n \geq 2$, donde B_n son los números de Bernoulli: $B_2 = 1/6,\ B_4 = -1/30,\ B_6 = 1/42, \ldots, 0 = B_3 = B_5 = B_7 = \ldots$. El único número de Bernoulli de índice impar que no se anula es $B_1 = -1/2$ y para este índice se tiene $B_1(1) = -B_1 = 1/2$. Así, haciendo $q = 2p$ (7.15) se convierte en la fórmula

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=N}^{M-1}\sum_{j=P}^{Q-1}\phi(k,j) = \int_N^M\int_P^Q \phi(x,y)dy\,dx - \frac{1}{2}\int_P^Q(\phi(M,y)-\phi(N,y))dy\\
&+\sum_{k=1}^{p}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\int_P^Q\left(\frac{\partial^{2k}\phi}{\partial x^{2k}}(M,y)-\frac{\partial^{2k}\phi}{\partial x^{2k}}(N,y)\right)dy\\
&-\frac{1}{2}\int_N^M(\phi(x,Q)-\phi(x,P))dx\\
&+\sum_{k=1}^{p}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\int_N^M\left(\frac{\partial^{2k}\phi}{\partial y^{2k}}(x,Q)-\frac{\partial^{2k}\phi}{\partial y^{2k}}(x,P)\right)dx\\
&+\frac{1}{4}(\phi(M,Q)-\phi(M,P)-\phi(N,Q)+\phi(N,P))\\
&-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(\frac{\partial^{2k}\phi}{\partial x^{2k}}(M,Q)-\frac{\partial^{2k}\phi}{\partial x^{2k}}(M,P)-\frac{\partial^{2k}\phi}{\partial x^{2k}}(N,Q)+\frac{\partial^{2k}\phi}{\partial x^{2k}}(N,P)\right)\\
&-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!}\left(\frac{\partial^{2n}\phi}{\partial y^{2n}}(M,Q)-\frac{\partial^{2n}\phi}{\partial y^{2n}}(M,P)-\frac{\partial^{2n}\phi}{\partial y^{2n}}(N,Q)+\frac{\partial^{2n}\phi}{\partial y^{2n}}(N,P)\right)\\
&+\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{n=1}^{p-1-k}\frac{B_{2k}B_{2n}}{(2k!)(2n)!}\left(\frac{\partial^{2n+2k}\phi}{\partial x^{2k}\partial y^{2n}}(M,Q)\right.\\
&\left.-\frac{\partial^{2n+2k}\phi}{\partial x^{2k}\partial y^{2n}}(M,P)-\frac{\partial^{2n+2k}\phi}{\partial x^{2k}\partial y^{2n}}(N,Q)+\frac{\partial^{2n+2k}\phi}{\partial x^{2k}\partial y^{2n}}(N,P)\right)+R_{2p},
\end{aligned} \tag{7.18}$$

donde $R_{2p} = R_q$ viene dado por (7.15) con $\alpha = \beta = 0$.

Referencias

1. Estrada, R. *On the Euler–Maclaurin Formula.* Bol. Soc. Mat. Mexicana **3**(1997), 117–133.

2. Estrada, R. *The Cesàro behavior of distributions*, Proc. Roy. Soc. London A, en prensa.

3. Estrada, R., Gracia–Bondía, J.M. y Várilly, J.C. *On summability of distributions and spectral geometry*, Commun. Math. Phys. **191**(1998), 219–248.

4. Estrada, R. y Kanwal, R. P. *Higher order fundamental forms of a surface and their applications to wave propagation and distributional derivatives*, Rend. Cir. Mat. Palermo **36**(1987), 27–62.

5. Estrada, R. y Kanwal, R.P. *Asymptotic Analysis: a distributional approach*, Boston, Birkhäuser, 1994.

6. Kanwal, R. P. *Generalized Functions: theory and technique*, 2ª edición, Birkhäuser, Boston, 1997.

7. Lyness, J. N. *An Error Functional Expansion for N–Dimensional Quadrature with an Integrand Function Singular at a Point*, Math. of Comp. **30**(1976), 1–23.

8. Lyness, J. N. y Cools, Ronald. *A Survey of Numerical Cubature over Triangles*, Proc. Symposia Appl. Math. **48**(1994), 127–150.

9. Ninham, B. W. *Generalized functions and divergent integrals*, Num. Math. **8**(1966), 444–457.

10. Schwartz, L. *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1966.