

Métodos de Alta Resolución para la Ecuación de Buckley-Leverett

High Resolution Methods for the Buckley-Leverett Equation

Juan M. Guevara-Jordán (jguevara@euler.ciens.ucv.ve)
Mauricio Bermúdez Cella (mbermude@euler.ciens.ucv.ve)

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

Resumen

Este artículo muestra una aplicación de los métodos de alta resolución para aproximar numéricamente la solución de la ecuación de Buckley-Leverett. Los ejemplos analizados en este trabajo dan evidencia de que los métodos de alta resolución tienen una tasa de convergencia óptima y reducen el efecto de difusión numérica producido por los métodos tradicionales para resolver leyes de conservación. Consecuentemente ellos son uno de los mejores métodos existentes para simular los problemas de flujo de fluidos en yacimientos petrolíferos.

Palabras y frases clave: alta resolución, problema de Riemann, limitador de flujo, ley de Darcy, onda de choque, onda de rarefacción.

Abstract

This article shows an application of high resolution methods to the numerical solution of the Buckley-Leverett equation in one and two dimensional spaces with an unitary mobility ratio. Test problems, analyzed in this work, give evidence that the high resolution methods have an optimum convergence rate and that they reduce the numerical diffusion effects produced by traditional numerical schemes for conservation laws. Consequently they are among the best methods available to simulate fluid flow problems in oil reservoirs.

Key words and phrases: high resolution, Riemann's problem, flux limiter, Darcy's law, shock wave, rarefaction wave.

Recibido 1998/09/25. Aceptado 1999/02/07.

MSC (1991): Primary 35L65, 35L67; Secondary 76S05, 76T05.

1 Introducción

Algunas veces la fase de producción primaria en un yacimiento petrolífero, basada únicamente en su presión interna, finaliza rápidamente dejando un porcentaje muy alto de hidrocarburos en el subsuelo. Por este motivo se han desarrollado un conjunto de técnicas denominadas *métodos de recobro secundario* [1], que permiten extraer una porción considerable del petróleo remanente en el yacimiento después que la etapa de producción primaria ha concluido. Entre las muchas técnicas de recobro secundario existentes los métodos de inyección de agua, mejor conocidos como “waterflood” [1], fueron de los primeros desarrollados en la industria petrolera y serán los únicos que consideraremos en este trabajo. La idea básica de esta técnica consiste en inyectar agua dentro del yacimiento usando pozos, que llamaremos inyectores, de tal manera que el agua desplace o empuje parte del petróleo que aun permanece en el yacimiento hacia los pozos productores. El modelo matemático del método de inyección de agua se basa en la ecuación de Buckley-Leverett [1], la cual es una ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden que puede ser escrita en forma de una ley de conservación [2, 3], bajo ciertas condiciones físicas. Como la ecuación de Buckley-Leverett es fuertemente no lineal entonces su solución desarrolla discontinuidades mejor conocidas como *ondas de choque* [2, 3, 4]. La aparición de estas discontinuidades en las soluciones hace que su aproximación por métodos numéricos comunes sea engorrosa y no satisfactoria [5]. Por este motivo se desarrollaron muchos esquemas numéricos para tratar de resolver este tipo de ecuaciones, ejemplos de ellos son los métodos de Godunov [6] y Lax-Wendroff [7], sin haber entre ellos ninguno que pudiera considerarse como el mejor. Por esta razón a lo largo de la década de los ochenta fueron desarrollados los llamados *métodos de alta resolución* [2] cuya aplicación a la ecuación de Buckley-Leverett es el objetivo del presente trabajo.

El resto de este artículo esta distribuído de la siguiente forma. En la próxima sección se establecerá explícitamente la ecuación de Buckley-Leverett y las condiciones físicas donde ella es válida. Seguidamente se dará una breve explicación de los métodos de alta resolución junto con una prueba de su convergencia en el caso en que la función de flujo fraccionario es lineal. Luego se describirá la solución del problema de Riemann [8] para la ecuación de Buckley-Leverett obteniéndose las soluciones analíticas en los casos aquí estudiados en una y dos dimensiones. Posteriormente se realizarán una serie de experimentos numéricos que permitirán hacer un análisis comparativo entre los métodos de alta resolución y los métodos tradicionales de Godunov y Lax-Wendroff. Finalmente se darán las conclusiones.

2 Ecuaciones

El sistema de ecuaciones que describe el proceso de inyección de agua en un yacimiento petrolífero, en el cual supondremos que solamente puede haber agua y petróleo, viene dado por las siguientes ecuaciones [8]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}f(S)) = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\vec{v}) = 0. \quad (2)$$

En este sistema de ecuaciones (1) es la ecuación de Buckley-Leverett, cuando los efectos de capilaridad son despreciables, y (2) es la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles. En ellas, S es la saturación del agua, f es la función de flujo fraccionario y \vec{v} es la velocidad total del fluido en un medio poroso. Esta última viene expresada por la ley de Darcy [1, 8]:

$$\vec{v} = -\nabla p \quad (3)$$

donde p es la presión adimensional. Las ecuaciones expuestas están dadas en forma adimensional [10, 11] para facilitar el análisis de sus características matemáticas. La función de flujo fraccionario tiene la siguiente forma [1, 8]:

$$f(S) = \frac{S^2}{S^2 + (1-S)^2}. \quad (4)$$

Esta función es representativa de yacimientos bidimensionales en los cuales los efectos gravitatorios son despreciables y donde la razón de movilidad es unitaria. El sistema de ecuaciones formado por (1) y (2) es generalmente no desacoplado. Sin embargo, en el caso aquí considerado, se puede asumir que está desacoplado, lo cual permitirá analizar por separado cada una de las ecuaciones que lo conforman. De esta manera las ecuaciones (2) y (3) forman una ecuación de Laplace, para la presión p , cuya solución será obtenida analíticamente. A partir de esta solución, usando la ley de Darcy, se evaluará la velocidad que aparece en la ecuación de Buckley-Leverett, que será resuelta mediante tres métodos numéricos diferentes: Godunov, Lax-Wendroff y alta resolución.

3 Métodos de Alta Resolución

Los métodos de alta resolución son esquemas numéricos especialmente diseñados para resolver leyes de conservación de tipo hiperbólico [2]. Para ello

se utilizan los métodos numéricos de primero y segundo orden previamente desarrollados, como los de Godunov y Lax-Wendroff respectivamente. Los esquemas de primer orden tienen la ventaja que permiten aproximar las soluciones de leyes de conservación sin oscilaciones alrededor de las discontinuidades. Sin embargo necesitan de una malla muy refinada para producir una solución aproximada que sea satisfactoria. Por otro lado los esquemas de segundo orden convergen a la solución buscada en una malla menos refinada, pero su carácter dispersivo hace que las soluciones obtenidas presenten severas oscilaciones alrededor de las ondas de choque o discontinuidades. Los métodos de alta resolución son esquemas numéricos que unifican en un solo algoritmo los métodos de primer y segundo orden, de tal manera que los de primer orden sean los que aproximen mejor la solución cerca de las discontinuidades, mientras que en las regiones suaves la solución sea aproximada por los métodos de segundo orden.

Formalmente los métodos de alta resolución son esquemas conservativos de la forma [2]:

$$S_i^{n+1} = S_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1,j}^n - F_{i,j-1}^n), \quad (5)$$

donde los flujos $F_{i+1,j}^n$ y $F_{i,j-1}^n$ vienen dados por:

$$F_{k+1,k}^n = F_b^n + (F_a^n - F_b^n) \phi. \quad (6)$$

En esta última expresión F_b^n es el flujo del esquema de primer orden, F_a^n es el flujo para el esquema de segundo orden y ϕ es la función limitadora o *limitador* que permite interpolar entre los dos flujos para obtener el esquema de alta resolución.

Para concretizar la formulación matemática en las expresiones (5) y (6) asumiremos que el flujo de primer orden corresponde al del método de Godunov y el de segundo orden al método de Lax-Wendroff. Esta escogencia se justifica por el hecho de que el paquete numérico *Clawpack* [12], con el cual hemos realizado este trabajo, basa su método de alta resolución en estos dos esquemas. Luego, sin pérdida de generalidad, tendremos que el flujo para el esquema de alta resolución asociado a la ecuación lineal escalar de advección es:

$$F_{k+1,k}^n = vS_k^n + \frac{1}{2}v \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) (S_{k+1}^n - S_k^n) \phi(\theta), \quad (7)$$

donde

$$\theta = \frac{S_k^n - S_{k-1}^n}{S_{k+1}^n - S_k^n} \quad (8)$$

y la función ϕ es el limitador “Superbee” [13], la cual se define como:

$$\phi(\theta) = \left(\frac{S_{j+1} - S_j}{h} \right) (\max(0, \min(1, 2\theta), \min(\theta, 2))), \quad (9)$$

donde h es la distancia entre los nodos de la malla. Se puede demostrar que cualquier limitador debe poseer las siguientes propiedades [2]: es acotado y en $\theta = 1$ es una función Lipschitz con $\phi(1) = 1$. Bajo estas condiciones es posible establecer la siguiente proposición.

Proposición 1. *El método numérico definido por las ecuaciones (5), (7), (8) y (9) es consistente y de segundo orden para la ecuación lineal escalar de advección.*

Demostración: En efecto, restando los métodos de alta resolución (AR) y Lax-Wendroff (LW) obtenemos:

$$\begin{aligned} AR - LW &= \frac{k}{2h} \lambda (1 - v) [(S_{i+1}^n - S_i^n) (\phi_i - 1) \\ &\quad - (S_i^n - S_{i-1}^n) (\phi_{i-1} - 1)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Por ser ϕ Lipschitz con $\phi(1) = 1$, se obtiene que:

$$|\phi_i - 1| \leq |K| \left| \frac{2S_i^n - S_{i+1}^n - S_{i-1}^n}{S_{i+1}^n - S_i^n} \right|$$

y

$$|\phi_{i-1} - 1| \leq |K| \left| \frac{S_i^n + S_{i+2}^n - 2S_{i-1}^n}{S_i^n - S_{i-1}^n} \right|.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (10) se deduce que:

$$\begin{aligned} |AR - LW| &\leq \frac{K_1}{h^2} [|2S_i^n - S_{i+1}^n - S_{i-1}^n| \\ &\quad + |S_i^n + S_{i+2}^n - 2S_{i-1}^n|] \end{aligned} \quad (11)$$

siendo K_1 una constante positiva. Por otro lado la discretización por diferencias centradas del Laplaciano es de segundo orden [5] y en consecuencia la última desigualdad implica que:

$$|AR - LW| \leq 2K_1 \cdot O(h^2).$$

Luego la convergencia cuadrática del método de Lax-Wendroff permite concluir que los esquemas de alta resolución son de segundo orden. \square

Para establecer la convergencia de los métodos de alta resolución es necesario introducir la noción de esquema TVD (Total Variation Diminishing) [2]. Un método numérico que satisface esta propiedad debe cumplir que cualquier sucesión de aproximaciones $\{S_k^n\}$ producidas por él están uniformemente acotadas en la norma del espacio de funciones de variación acotada. Como los esquemas de alta resolución son TVD [2] entonces el teorema de selección de Helly [14], el cual es un criterio de compacidad para las funciones de variación acotada, permite obtener una subsucesión de aproximaciones que converge a la solución real de la ley de conservación. Los detalles sobre los comentarios hechos en este párrafo están fuera del alcance y objetivos del presente artículo, sin embargo ellos pueden ser encontrados en las referencias [2, 3, 4] y en los trabajos allí citados.

Todo lo que se ha establecido sobre los métodos de alta resolución aplica solamente al caso de ecuaciones escalares unidimensionales. El encontrar la bases matemáticas de los esquemas de alta resolución en dos y tres dimensiones es un tópico de corriente interés en las áreas de análisis numérico y cómputo científico [2, 12]. En el caso del paquete *Clawpack* la extensión de los métodos de alta resolución a dos dimensiones se realiza mediante el método de paso fraccionario [2, 5, 12]. Para ello se utiliza la expresión general de un esquema conservativo en dos dimensiones

$$\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta t} = -(L_x + L_y) S_i^n, \quad (12)$$

donde

$$L_x = \frac{1}{\Delta x} (F_{i+1,j} - F_{i,j}), \quad (13)$$

$$L_y = \frac{1}{\Delta y} (G_{i,j+1} - G_{i,j}) \quad (14)$$

y las funciones $F_{i+1,j}$, $F_{i,j}$, $G_{i,j+1}$ y $G_{i,j}$ son los flujos unidimensionales de los métodos de alta resolución en la dirección de los ejes x e y . La Figura 1 describe gráficamente la posición de estos flujos. La expresión (12) solamente toma en cuenta los flujos normales por lo tanto ella es modificada ligeramente de la siguiente manera [12]:

$$S_i^{n+1} = (1 - \Delta t L_x) (1 - \Delta t L_y) S_i^n \quad (15)$$

que toma en consideración los flujos transversales, como se muestran en la Figura 2. La aplicación secuencial de los operadores $(1 - \Delta t L_x)$ y $(1 - \Delta t L_y)$ es lo que se llama *método de paso fraccionario*, que permite extender los

métodos de alta resolución unidimensionales a problemas bidimensionales. No existe ningún resultado riguroso sobre la convergencia de este esquema en el caso de la ecuación de Buckley-Leverett. Los experimentos numéricos que se analizan en este artículo sugieren que ellos deben ser convergentes.

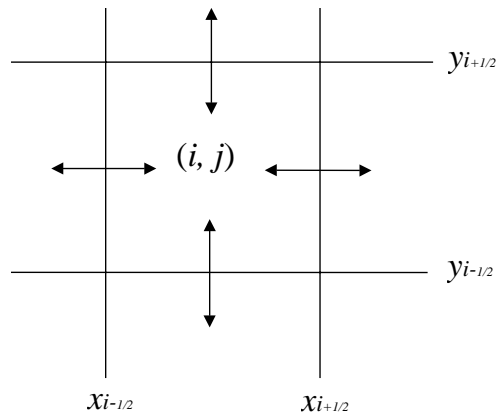


Figura 1. Flujos normales

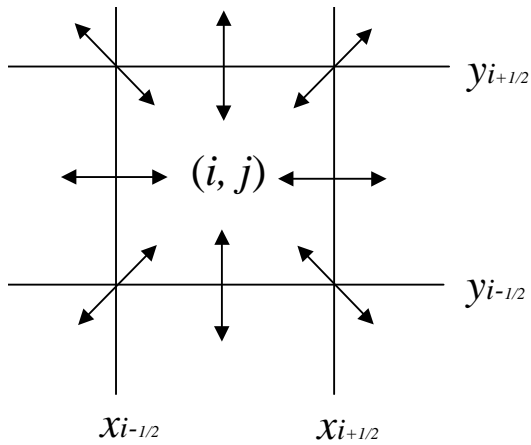


Figura 2. Flujos transversales y normales

4 Solución del Problema de Riemann

La ecuación de Buckley-Leverett es altamente no lineal debido a la forma de la función de flujo fraccionario. Por ello al evaluar el flujo F_b^n , correspondiente al esquema de Godunov, en (6) se hace necesario tener resuelto el problema de Riemann [2, 3, 4] para esta ecuación en el caso unidimensional. En una dimensión la incompresibilidad de los fluidos permite asumir que la velocidad v , en la ecuación de Buckley-Leverett, es constante. Por lo tanto se define el problema de Riemann para esta ecuación, sin pérdida de generalidad, como la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0,$$

$$S(x, 0) = \begin{cases} S_i, & \text{si } x < 0 \\ S_d, & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (16)$$

donde S_i y S_d son valores constantes de la saturación de agua que puede ser cualquier valor en el intervalo $[0, 1]$ y f es la función de flujo fraccionario (4). En [8] se establece explícitamente la solución de (16), cuyos aspectos más resaltantes los describiremos a continuación. De acuerdo con Oleinik [9] existe una única solución para este problema de valor inicial. Si la solución presenta ondas de choque o discontinuidades ellas deberán satisfacer la condición de Rankine Hugoniot

$$s = \frac{dx}{ds} = \frac{f(S_d) - f(S_i)}{S_d - S_i} \quad (17)$$

y la condición de entropía

$$f'(S_i) > s > f'(S_d). \quad (18)$$

Estas dos condiciones junto con el teorema de existencia y unicidad permiten reducir la solución del problema de Riemann (16) a dos casos:

CASO 1: Si la recta que conecta a los puntos $(S_i, f(S_i))$ y $(S_d, f(S_d))$ no interseca a la gráfica de f , entonces puede estar arriba o debajo de esta gráfica entre esos dos puntos. Si $f'(S_i) > f'(S_d)$, entonces la única solución posible para (16) debe presentar una onda de choque que separa las dos saturaciones constantes S_i y S_d como aparece en la Figura 3. Por otro lado, si $f'(S_i) < f'(S_d)$ entonces la condición de entropía no se cumple y la única solución posible es una onda de rarefacción tal como se muestra en la Figura 4.

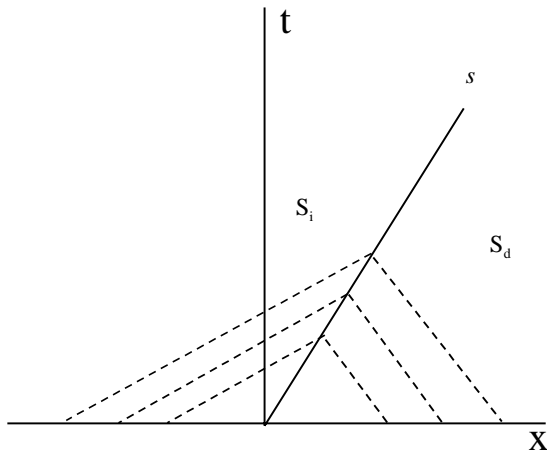
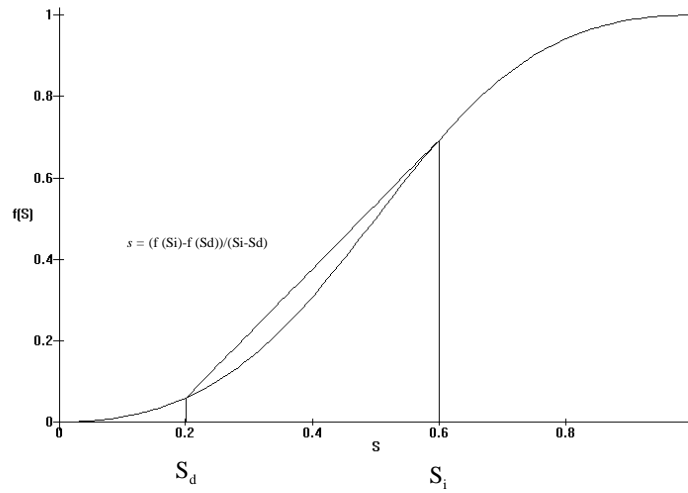
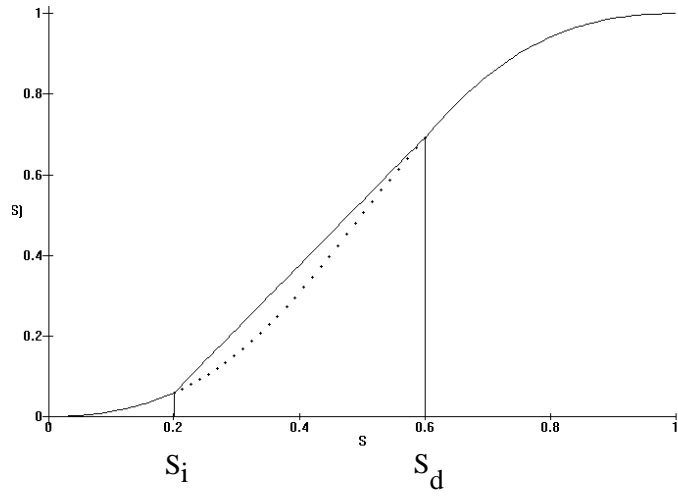


Figura 3. Solución al problema de Riemann, en el caso de onda de choque, representado por la condición de Rankine Hugoniot en la función de flujo fraccionario (a) y en plano de características xt (b).



(a)

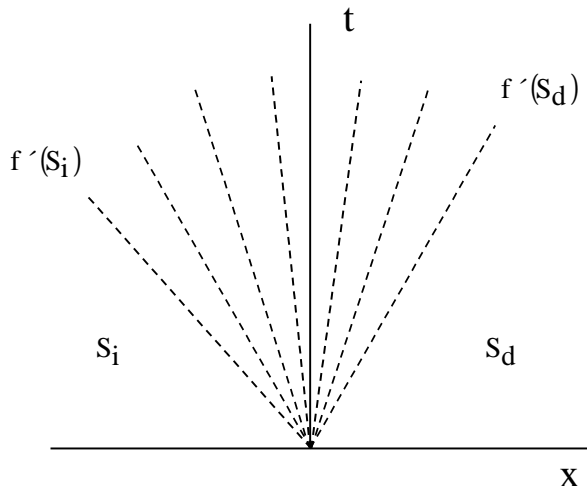


Figura 4. Solución al problema de Riemann, en el caso de onda de rarefacción, representado por la línea punteada en la función de flujo fraccionario (a) y en el plano de características xt (b).

CASO 2: Si la recta que conecta a los puntos $(S_i, f(S_i))$ y $(S_d, f(S_d))$ intersecta a la gráfica de f en un punto diferente a sus extremos entonces, cuando $S_i > S_d$, es posible hallar $S^* \in [S_d, S_i]$ tal que la línea recta que une a $(S_d, f(S_d))$ y $(S^*, f(S^*))$ es tangente a f en este último punto satisfaciendo la condición de entropía. La Figura 5 ilustra esta situación. Luego, la única solución al problema de Riemann (16) viene dada por una onda de rarefacción que une a S_i con S^* , seguida de una onda de choque que separa S^* de S_d . La Figura 6 describe esta situación. Si $S_i < S_d$ entonces el mismo análisis nos conduce a una solución similar.

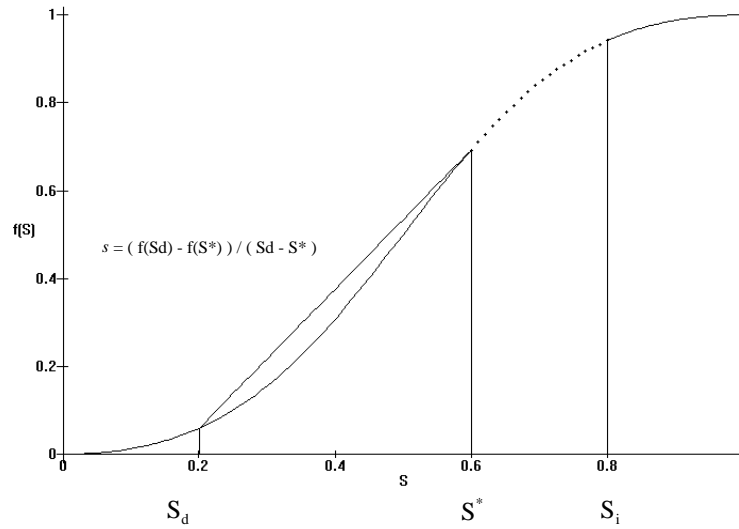


Figura 5. Solución al problema de Riemann en el caso de onda de choque y rarefacción simultáneas, representadas por las líneas recta y punteada respectivamente en la función de flujo fraccionario.

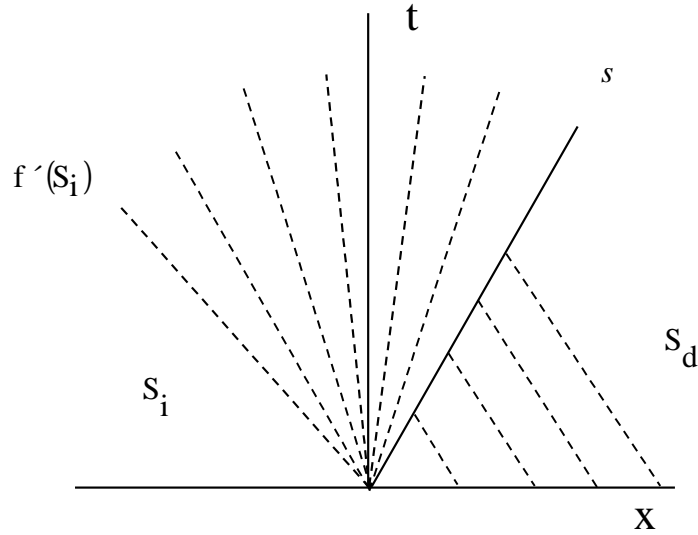


Figura 6. Solución al problema de Riemann, en el caso de onda de choque y rarefacción simultáneas, representadas en el plano de características xt .

5 Solución Analítica en 2D

Para validar la solución numérica producida por los métodos de alta resolución se desarrollaron las soluciones analíticas para la ecuación de Buckley-Leverett en una y dos dimensiones, utilizando para ello la solución al problema de Riemann. En el caso unidimensional la solución analítica es sencillamente la expuesta en la sección precedente. En el caso bidimensional se utilizó un cambio de variables de coordenadas cartesianas x e y a coordenadas curvilíneas determinadas por las líneas de flujo y potenciales Φ - Ψ , mostradas en la Figura 7, dadas por las relaciones [15, 16]:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1 - \text{cn}^2 x \cdot \text{cn}^2 y}{\text{cn}^2 x + \text{cn}^2 y} \quad (19)$$

$$\Psi = \frac{1}{2\pi} \cdot \arctan \frac{\text{sn } y \cdot \text{dn } y \cdot \text{cn } x}{\text{sn } x \cdot \text{dn } x \cdot \text{cn } y} \quad (20)$$

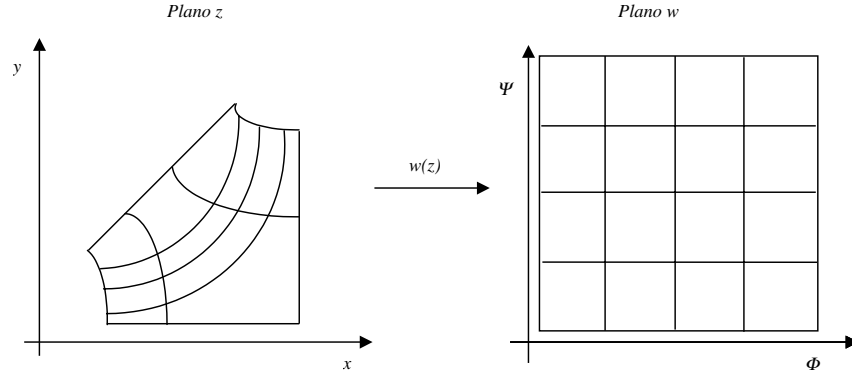


Figura 7. Transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas curvilíneas.

donde $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{sn} x$ y $\operatorname{dn} x$ son las funciones elípticas de Jacobi. Utilizando este cambio de variables y tomando en cuenta que la componente del gradiente a lo largo de las líneas equipotenciales es cero, $\partial_{\Psi} p = 0$, se puede probar que la ecuación de Buckley-Leverett (1) toma la siguiente forma [10]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + J(\Phi, \Psi) v \frac{\partial f(S)}{\partial \Phi} = 0, \quad (21)$$

donde $J(\Phi, \Psi)$ es el jacobiano y v es la magnitud de la velocidad a lo largo de las líneas de flujo. Esta ecuación es unidimensional, pero el jacobiano y la velocidad no son constantes. Sin embargo, mediante la sustitución:

$$\xi(\Phi, \Psi) = \int_{\Phi} \frac{d\sigma}{vJ(\Phi, \Psi)} \quad (22)$$

esta ecuación se transforma en (16), en coordenadas t - ξ , la cual puede ser resuelta analíticamente a lo largo de cada línea de flujo. Uniendo estas soluciones analíticas se obtiene la solución al problema de Riemann para la ecuación de Buckley-Leverett en dos dimensiones.

La obtención de la solución analítica solamente es posible cuando se conoce la velocidad v que aparece en la ecuación de Buckley-Leverett. Esta velocidad

se calcula a partir de la solución analítica, usando el método de las imágenes, de la ecuación elíptica:

$$\Delta p = \delta(\text{pozo inyector}) - \delta(\text{pozo productor}) \quad (23)$$

con condiciones de flujo nulas en los bordes y siendo δ la función delta de Dirac [17].

6 Resultados

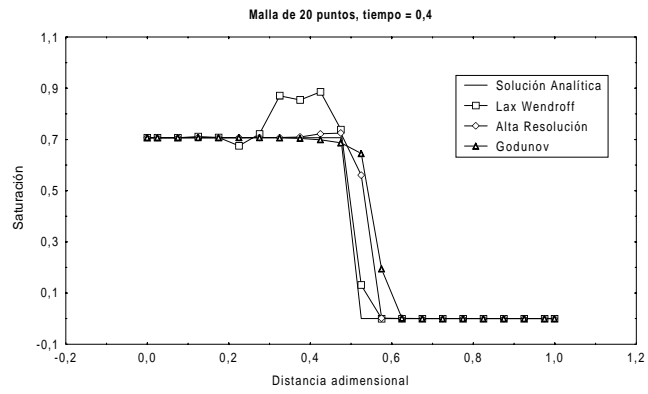
En la aplicación de los métodos de alta resolución a la ecuación de Buckley-Leverett consideraremos tres casos que serán analizados por separado en una [10] y dos dimensiones [11].

6.1 Ejemplos unidimensionales

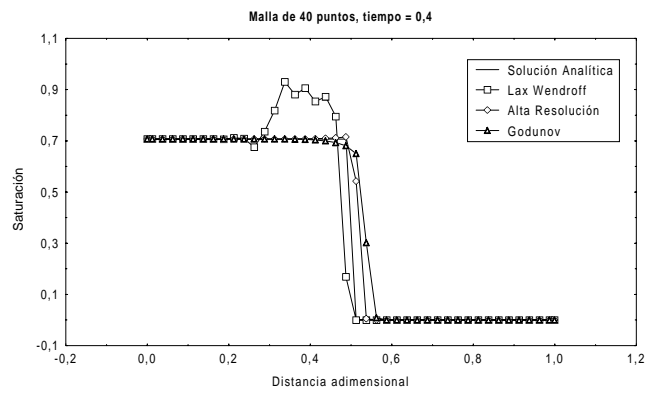
Caso 1-1D: Se considerará la solución de la ecuación de Buckley-Leverett en el intervalo unitario en espacio para la siguiente condición inicial:

$$S(x, 0) = \begin{cases} \sqrt{2}/2, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

Los resultados numéricos para este problema de valor inicial en el tiempo $t = 0.42$ se muestran en la Figura 8, donde se puede apreciar que la solución analítica solamente tiene una onda de choque y es constante a ambos lados de esta discontinuidad. También se muestran las soluciones numéricas obtenidas con los tres métodos considerados en este artículo, observándose que la solución calculada por el método de alta resolución es la que mejor se aproxima a la solución analítica en ambas mallas. Puede verse también que la mejora del método de alta resolución con respecto al de Godunov es relativamente pequeña, mientras que ella es considerablemente grande en relación al método de Lax-Wendroff. Debido a la simplicidad de la solución analítica, en este caso, es posible obtener el orden de convergencia de los métodos numéricos utilizados como aparecen en la Figura 9. En esta gráfica se puede apreciar que el orden de convergencia de los métodos de alta resolución es óptimo para el caso de soluciones con ondas de choque o discontinuidades.



(a)



(b)

Figura 8. Solución numérica para el Caso 1-1D sobre una malla de 20 puntos (a) y 40 puntos (b).

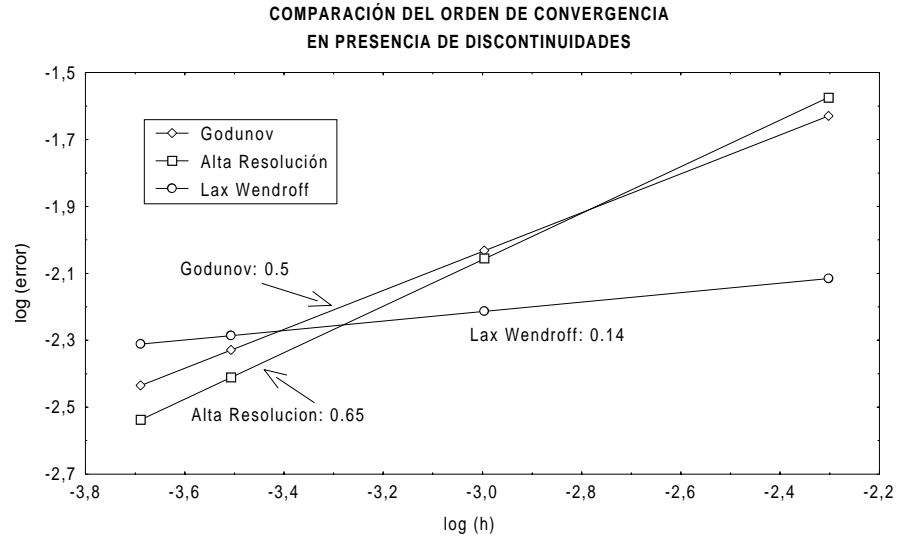
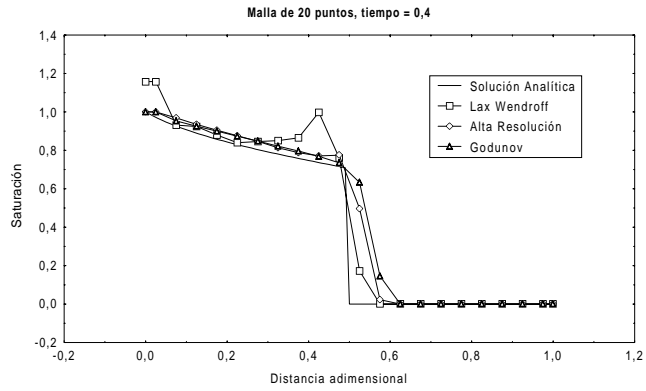


Figura 9. Comparación de los órdenes de convergencia en norma cuadrática.

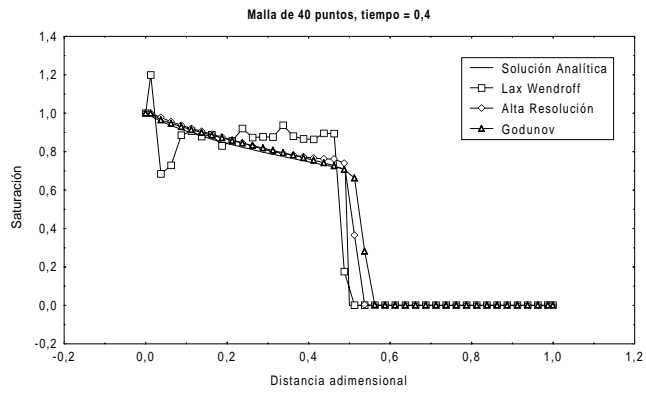
Caso 2-1D: Se tomará el problema de Riemann de condición inicial:

$$S(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Esto produce la bien conocida solución de Welge [1] que consta de onda de choque y rarefacción. Estas últimas representadas por valores no constantes a la izquierda de la onda de choque, lo cual se muestra en la Figura 10. Igualmente puede apreciarse la mejora que representa el método de alta resolución en relación a los esquemas de Godunov y Lax-Wendroff. Los órdenes de convergencia observados en este caso son los mismos que se mostraron en la Figura 9.



(a)



(b)

Figura 10. Solución numérica para el Caso 2-1D sobre una malla de 20 puntos (a) y 40 puntos (b).

Caso 3-1D: En este caso se resuelve un problema de valor inicial, tomado de un problema de campo [1], para la ecuación de Buckley-Leverett donde el dato inicial, es decir, la saturación de agua inicial en el yacimiento viene dada por la función continua

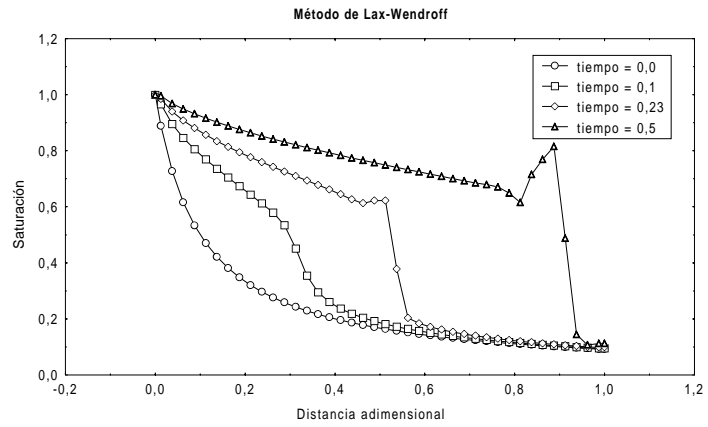
$$S(x, 0) = \frac{0.1}{0.1 + x^2}.$$

En la Figura 11 se muestra la solución al problema planteado utilizando el método de Lax-Wendroff y el método de alta resolución. Debido a la aparición o desarrollo de una onda de choque se ve que el método de alta resolución es capaz de producir una solución físicamente correcta mientras que las oscilaciones producidas por el método de Lax-Wendroff distorsionan completamente la solución.

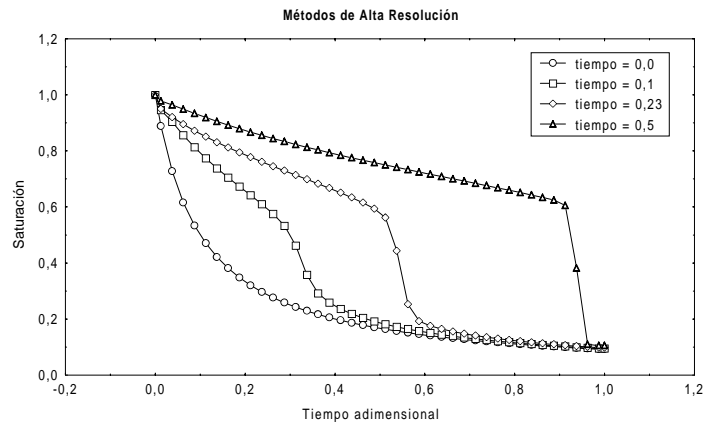
6.2 Ejemplos bidimensionales

Para resolver la ecuación de Buckley-Leverett en dos dimensiones, analíticamente, fué necesario usar una malla curvilínea determinada por (19) y (20). Esta malla coincide con la geometría de cinco puntos o “five-spot” que es muy usada en la simulación de yacimientos [18] para validar los resultados numéricos producidos por los simuladores, además de adaptarse fácilmente al uso de las aplicaciones conformes. La geometría de cinco puntos aparece al considerar un arreglo infinito de pozos inyectores y productores dispuestos alternadamente en un yacimiento horizontal. Este arreglo hace que alrededor de un pozo productor se sitúen cuatro pozos inyectores que forman los vértices de un cuadrado cuyo centro es el pozo productor. La malla curvilínea descrita anteriormente y la geometría de cinco puntos pueden ser observadas en la Figura 12. Esta malla será utilizada para calcular la solución analítica de la ecuación de Buckley-Leverett en dos dimensiones.

Para la solución numérica usamos varias mallas uniformes, paralelas a los ejes x e y , pero por razones de brevedad solamente se presentarán los resultados en la malla de mayor resolución, es decir, la de 40×40 . Al igual que en el ejemplo unidimensional, hemos clasificado los experimentos numéricos en tres casos, los cuales analizaremos a continuación.



(a)



(b)

Figura 11. Solución numérica para el Caso 3-1D utilizando los métodos de Lax Wendroff (a) y alta resolución (b).

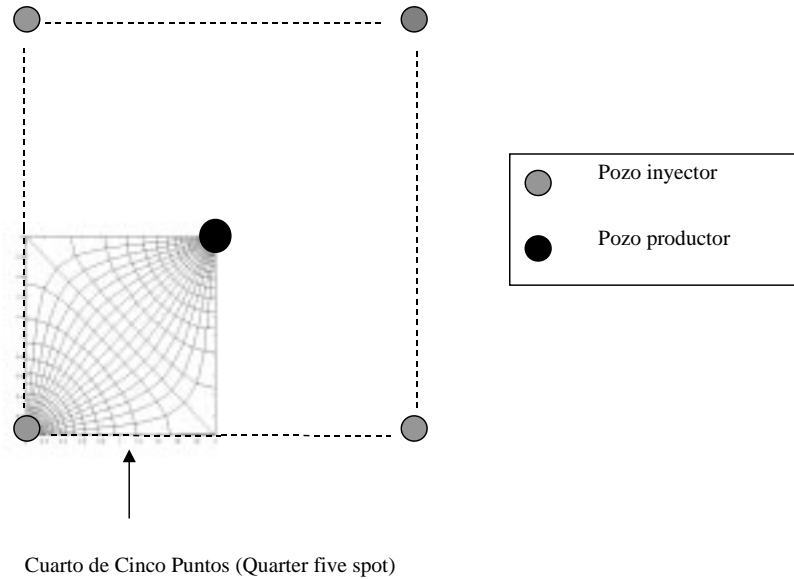


Figura 12. Geometría de un cuarto de cinco puntos, y malla utilizada para la solución analítica en dos dimensiones.

Caso 1-2D: Este ejemplo nos permite validar la solución numérica mediante una comparación directa con la solución analítica obtenida al resolver el problema de Riemann en dos dimensiones con condiciones iniciales:

$$S(x, y, 0) = \begin{cases} \sqrt{2}/2 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 0.1485 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 > 0.1485. \end{cases}$$

Con el objeto de establecer la comparación se graficó la posición del frente de agua determinada por las distintas soluciones en los tiempos adimensionales $t = 0, 2.8, 4.8, 8.4, 9.6$ y 12 . En el caso de los contornos de la solución numérica consideramos sólo los que representaban la mayor saturación de agua, despreciando los demás. En la Figura 13 el primer contorno corresponde a la condición inicial. También observamos que la solución numérica está

ligeramente más adelantada que la analítica y que la primera tiende a achataarse a medida que evoluciona el agua hacia el pozo productor. Esto se debe a los efectos de la dispersión numérica. Como se puede observar en la Figura 14 los métodos de alta resolución presentan un menor margen de dispersión numérica, con respecto al método de Godunov. El método de Lax-Wendroff, en este caso, resulta ineficiente puesto que las interfaces producidas por él no son físicamente correctas y presentan severas oscilaciones.

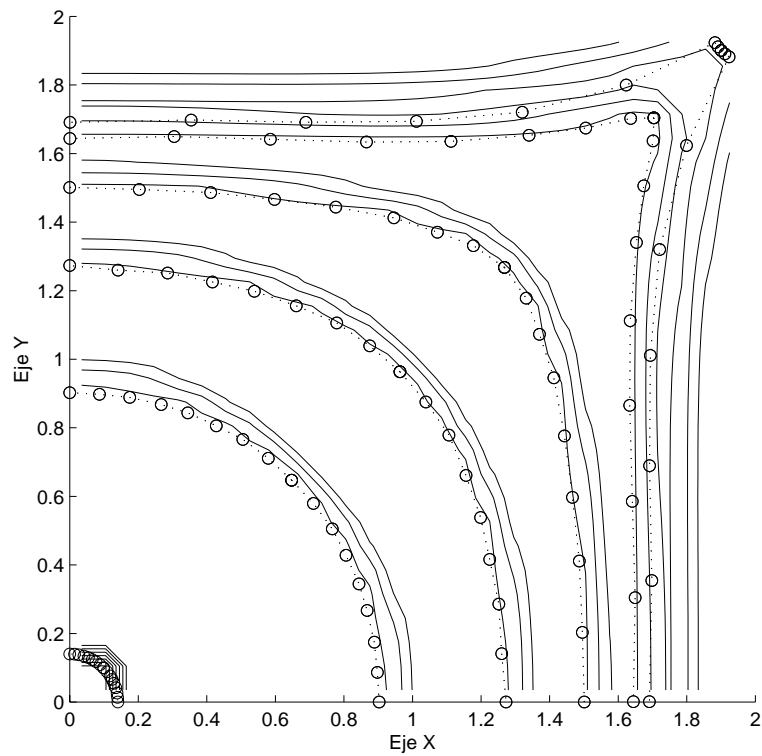


Figura 13. Comparación entre la solución analítica y numérica en dos dimensiones para el Caso 1-2D. La línea punteada con círculos representa la solución analítica.

Caso 2-2D: Para este caso consideraremos la solución numérica obtenida por los métodos de alta resolución y Lax-Wendroff para la ecuación de Buckley-

Leverett con la siguiente condición inicial:

$$S(x, y, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 0.1485 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 > 0.1485. \end{cases}$$

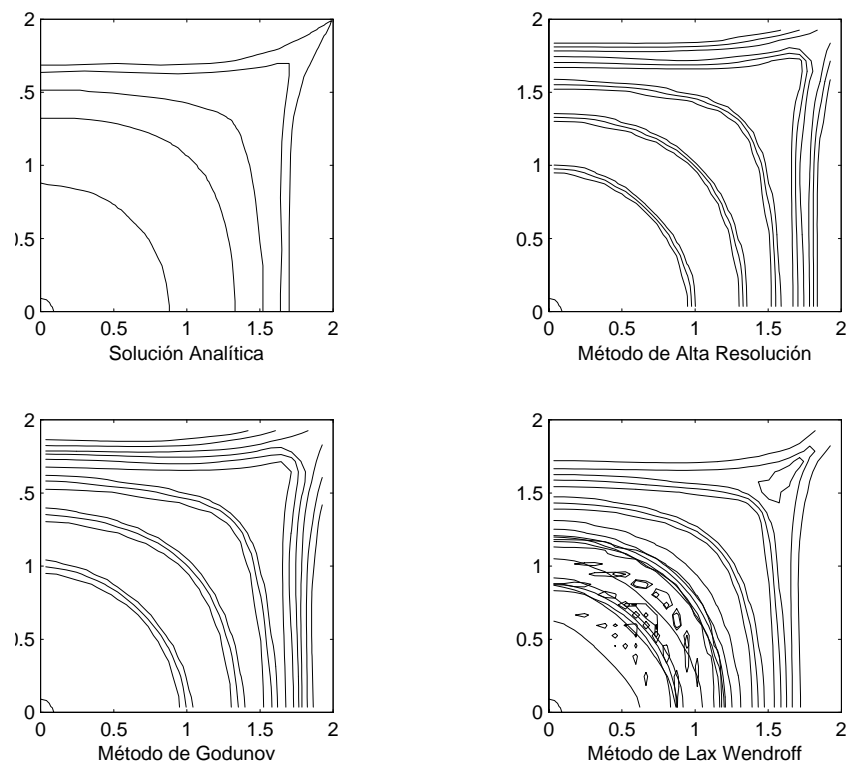


Figura 14. Soluciones analítica y numéricas obtenidas por los diferentes métodos para el Caso 1-2D.

Este problema es teóricamente interesante porque las soluciones obtenidas contienen ondas de choque y rarefacción, lo cual es una consecuencia directa

del carácter no convexo de la función de flujo fraccionario. Las soluciones encontradas por estos dos métodos pueden ser apreciadas en la Figura 15 para el tiempo adimensional $t = 7.2$. Son notables las oscilaciones producidas por el método de Lax-Wendroff, las cuales están ausentes en las soluciones calculadas por los métodos de alta resolución.

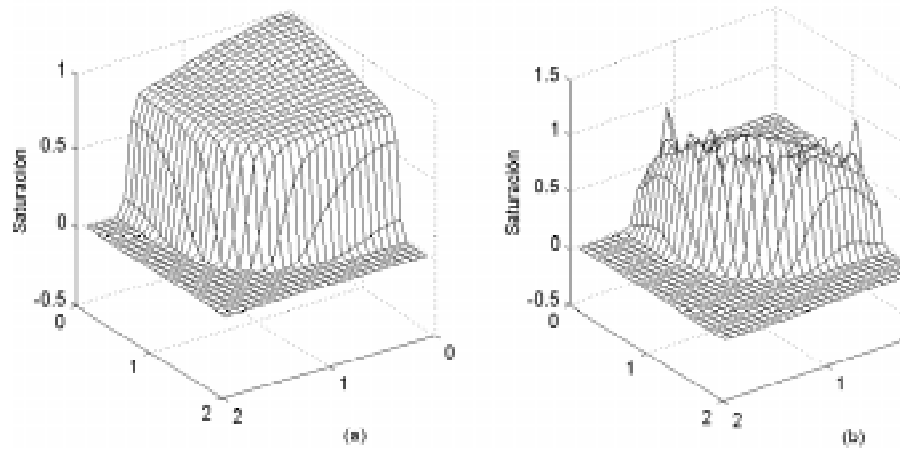


Figura 15. Solución numérica para el Caso 2-2D usando los métodos de alta resolución (a) y el método de Lax-Wendroff (b).

Caso 3-2D: Este caso es una adaptación de un problema de campo desarrollado en [1], en el cual la condición inicial es continua y viene dada por:

$$S(x, y, 0) = \frac{0.1}{0.1 + x^2 + y^2}.$$

La no linealidad de la ecuación de Buckley-Leverett genera una onda de choque y rarefacción a partir de ella. Esta característica de la solución permitirá mostrar de una manera elegante la ventaja de utilizar los métodos de alta resolución.

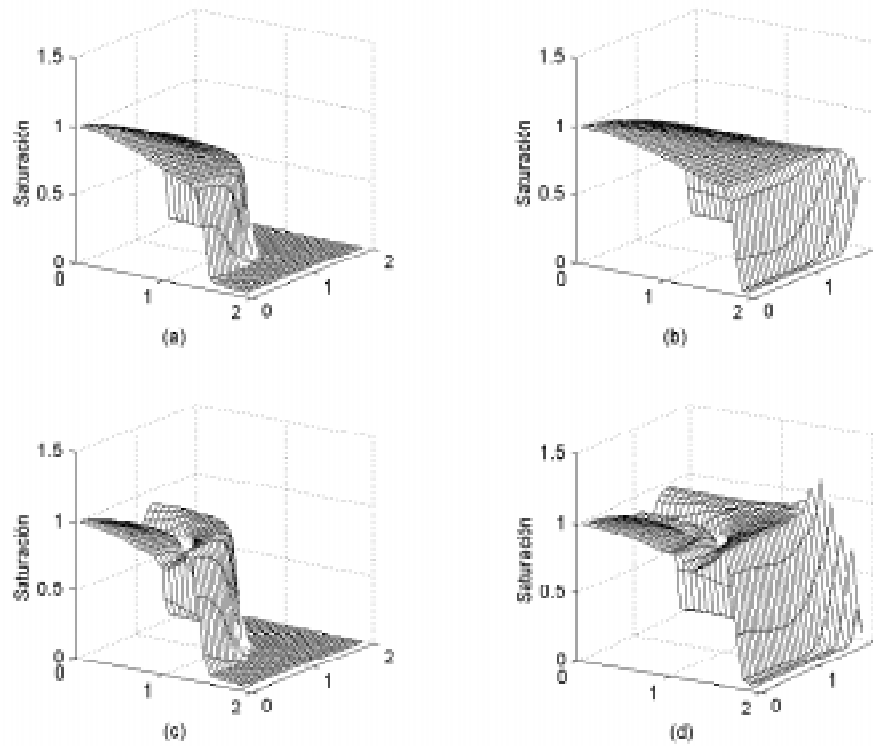


Figura 16. Solución numérica en el Caso 3-2D mediante los métodos de alta resolución (a), (b) y el método de Lax-Wendroff (c),(d).

En la Figura 16 se muestran los perfiles de saturación para los tiempos adimensionales $t = 1.44$ y 9.6 . En este ejemplo, al igual que en el caso unidimensional, se desarrolla una onda de choque a partir de la condición inicial continua. Cuando el método de Lax-Wendroff es utilizado (Figura 16 (a) y (b)) se observa la aparición de oscilaciones, las cuales están completamente ausentes cuando se emplean los métodos de alta resolución. Comparando los

resultados de este caso con los mostrados en la Figura 15 se nota que las oscilaciones producidas por este último son más severas por haber tenido una condición inicial discontinua. En cualquier caso las soluciones obtenidas por el método de Lax-Wendroff son físicamente cuestionables y ponen de relieve las ventajas de los métodos de alta resolución.

7 Conclusiones

Los métodos de alta resolución presentan una mejora considerable respecto al método de Lax-Wendroff, además de ser marginalmente mejores que el método de Godunov. En el caso unidimensional se observa un orden de convergencia igual a 0.6 para los métodos de alta resolución en el caso de soluciones con ondas de choque, siendo éste un orden de convergencia óptimo. Debido a que el orden de convergencia teórico en estos métodos es mayor en una dimensión que en dos dimensiones es recomendable utilizar mallas curvilíneas, como las usadas para determinar la solución analítica, en lugar de mallas cartesianas. Este trabajo representa una de las primeras aplicaciones originales para extender el rango de aplicación de los métodos de alta resolución en las simulaciones de yacimientos. Futuras investigaciones en esta área mostrarán la aplicabilidad de estos métodos a la simulación de yacimientos petrolíferos.

Agradecimientos

El presente trabajo fué financiado parcialmente por los proyectos 03-11-3645/95, 03-11-3879/97 y 03-11-4007/97 del Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico (CDCH) de la Universidad Central de Venezuela (UCV). Igualmente agradecemos al Profesor Manuel Maia por su valiosa colaboración en la realización de este artículo.

Referencias

- [1] Craft B.C., Hawkins, M.F.: *Applied Petroleum Reservoir Engineering*, Second Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- [2] LeVeque, R.J. *Numerical Methods for Conservation Laws*, Second Edition, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1992.
- [3] Smoller, J. *Shock Waves and Reaction Diffusion Equations*, First Edition, Springer Verlag, New York, 1982.

- [4] Courant, R., Friedrichs, O. *Supersonic Flow and Shock Waves*, Third Edition, Springer Verlag, New York, 1985.
- [5] Strikwerda, C.J.: *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, Second Edition, Wadsworth&Brooks/Cole, California, 1989.
- [6] Godunov, S.K.: *Finite Differences Methods for Numerical Computations of Discontinuous Solutions of Equations of Fluid Dynamics*, Mat. Sb., **47** (1959), p. 271.
- [7] Lax, P.D., and Wendroff, B.: *Systems of Conservation Laws*, Comm. Pure Appl. Math., **13** (1960), 217–237.
- [8] Sethian, J.A., Chorin, A.J., and Concus, P.: *Numerical Solution of the Buckley-Leverett Equations*, paper SPE 12254, November 1983.
- [9] Oleinik O.A.: *Uniqueness and Stability of the Generalized Solution of the Cauchy Problem for a Quasilinear Equation*, American Mathematical Society Translation, Service 2, **33** (1963), p. 285.
- [10] Bermúdez, M.: *Métodos de Alta Resolución Bidimensionales para la Ecuación de Buckley-Leverett*, Trabajo Especial de Grado, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Caracas, 1998.
- [11] Agreda, J. *Métodos de Alta Resolución Unidimensionales para la Ecuación de Buckley-Leverett*, Trabajo Especial de Grado, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Caracas, 1998.
- [12] LeVeque, R.J.: *Clawpack User's Manual*, Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, 1997.
- [13] Van Leer, B. *Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme II. Monotonicity and Conservation Combined in a Second Order Scheme*, J. Comput. Phys., **14** (1974), 361–370.
- [14] Kolmogorov, A.N., and Fomin, S.V.: *Elements of Function Theory and Functional Analysis*, Third Edition, Mir Publisher, Moscu, USSR, 1978.
- [15] Morel Seytoux, H.J. *Analytical-Numerical Method in Waterflooding Predictions*, Paper SPE 985, September 1965.

- [16] Morel Seytoux, H.J.: *Unit Mobility Ratio Displacement Calculations for Pattern Floods in Homogeneous Medium*, Paper SPE 1359, September 1966.
- [17] Duchateau, P., and Zachmann, D.: *Partial Differential Equations*, First Edition, McGrawHill, New York, 1986.
- [18] Mattax, C.C. and Dalton, R.: *Reservoir Simulation*, SPE Monograph. Vol 13, First Edition, Richardson, Texas, 1990, p. 184.