

Solución Numérica de un Problema de Dispersión en una Guía de Ondas usando Generación de Mallas

*Numerical Solution of a Scattering Problem in a Wave Guide
using a Grid Generation Technique*

Mariela Sarmiento Santana (marielita@cantv.net)

Departamento de Física y Matemáticas
Universidad de los Andes-Trujillo. Venezuela.

Resumen

Presentamos un método numérico para aproximar las soluciones de un problema de dispersión de una onda acústica plana a partir de un objeto de geometría irregular en el interior de una guía de ondas bidimensional. El método que presentamos está basado en el Principio de la Amplitud Límite, en la construcción de una condición de irradiación apropiada en el “infinito” y en una técnica numérica para generar un sistema de coordenadas curvilíneas que se adapte a los contornos de un dominio arbitrario.

Palabras y frases clave: Guía de ondas, condiciones de irradiación, ecuación de Helmholtz, Principio de Amplitud Límite, esquema de diferencias finitas, métodos numéricos.

Abstract

We present a numerical method to approximate the solution of the dispersion problem of a plane acoustic wave with an object of irregular geometry inside a two-dimensional guide of waves. The method that we present is based on the Limiting Amplitude Principle, in the construction of an appropriate irradiation condition in the “infinite” and in a numerical technique to generate a system of curvilinear coordinates adapted to the contour of an arbitrary domain.

Key words and phrases: Wave guide, radiation conditions, Helmholtz equation, limiting amplitude principle, finite differences scheme, numerical methods.

1 Introducción

Estudiaremos la interacción de una onda incidente dada constituida por un solo modo de propagación con un obstáculo localizado en una guía de ondas. El dominio de nuestro problema está formado por el interior de dos placas planas paralelas infinitas separadas una distancia a (factor de escalamiento), ver Fig.1.

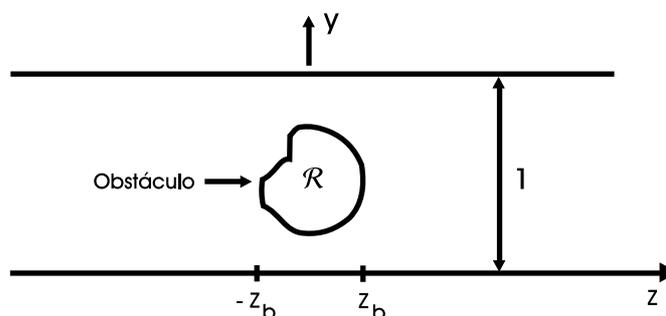


Figura 1: Representación esquemática de una guía de ondas.

Nuestro propósito es determinar numéricamente el campo dispersado y los coeficientes de reflexión y transmisión producidos por la dispersión de la onda incidente, (1.1), a partir de un obstáculo \mathcal{R} (cavidad vacía) localizado en la guía,

$$p_o(y, z) \equiv \text{sen}(\pi y)e^{-ik_1 z}, \quad (1.1)$$

donde $k_1 \equiv \sqrt{k^2 - \pi^2}$, $k > \pi$. Obsérvese que si $k < \pi$, p_o sería una onda que se desvanecería de manera exponencial, mientras que si $k = \pi$ no habrían ni onda saliente ni entrante cuando $z \rightarrow \pm\infty$. Los campos incidente, reflejado y transmitido denotados respectivamente por p_o, p_r y p_T , se toman armónicos en el tiempo y proporcionales a $e^{-i\omega t}$.

El problema de contorno completo que nos interesa resolver consiste en la ecuación de Helmholtz

$$p_{zz} + p_{yy} + k^2 n^2 p = 0, \quad |z| < \infty, \quad 0 < y < 1 \quad (1.2)$$

para la onda incidente (1.1), sujeto a las condiciones

$$p(0, z) = p(1, z) = 0, \quad |z| < \infty \quad (1.3)$$

$$p = 0 \quad \text{en } \partial\mathcal{R} \quad (1.4)$$

$$i(k_1 + k_2) \frac{\partial p_r}{\partial z} + (k^2 + k_1 k_2) p_r + \frac{\partial^2 p_r}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } z = z_\infty \quad (1.5)$$

$$-i(k_1 + k_2) \frac{\partial p_T}{\partial z} + (k^2 + k_1 k_2) p_T + \frac{\partial^2 p_T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } z = -z_\infty \quad (1.6)$$

Las condiciones de irradiación (1.5) y (1.6), impuestas sobre la frontera artificial, surgen luego de aplicar sucesivamente los operadores

$$B_\ell \equiv \frac{\partial}{\partial z} - ik_\ell \quad \text{y} \quad D_\ell \equiv \frac{\partial}{\partial z} + ik_\ell \quad \text{para } \ell = 1, 2 \quad (1.7)$$

a las series de funciones producto definidas en la región de reflexión y en la región de transmisión, respectivamente como

$$\begin{aligned} p(y, z) &= p_o(y, z) + p_r(y, z) \\ &= e^{-ik_1 z} \text{sen}(\pi y) + \sum_{\ell=1}^{\infty} R_\ell e^{ik_\ell z} \text{sen}(\ell \pi y), \quad \text{para } z > z_b. \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$p(y, z) = p_T(y, z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} T_\ell e^{-ik_\ell z} \text{sen}(\ell \pi y), \quad \text{para } z < -z_b, \quad (1.9)$$

con R_ℓ y T_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots$) los coeficientes de reflexión y transmisión a determinar.

Separando el campo disperso v de la onda incidente se tiene

$$p(y, z) = e^{-ik_1 z} \text{sen}(\pi y) + v(y, z), \quad (1.10)$$

Sustituimos (1.10) en (1.2) a (1.6) y v satisface en la región $0 < y < 1$, $|z| < z_\infty$

$$v_{zz} + v_{yy} + k^2 n^2 v = k^2 (1 - n^2) e^{-ik_1 z} \text{sen}(\pi y), \quad (1.11)$$

$$v(0, z) = v(1, z) = 0, \quad (1.12)$$

$$B_2 B_1 v = 0, \quad \text{en } z = z_\infty \quad (1.13)$$

$$D_2 D_1 v = 0, \quad \text{en } z = -z_\infty \quad (1.14)$$

$$v = -e^{-ik_1 z} \text{sen}(\pi y) \quad \text{en } \partial \mathcal{R}. \quad (1.15)$$

Basándonos en el Principio de la Amplitud Límite, transformaremos el problema de equilibrio anterior en un problema hiperbólico cambiante en el tiempo cuya solución tienda a la solución de equilibrio buscada. La ecuación

$$n_1^2 w_{tt} = w_{zz} + w_{yy} + k^2 (n^2 - n_1^2) w + k^2 (n^2 - 1) e^{-i(kz+kt)} \text{sen}(\pi y). \quad (1.16)$$

donde n_1 es una función arbitraria de la posición, se reduce a (1.11) mediante el cambio $w = ve^{-ikt}$, es un poco más general y nos permite evitar problemas de estabilidad numérica. Esta es la ecuación que resolveremos numéricamente, sujeta a las condiciones de frontera

$$w(0, z, t) = w(1, z, t) = 0, \quad (1.17)$$

$$w = \left[-e^{(-ik_1 z)} \text{sen}(\pi y) \right] e^{-ikt} \quad \text{en } \partial\mathcal{R}, \quad (1.18)$$

$$\beta \int_0^t w_{yy} dt' = w_z(y, z, t) + \theta w_t(y, z, t) \quad \text{en } z = z_\infty, \quad (1.19)$$

$$-\beta \int_0^t w_{yy} dt' = w_z(y, z, t) - \theta w_t(y, z, t) \quad \text{en } z = -z_\infty, \quad (1.20)$$

donde $\beta = \frac{k}{k_1 + k_2}$ y $\theta = \frac{k^2 + k_1 k_2}{k(k_1 + k_2)}$ y a las condiciones iniciales

$$w(y, z, 0) = w_t(y, z, 0) = 0, \quad (1.21)$$

Las condiciones de irradiación tiempo-dependientes, se obtienen reemplazando B_ℓ y D_ℓ en (1.7) respectivamente, por

$$\bar{B}_\ell = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{k_\ell}{k} \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{y} \quad \bar{D}_\ell = \frac{\partial}{\partial z} - \frac{k_\ell}{k} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Las fórmulas para los primeros coeficientes de reflexión y transmisión, son

$$R_1 = \frac{-i\bar{B}_2(w) e^{ikt} e^{-ik_1 z_\infty}}{k_1 - k_2} + \varepsilon \quad (1.22)$$

$$T_1 = \frac{i\bar{D}_2(w) e^{ikt} e^{-ik_1 z_\infty}}{k_1 - k_2} + \text{sen}(\pi y) + \varepsilon \quad (1.23)$$

2 Generación numérica de un sistema de coordenadas curvilíneas ajustado a las fronteras mediante ecuaciones diferenciales

La idea básica es tener alguna línea coordenada (en dos dimensiones) coincidente con cada segmento de la frontera física. La otra línea coordenada debe variar monótonamente a lo largo del segmento de frontera con la misma

dirección y rango de variación sobre algún segmento opuesto. Con los valores de las coordenadas curvilíneas, así dados en las fronteras, se procede a generar las coordenadas de los puntos del campo. La transformación de la región física a la región transformada debe ser uno a uno. Las líneas coordenadas de la misma familia no deben cruzarse y las líneas de diferentes familias no deben cruzarse más de una vez. En este trabajo, la generación de los puntos interiores del campo se logra resolviendo un problema de Dirichlet para un sistema de ecuaciones diferenciales elíptico.

En resumen, para generar una malla curvilínea ajustada a los contornos resolvemos un problema de valores de frontera

$$\begin{cases} \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} + J^2(Py_{\xi} + Qy_{\eta}) = 0 \\ \alpha z_{\xi\xi} - 2\beta z_{\xi\eta} + \gamma z_{\eta\eta} + J^2(Pz_{\xi} + Qz_{\eta}) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\alpha = z_{\eta}^2 + y_{\eta}^2, \quad \beta = z_{\xi}z_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}, \quad \gamma = z_{\xi}^2 + y_{\xi}^2, \quad J = z_{\xi}y_{\eta} - z_{\eta}y_{\xi}$$

con condiciones de borde tipo Dirichlet invertidas (ver Apéndice A en [4]). El sistema elíptico (2.1) es cuasi lineal y sus soluciones analíticas no están disponibles, se resuelve usando un método numérico en diferencias finitas iterativo (método de sobrerelajación sucesiva) y por conveniencia se escoge una malla rectangular uniforme, en este hecho reside la utilidad del método expuesto, ver la Fig. 2.

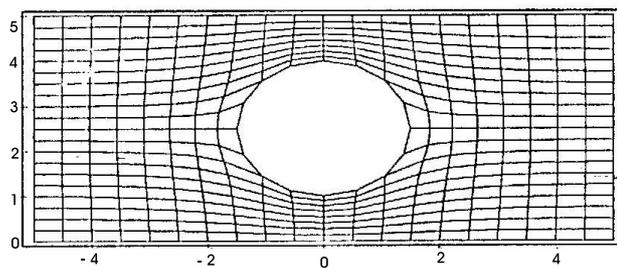


Figura 2: Malla para una guía con un obstáculo cilíndrico.

3 Problema de valor inicial y de frontera en coordenadas curvilíneas: solución numérica

Transformamos las ecuaciones (1.16) a (1.21), que definen al problema de frontera en término de las nuevas coordenadas (ξ, η) , después de aplicar el Principio de la Amplitud Límite resulta el PIVF

$$n_1^2 w_{tt} = \frac{1}{J^2} (\alpha w_{\xi\xi} - 2\delta w_{\xi\eta} + \gamma w_{\eta\eta}) + k^2 (n^2 - n_1^2) w + k^2 (n^2 - 1) e^{-i(k_1 z + kt)} \text{sen}(\pi y), \quad (3.1)$$

$$w(0, z, t) = w(1, z, t) = 0, \quad (3.2)$$

$$w = \left[-e^{(-ik_1 z)} \text{sen}(\pi y) \right] e^{-ikt} \text{ en } \partial R, \quad (3.3)$$

$$\frac{\beta}{J^2} \int_{t_0}^t (x_\eta^2 w_{\xi\xi} - 2x_\xi x_\eta w_{\xi\eta} + x_\xi^2 w_{\eta\eta}) dt' = \frac{1}{J} (y_\eta w_\xi - y_\xi w_\eta) + \theta w_t, \quad (3.4)$$

$$- \frac{\beta}{J^2} \int_{t_0}^t (x_\eta^2 w_{\xi\xi} - 2x_\xi x_\eta w_{\xi\eta} + x_\xi^2 w_{\eta\eta}) dt' = \frac{1}{J} (y_\eta w_\xi - y_\xi w_\eta) - \theta w_t, \quad (3.5)$$

$$w(y, z, 0) = w_t(y, z, 0) = 0, \quad (3.6)$$

donde $y = y(\xi, \eta)$ y $z = z(\xi, \eta)$. Para resolver el problema definido por (3.1) a (3.6) usamos un método en diferencias finitas explícito, en particular, usamos diferencias centradas en espacio y tiempo, salvo en las fronteras artificiales (correspondientes a $z = \pm z_\infty$) donde usamos aproximaciones adelantadas y atrasadas, según sea el caso.

4 Experimentos numéricos y análisis de resultados

Primero, colocamos un obstáculo rectangular (Obs-R) en el medio de una guía de ondas (experimento de control) y realizamos los siguientes experimentos:

	Long. obj.	Ancho guía	$\pm z_\infty$	N° ptos malla	ε
Exp. Rect ₁	0.4x0.4	1	± 4	11x81	0.01
Exp. Rect _{1.1}	0.4x0.4	1	± 4	11x81	0.001
Exp. Rect ₂	0.2x0.2	1	± 4	21x161	0.01
Exp. Rect ₃	0.4x0.4	1	± 8	11x161	0.01
Exp. Rect ₄	0.4x0.4	2	± 8	21x161	0.01
Exp. Rect _{4.1}	0.4x0.4	2	± 8	21x161	0.001

Tabla 1.

La relación que debe existir entre el paso temporal y los pasos espaciales se determina a partir de la *condición de estabilidad de Courant-Friedrichs-Lewy*, [2], que básicamente establece que la velocidad de onda numérica tiene que ser menor a la velocidad de onda real, ya que de esta manera el dominio de dependencia numérico contiene al dominio de dependencia real. En consecuencia, para que haya estabilidad debe cumplirse que, $\Delta t < n\Delta z$ y $\Delta t < n\Delta y$.

Los resultados numéricos que presentaremos en la Tabla 2, fueron calculados a partir de algoritmos numéricos codificados en FORTRAN y ejecutados en estaciones de trabajo SUN. Esto permitió generar una data que luego se leyó en el graficador Maple [6], el cual produjo las curvas y superficies incluidos en el presente trabajo.

	$ R_1 $	$ T_1 $	Δt	ε	Nº de iteraciones
Exp. Rect ₁	1.10998	0.11773	0.05	0.01	585
Exp. Rect _{1,1}	1.08242	0.08500	0.05	0.001	6323
Exp. Rect ₂	0.98980	0.05021	0.01	0.01	1170
Exp. Rect ₃	1.10214	0.11279	0.05	0.01	919
Exp. Rect ₄	0.27200	1.00953	0.05	0.01	656
Exp. Rect _{4,1}	0.28378	1.00908	0.05	0.001	10257

Tabla 2.

Luego realizamos experimentos para el obstáculo circular (Obs-C) semejantes, lo más posible, a los del Obs-R. El propósito fue poder comparar las respuestas en uno y otro caso y de esta manera obtener algún indicio de la confiabilidad del método propuesto, cuya principal virtud es la posibilidad de aplicarlo a obstáculos de geometría irregular.

Construimos mallas uniformes sobre el dominio de cálculo (plano $\xi - \eta$) y luego ajustamos el valor del paso temporal hasta conseguir estabilidad numérica y convergencia al estado estacionario, cuya existencia está garantizada por el Principio de la Amplitud Límite, [3]. Mantuvimos fijo el parámetro $\varepsilon = 0.01$.

	Diam. obj.	Ancho guía	$\pm z_\infty$	Nº ptos malla
Exp. C ₁	$\frac{1}{2}$	1	± 4	11x81
Exp. C ₂	$\frac{1}{4}$	1	± 4	21x161
Exp. C ₃	$\frac{1}{2}$	1	± 8	11x161
Exp. C ₄	$\frac{1}{2}$	2	± 8	21x161

Tabla 3.

Con estos datos se calcularon numéricamente, para cada experimento, el valor absoluto de la intensidad del campo total a lo largo de la guía, por

medio de un algoritmo basado en las ecuaciones (3.1) a (3.6) y de manera semianalítica por medio de las expresiones (1.8) y (1.9) para las ondas reflejada y transmitida.

Los resultados para el experimento C1 se muestran en las gráficas contenidas en las figuras: Fig. 4, Fig. 4 y Fig. 4 donde se compara el campo calculado numéricamente (línea continua) y el semianalítico (línea punteada), el cual nos sirve de control, allí se observa una buena correspondencia entre uno y otro. Resultados similares se obtubieron en el resto de los experimentos, ver la tabla 4.

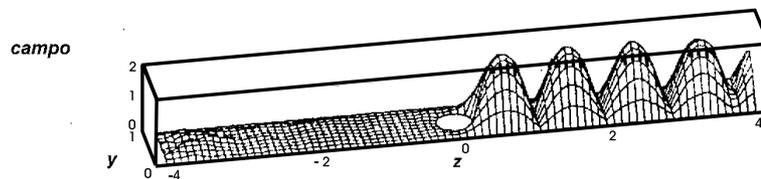


Figura 3: Campo total numérico. Experimento C1.

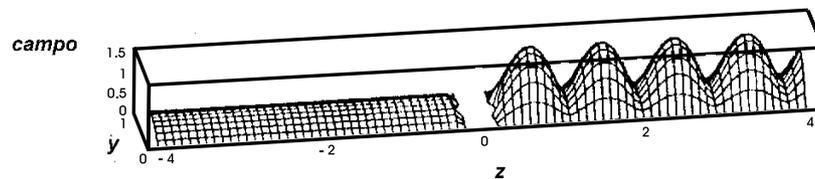


Figura 4: Campo semianalítico. Experimento C1.

	$ R_1 $	$ T_1 $	Δt	Nº de iteraciones
Exp. C_1	0.69872	0.338004	0.012	750
Exp. C_2	0.570883	0.426709	0.005	1281
Exp. C_3	0.596901	0.307687	0.008	1626
Exp. C_4	0.337679	0.881153	0.016	815

Tabla 4.

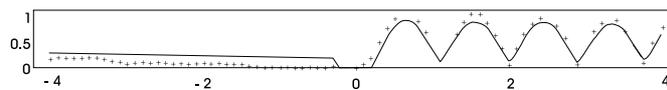


Figura 5: Comparación de ambos campos antes del obstáculo.

En la Fig. 4 se comparan los dos campos numéricos para el Obs-R y Obs-C obtenidos en los Experimentos Rect1 y C1, se observa que la respuesta es muy similar en ambos casos con una diferencia apreciable cerca de $z = -z_\infty$ en la zona de transmisión, esta diferencia se la atribuimos a la aproximación de orden lineal de la condición de irradación en las fronteras artificiales $z = \pm z_\infty$.

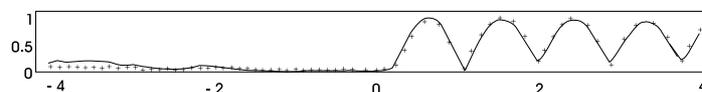


Figura 6: Comparación entre los campos totales de Rect1 y C1.

5 Conclusiones

1. La intensidad del campo total en una guía de ondas, es cualitativamente bastante similar para los dos tipos de obstáculos analizados en el presente trabajo.
2. Las fronteras ficticias pueden ser ubicadas bastante cerca del obstáculo y los resultados en puntos interiores de la guía no se alteran.
3. Al incorporar la técnica de generación de mallas, el paso temporal decae considerablemente por razones de estabilidad numérica.

4. El valor absoluto de los coeficientes de reflexión y transmisión R_1 y T_1 respectivamente, son bien diferentes al pasar de un obstáculo a otro.
5. El número de iteraciones en el caso Obs-C, aumentan en todos los experimentos pero podemos decir que son del mismo orden.
6. Una desventaja es la imposibilidad de tener un criterio de estabilidad que no sea por la vía de experimentación numérica.
7. Sospechamos que el bajo orden de aproximación, $O(1)$, de las condiciones de irradiación ha introducido errores importantes en $z = -z_\infty$ y sugerimos mejorarla.

Referencias

- [1] Kriegsmann, G. A. *Radiations conditions for wave guide problems*, Siam J. Sci. Stat. Comp. **3**(3), (1982), 318–326.
- [2] Mitchell, A. R., Griffiths, D. F. *The finite difference method in partial differential equations*, Jhon Wiley & Sons, 1980.
- [3] Morawetz, C. S. *The limiting amplitude principle*, Comm. Pure Appl. Math. **15** (1962), 181–197.
- [4] Sarmiento, M. *Principio de la amplitud límite aplicado a problemas de dispersión con generación de mallas*, TEG, Fac. Ciencias, ULA, 1996.
- [5] Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A., Mastin, C. W. *Numerically grid generation*, North-Holland, 1985.
- [6] Villamizar, V., Arellan, A., Marcano, M. *Estudiando ecuaciones diferenciales con Maple*, Octava Escuela Venezolana de Matemáticas, Asociación Matemática Venezolana, Sept. 1995.