Divulgaciones Matemáticas Vol. 10 No. 1(2002), pp. 29–41

El Problema de Pick en H^∞ y $A(\mathbb{T})$ y el Problema de Cole-Lewis-Wermer

The Pick Problem in H^∞ and $A(\mathbb{T})$ and the Cole-Lewis-Wermer Problem

Gladys Cedeño (gmcedeno@cantv.net)
Departamento de Formación General
y Ciencias Básicas.
Universidad Simón Bolívar.
Apartado Postal 89000, Baruta 1086, Edo. Miranda.

Resumen

Demostramos que el problema de Pick en H^∞ y el álgebra del disco $A(\mathbb{T})$ son equivalentes. Presentamos la extensión del problema a álgebras uniformes estudiada por Cole-Lewis-Wermer, y damos una respuesta para el álgebra del disco y una medida dominante.
Palabras y frases clave: Caracter, espacio de Gelfand, álgebra uniforme, medida dominante.

Abstract

We prove that the Pick's problem in H^∞ and the disc algebra $A(\mathbb{T})$ are equivalent. Moreover, we introduce the extension of the problem to uniform algebras studied by Cole-Lewis-Wermer and give the answer in the case of the disc algebra and a single dominant measure.
Key words and phrases: Character, Gelfand space, uniform algebra, dominant measure.

1 Introducción

Si $M_1, ..., M_n$ son puntos fijados del disco $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, w_1, ..., w_n$ son números complejos, $\beta(z) = \beta_1 ... \beta_n$ donde $\beta_j(z) = \frac{z - M_j}{1 - z\bar{M}_j}$ es el factor de Blaschke con cero M_j y $g_j(z) = \frac{\beta(z)}{z - M_j}$ para $j = 1, ..., n$ entonces, la función

Recibido 2001/04/21. Revisado 2002/05/29. Aceptado 2002/05/30.
MSC (2000): Primary 43A99; Secondary 47B35, 32A50.

$$F(z) = \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{1}{\beta'(M_j)} g_j(z)$$

satisface las condiciones:

$$\begin{array}{rcl} F & \in & H^\infty \text{ o sea, es analítica y acotada en } \mathbb{D}, \text{ y} \\ F(M_j) & = & w_j \text{ para } j = 1, ..., n. \end{array}$$

En [2], se demuestra que la función β puede identificarse con su restricción a $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, siendo esta restricción una función interna que da origen al espacio modelo $E_\beta := H^2 \ominus \beta H^2$ de dimensión n, y al operador modelo $T_\beta : E_\beta \to E_\beta$ definido por $T_\beta f := P_\beta e^{it} f$ para $f \in E_\beta$ donde P_β es la proyección ortogonal de H^2 sobre $E_{\beta.}$ Las funciones $g_1, ..., g_n$ forman una base algebraica de E_β y son autovectores de T_β, de modo que la función F pertenece a E_β y la fórmula precedente es el desarrollo de F respecto de la base formada por estos autovectores, además esta F no sólo pertenece a H^∞ sino es también continua en $\mathbb{D} \cup \mathbb{T} = \overline{\mathbb{D}}$, es decir, F pertenece al álgebra del disco $A(\mathbb{T})$, de las funciones continuas en $\mathbb{T}$ que tienen extensión analítica a $\mathbb{D}$.

Recordamos que el problema de Pick es:

"Fijados $M_1, ..., M_n \in \mathbb{D}$ y $w_1, ..., w_n \in \mathbb{C}$ dar condiciones necesarias y suficientes para que exista $F \in H^\infty$ tal que

$$||F||_\infty \leq 1 \text{ y } F(M_j) = w_j \text{ para } j = 1, ..., n\text{''}.$$

Este problema se plantea en el álgebra del disco en los siguientes términos:

"Fijados $M_1, ..., M_n \in \mathbb{D}$ y $w_1, ..., w_n \in \mathbb{C}$ dar condiciones necesarias y suficientes para que dado $\varepsilon > 0$ exista $F \in A(\mathbb{T})$ tal que

$$||F||_\infty \leq 1 + \varepsilon \quad \text{y} \quad F(M_j) = w_j \text{ para } j = 1, ..., n\text{''}.$$

En este artículo se presenta una demostración de la equivalencia de estos dos problemas y se aclara la relación entre el espacio modelo E_β y el álgebra $A(\mathbb{T})$.

Planteamos el problema estudiado por Cole-Lewis-Wermer en 1992, acerca de la extensión del problema de Pick a álgebras uniformes [3], y damos una respuesta para $A(\mathbb{T})$.

2 Notación y Resultados Básicos

Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad 1, A^* su espacio dual. Recordamos que una sucesión $\{F_n\}_{n\geq 1} \subset A^*$ se dice que converge *débil* $-*$ a un elemento $F \in A^*$ si,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \text{ para todo } x \in A.$$

Definición 2.1. Un elemenento $F \in A^*$ se dice que es un *caracter* de A si, y sólo si, $F \neq 0,\ F(x \cdot y) = F(x)F(y)$ para todo $x, y \in A$.

El espacio de Gelfand de A o **Espectro** de A es

$$\Sigma(A) := \{F \in A^* : F \text{ es caracter de } A\}.$$

El espacio $\Sigma(A)$ es cerrado en la Topología *débil*$-*$ y por lo tanto, es compacto en esta topología.

La transformada de Gelfand de un elemento $x \in A$ es la función $\hat{x} : \Sigma(A) \to \mathbb{C}$ definida por $\hat{x}(F) := F(x)$ para $F \in \Sigma(A)$ y tiene las siguientes propiedades:

a) Para cada $x \in A$, $\hat{x}$ es una función continua.

b) $||\hat{x}||_\infty := \sup\{|\hat{x}(F)| : F \in \Sigma(A)\} \leq ||x||_\infty$.

c) $\widehat{A} := \{\hat{x} : x \in A\}$ separa puntos de $\Sigma(A)$, es decir, si $F_1, F_2 \in \Sigma(A)$ y $F_1 \neq F_2$ entonces existe $x \in A$, tal que $\hat{x}(F_1) \neq \hat{x}(F_2)$.

d) La aplicación $\Lambda : A \to C(\Sigma(A))$

$$\Lambda x := \hat{x} \text{ para cada } x \in A$$

(donde $C(\Sigma(A))$ denota el álgebra de las funciones continuas en $\Sigma(A)$) es un homomorfismo de álgebras continuo.

Si $F \in \Sigma(A)$ entonces, el núcleo de F es un ideal maximal y recíprocamente se prueba que todo ideal maximal es núcleo de un caracter $F \in \Sigma(A)$. De manera que identificando F con su núcleo se puede decir que $\Sigma(A)$ es el espacio de los ideales maximales.

Un ejemplo básico importante, es el álgebra $A = C(X)$ de las funciones continuas a valores en $\mathbb{C}$, definidas en un conjunto compacto Hausdorff X, con la norma de la convergencia uniforme, para esta álgebra se prueba:

a) $(C(X))^* = \{\ \mu :$ medidas finitas de Borel en $X\}$ (Teorema de representación de Riesz).

b) $\Sigma(C(X)) = X$.

c) $F \in \Sigma(C(X))$ si, y sólo si, existe $x \in X$ tal que para toda $f \in C(X)$

$$F(f) = \delta_x(f) = f(x) = \int_X f\,(t)\,d\delta_x\,(t)$$

donde δ_x es la medida de Dirac.

Resulta de b) que todo $F \in \Sigma(C(X))$ es dado por un elemto $x \in X$, es decir, $F = F_x$ donde $F_x(f) = f(x)$ para toda $f \in C(X)$. Si $f \in C(X)$ la transformada de Gelfand de f verifica:

$$\widehat{f}(F_x) = F_x(f) = f(x) \qquad \text{para todo } F_x \in \Sigma(C(X)).$$

Luego, identificando los F_x con los $x \in X$, se puede decir

$$\widehat{f} = f \text{ para toda } f \in C(X).$$

Además del ejemplo anterior, son importantes las subálgebras de $C(X)$, y en particular, las llamadas álgebras uniformes.

Definición 2.2. Se llama *álgebra uniforme* sobre X a toda subálgebra $A \subset C(X)$ (X compacto Hausdorff) tal que:

a) A contiene a las funciones constantes

$$||f||_A := \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

b) A separa puntos de X.

En general, si $A \subset C(X)$ es álgebra uniforme, entonces
la aplicación $E : X \to \Sigma(A)$ definida por $E(x)f := f(x)$ es un homeomorfismo de X en $E(X)$.

Es de especial interés el álgebra $A(\mathbb{D}) := H^\infty(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ de las funciones continuas en $\mathbb{D} \cup \mathbb{T}$ y holomorfas en $\mathbb{D}$ que se identifica con el álgebra

$$A(\mathbb{T}) := \{f \in C(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0 \text{ para } n < 0\}.$$

Toda $f \in A(\mathbb{T})$ tiene extensión holomorfa única, $\widehat{f}$ tal que:

$$\widehat{f} \in A(\mathbb{D}) \tag{2.1}$$

$$\widehat{f}\Big|_{\mathbb{T}} = f \tag{2.2}$$

$$\left\|\widehat{f}\right\|_\infty = \|f\|_\infty \tag{2.3}$$

y recíprocamente, dada $\widehat{f} \in A(\mathbb{D})$ existe una única $f \in A(\mathbb{T})$ que verifica (2.2) y (2.3). O sea, $A(\mathbb{T})$ es el conjunto de las funciones continuas en $\mathbb{T}$ que tienen extensión analítica única a $\mathbb{D}$, de manera que $A(\mathbb{T}) \sim A(\mathbb{D})$ y si $f \in A(\mathbb{T})$ y $M \in \mathbb{D}$, $f(M)$ significa $\widehat{f}\,(M)$ donde $\widehat{f}\Big|_{\mathbb{T}} = f$.

El espacio de Gelfand o espacio de los ideales maximales de $A(\mathbb{T}) \sim A(\mathbb{D})$ es conocido, se sabe que

$$\Sigma(A(\mathbb{D})) = \Sigma(A(\mathbb{T})) = \mathbb{D} \cup \mathbb{T}. \tag{2.4}$$

Un estudio completo de las álgebras de Banach puede verse en [1], [5] y [6].

3 El problema de Pick en el álgebra A($\mathbb{T}$)

Tal como se dijo en la introducción el problema de Pick en $A(\mathbb{T})$ es:

"Fijados $M_1, ..., M_n \in \mathbb{D}$ y $w_1, ..., w_n \in \mathbb{C}$ dar condiciones necesarias y suficientes para que dado $\varepsilon > 0$ exista $F \in A(\mathbb{T})$ tal que

$$||F||_\infty \leq 1 + \varepsilon \quad \text{y} \quad F(M_j) = w_j \quad \text{para } j = 1, ..., n\text{''}.$$

Demostraremos que el problema de Pick en $H^\infty(\mathbb{D})$ y el álgebra $A(\mathbb{T})$ son equivalentes.

Sean $M_1, ..., M_n$ puntos de $\mathbb{D}$ fijos. Para lo que sigue, $M = (M_1, ..., M_n)$, $H^\infty = H^\infty(\mathbb{D})$, $A = A(\mathbb{T})$ y $w = (w_1, ..., w_n)$ con $w_i \in \mathbb{C}$ para $i = 1, ..., n$.

Sean

$$D(H^\infty)(M) := \{w \in \mathbb{C}^n : \exists F \in H^\infty \mid \ ||F||_\infty \leq 1 \text{ y } F(M_j) = w_j,\ j = 1, ..., n\}$$

$$D(A)(M) := \{w \in \mathbb{C}^n : \forall\varepsilon > 0\ \exists F \in A \mid ||F||_\infty \leq 1 + \varepsilon \text{ y } F(M_j) = w_j,\ j = 1, ..., n\}$$

los conjuntos de soluciones del problema de Pick en H^∞ y A, respectivamente, para la n-upla M de los puntos fijados en $\mathbb{D}$.

Sean

$$N(H^\infty)(w) := \inf \{||F||_\infty : \ F \in H^\infty \text{ y } F(M_j) = w_j \text{ para } j = 1, ..., n\}$$

$$N(A)(w) := \inf \{||F||_\infty : F \in A \text{ y } F(M_j) = w_j \text{ para } j = 1, ..., n\}.$$

Entonces,

Lema 3.1. *a) $N(H^\infty)(w)$ y $N(A)(w)$ son normas en $\mathbb{C}^n$.*

b) $w \in D(H^\infty)(M)$ si, y sólo si, $N(H^\infty)(w) \leq 1$.

c) $w \in D(A)(M)$ si, y sólo si, $N(A)(w) \leq 1$.

d) $D(H^\infty)(M)$ y $D(A)(M)$ son cerrados en $\mathbb{C}^n$.

e) $N(H^\infty)(w) = N(A)(w)$.

Demostración

b) Si $w \in D(H^\infty)(M)$ entonces, existe $f \in H^\infty$ tal que $||f||_\infty \leq 1$ y $f(M_j) = w_j$ para $j = 1, ..., n$. Luego, $N(H^\infty)(w) \leq ||f||_\infty \leq 1$. Recíprocamente, si $w \in \mathbb{C}^n$ es tal que $N(H^\infty)(w) \leq 1$ entonces, para cada $m = 1, 2, ..$ existe $f_m \in H^\infty$ tal que $f_m(M_j) = w_j$ para $j = 1, ..., n$ y $||f_m||_\infty < 1 + \frac{1}{m} \leq 2$. Así pues, la sucesión $\{f_m\}_{m \geq 1} \subset H^\infty$ y es uniformemente acotada, entonces por el teorema de Montel, tiene una subsucesión $\{f_{m_k}\}_{k \geq 1}$ convergente a una función $f \in H^\infty$ tal que

$$f(M_j) = \lim_{k \to \infty} f_{m_k}(M_j) = w_j \text{ para } j = 1, ..., n$$

$$||f||_\infty \leq 1, \text{ o sea, } w \in D(H^\infty)(M).$$

c) Si $w \in D(A)(M)$ entonces, para todo $\varepsilon > 0$ $N(A)(w) < 1 + \varepsilon$ luego, $N(A)(w) \leq 1$. Recíprocamente, sea $w \in \mathbb{C}^n$ tal que $N(A)(w) \leq 1$ entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $f \in A$ que verifica

$$f(M_j) = w_j \text{ para } j = 1, ..., n \text{ y } ||f||_\infty < N(A)(w) + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon$$

luego, $w \in D(A)(M)$.

d) $N(H^\infty)(w) \leq N(A)(w)$ es consecuencia de $A \subset H^\infty$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $f \in H^\infty$ tal que

$$f(M_j) = w_j \text{ para } j = 1, ..., n \text{ y } ||f||_\infty < N(H^\infty)(w) + \varepsilon.$$

Sean $a = ||f||_\infty$ y $B = \{v \in \mathbb{C}^n : N(A)(v) \leq a\}$. Para cada r, $0 < r < 1$ sean $f_r(z) = f(rz)$ y $v^r = (v_1^r, ..., v_n^r)$ donde $v_j^r = f(rM_j)$ para $j = 1$ $, ..., n$

entonces, $f_r \in A$, $v^r \in B$, $\lim\limits_{r \to 1^-} v^r = w$ y como B es cerrado $w \in B$, por lo tanto,

$N(A)(w) \leq ||f||_\infty < N(H^\infty)(w) + \varepsilon$ luego $N(A)(w) \leq N(H^\infty)(w)$. □

Proposición 3.1. *Si $D(H^\infty)(M)$ y $D(A)(M)$ son los conjuntos de soluciones del problema de Pick en H^∞ y A, respectivamente, para la n-upla M de los puntos fijados en $\mathbb{D}$. Entonces, $D(H^\infty)(M) = D(A)(M)$.*

Demostración $w \in D(H^\infty)(M)$ si, y sólo si, $N(H^\infty)(w) \leq 1$ si, y sólo si, $N(A)(w) \leq 1$ si, y sólo si, $w \in D(A)(M)$. □

Proposición 3.2. *Sean $\beta = \beta_1 ... \beta_n$ donde $\beta_j(t) = \frac{e^{it} - M_j}{1 - e^{it}\overline{M_j}}$ para $j = 1, ..., n$ e*

$$I := \{f \in A : f(M_j) = 0 \ \ para\ j = 1, \ldots, n\}$$

entonces,

a) I es un ideal cerrado en A.

b) $I = \beta A = \{\beta f : f \in A\}$ y tiene codimensión n.

c) El espacio cociente

$$A/I := \{[f] : f \in A\} \ \ donde\ [f] := \{g \in A : g - f \in I\} = f + I$$

es un álgebra de Banach con unidad con las operaciones $[f] + [g] = [f + g]$, $c\,[f] = [cf]$ y $[f].[g] = [fg]$ para $f, g \in A$, $c \in \mathbb{C}$ y la norma dada por

$$\|[f]\| := \inf \{\|g\|_\infty : g \in [f]\} = dist(f, I).$$

d) Dado $w \in \mathbb{C}^n$, $N\,(A)\,(w) = \|[f_w]\|$ donde $f_w \in A$ y $f_w\,(M_j) = w_j$ para $j = 1, \ldots, n$.

Demostración

b) Si $f \in I$ entonces, $\frac{f}{\beta} = g \in A$ luego, $f = \beta g \in \beta A$ o sea, $I \subset \beta A$. Recíprocamente, si $f \in \beta A$ entonces, $f = \beta g$ donde $g \in A$ y para $j = 1, \ldots, n \quad f(M_j) = \beta(M_j)\, g(M_j) = 0$.

d) Sea $w \in \mathbb{C}^n$. Si $f \in [f_w]$ entonces,

$$f = f_w + g \text{ donde } g \in I \text{ y } f(M_j) = f_w(M_j) = w_j$$

para $j = 1, \ldots, n$ por lo tanto, $N(A)(w) \leq \|[f_w]\|$.

Recíprocamente, dado $\varepsilon > 0$ existe $g \in A$ tal que $g(M_j) = w_j$ para $j = 1, \ldots, n$ y $\|g\|_\infty < N(A)(w) + \varepsilon$. Entonces, $f_w - g = h \in I$ y $g \in [f_w]$ luego, $\|[f_w]\| \leq \|g\|_\infty < N(A)(w) + \varepsilon$. $\square$

La proposición 3.1 establece la equivalencia del problema de Pick en H^∞ y el álgebra del disco $A(\mathbb{T})$.

La existencia de una función $f_w \in A$ tal que $f_w(M_j) = w_j$ para $j = 1, \ldots, n$ es consecuencia de ser A un álgebra uniforme, específicamente de la propiedad de separar puntos de $\overline{\mathbb{D}}$.

Como $\sum(A) = \overline{\mathbb{D}}$ entonces, $M_1, \ldots, M_n \in \mathbb{D}$ si, y sólo si, $F_{M_1}, \ldots, F_{M_n} \in \sum(A)$ luego, para toda $f \in A$ y $j = 1, \ldots, n$

$$f(M_j) = F_{M_j}(f) = \hat{f}\left(F_{M_j}\right) \tag{3.1}$$

de manera que identificando M_j con F_{M_j} podemos escribir para $f \in A$ y $j = 1, \ldots, n$

$$\hat{f}(M_j) = M_j(f) = f(M_j) \tag{3.2}$$

en consecuencia,

$$I = \{f \in A : \hat{f}(M_j) = 0 \text{ para } j = 1, \ldots, n\}.$$

La proposición 3.2 y el comentario anterior nos permite plantear el problema de Pick en los siguientes términos.

"Fijados $M_1, \ldots, M_n \in \sum(A)$ y $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ y dada la clase $[f_w]$ tal que para toda $f \in [f_w]$, $f(M_j) = w_j$ para $j = 1, \ldots, n$. Dar condiciones necesarias y suficientes para que

$$\|[f_w]\| \leq 1".$$

La formulación precedente del problema de Pick en $A(\mathbb{T})$ nos da una idea de cómo debe plantearse el problema en un álgebra uniforme abstracta.

A continuación presentaremos esa formulación.

4 Problema de Cole-Lewis-Wermer

Sea X un conjunto compacto Hausdorff y sea A un álgebra uniforme sobre X. Entonces, $\hat{A}$ es un álgebra uniforme sobre $\sum(A)$ y por lo tanto, dados elementos distintos $M_1, \ldots, M_n \in \sum(A)$ y números complejos $w_1, \ldots, w_n$ existe $f \in A$ tal que

$$\hat{f}(M_j) = w_j \text{ para } j = 1, \ldots, n.$$

Sea

$$I := \left\{ f \in A : \hat{f}(M_j) = 0 \text{ para } j = 1, \ldots, n \right\}$$

entonces, I es un ideal cerrado en A y tiene codimensión finita n.

El espacio cociente asociado a I, A/I, tiene dimensión finita n, es un álgebra de Banach conmutativa con unidad con las operaciones entre clases dadas por

$$[f] + [g] = [f + g], \; c[f] = [cf], \; [f] . [g] = [fg] \text{ para } f, g \in A \text{ y } c \in \mathbb{C}$$

y la norma definida por

$$\|[f]\| := \inf \{ \|g\|_\infty : g \in [f] \} = dist(f, I).$$

Fijados $M_1, \ldots, M_n \in \sum(A)$ distintos y números complejos $w_1, \ldots, w_n$ existe la clase $[f_w]$ tal que para toda $g \in [f_w]$ $\hat{g}(M_j) = w_j$ para $j = 1, \ldots, n$.

El problema de Cole-Lewis-Wermes [3],[4] es:

"Fijados $M_1, \ldots, M_n \in \sum(A)$ distintos y $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ y dada la clase $[f_w]$. Dar condiciones necesarias y suficientes para que

$$\|[f_w]\| \leq 1".$$

A continuación daremos una respuesta a este problema para el álgebra $A(\mathbb{T})$.

Sea m la medida de Lebesgue en la circunferencia unitaria normalizada. En lo que sigue, $L^2 = L^2(m)$, $||f||_2 = (\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dm)^{1/2}$, β es el producto de Blashke con ceros $M_1, ..., M_n$ y $A = A(\mathbb{T})$. Observemos que

$$H^2 = \overline{A} \tag{4.1}$$

$$\beta H^2 = \overline{\beta A} = \overline{I} \tag{4.2}$$

$$H^2 \ominus \beta H^2 = \left(\beta H^2\right)^\perp = (I)^\perp = E_\beta \tag{4.3}$$

donde las clausuras son respecto de la norma de L^2. Así pues, βH^2 es la clausura del ideal I en la norma de L^2 y el espacio modelo, E_β, es el ortogonal en H^2 del ideal I, y H^2 tiene la descomposición

$$H^2 = \overline{I} \oplus E_\beta.$$

Los caracteres $M_1, \ldots, M_n$ (ver (3.1) y (3.2)) verifican

$$|M_j(f)| \leq \|f\|_\infty$$

para toda $f \in A$ y $j = 1, \ldots, n$.

Usando la fórmula integral de Cauchy se obtiene, para toda $f \in A$ y $j = 1, \ldots, n$

$$M_j(f) = f(M_j) = \int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) \overline{\frac{1}{1 - \overline{M}_j e^{it}}} dm$$

denotando por $e_j(t) = \frac{1}{1 - \overline{M}_j e^{it}}$ para $j = 1, \ldots, n$, resulta que

$$M_j(f) = \langle f, e_j \rangle \text{ para } j = 1, \ldots, n \text{ y } f \in A \tag{4.4}$$

usando la desigualdad de Schwartz obtenemos:

$$|M_j(f)| \leq \frac{1}{1 - |M_j|} \cdot \|f\|_2 \text{ para } j = 1, \ldots, n \text{ y } f \in A. \tag{4.5}$$

Si $c = \text{máx}\left\{\frac{1}{1-|M_j|} : j = 1, \ldots, n\right\}$. Obtenemos

$$|M_j(f)| \leq c \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dm\right)^{\frac{1}{2}} \text{ para } j = 1, \ldots, n \text{ y } f \in A. \tag{4.6}$$

O sea, los caracteres $M_1, \ldots, M_n$ son también continuos en la norma de L^2. En general se tiene:

Definición 4.1. Una medida de probabilidad μ en $\mathbb{T}$ se dice *dominante* si existe una constante $c > 0$ tal que para todo $j = 1, \ldots, n$ y $f \in A$

$$|M_j(f)| \leq c \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observemos que (4.6) dice que la medida de Lebesgue, m, es dominante. El término de medida dominante fue introducida por Cole-Wermer en [4]. Para la medida dominante, m, tenemos los siguientes resultados.

Proposición 4.1. *Si β es el producto de Blashke con ceros $M_1, ..., M_n$, $I = \beta A(\mathbb{T})$ y $E_\beta = H^2 \ominus \beta H^2$ entonces,*

a) $1 \in E_\beta$ donde 1 es la función $1(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{T}$.

b) $\overline{I} \cap A(\mathbb{T}) \subset I$ o sea, I es cerrado en $A(\mathbb{T})$ en la norma de L^2.

Demostración

a) Es consecuencia del teorema de Cauchy.

b) Sean $f \in A(\mathbb{T})$ y $\{f_m\}_{m\geq 1} \subset I$ tales que $\lim\limits_{m\to\infty} \|f - f_m\|_2 = 0$. Usando (4.4) resulta para $j = 1, \ldots, n$

$$|f(M_j)| = |\langle f - f_m, e_j\rangle| \leq \frac{1}{1 - |M_j|} \|f - f_m\|_2 \to 0 \text{ si } m \to \infty.$$

Luego $f(M_j) = 0$ para $j = 1, \ldots, n$ y $f \in I$. □

Como fue establecido en [2] y señalamos en la introducción, el conjunto $V' = \{g_1, \ldots, g_n\}$, donde

$$g_j(t) = \beta(t) \frac{1}{e^{it} - M_j} \text{ para } j = 1, \ldots, n$$

es una base algebraica de E_β tal que

$$T_\beta g_j = M_j g_j \text{ para } j = 1, \ldots, n$$

y el conjunto $V = \{e_1, \ldots, e_n\}$ donde

$$e_j(t) = \frac{1}{1 - \overline{M}_j e^{it}} \text{ para } j = 1, \ldots, n$$

es una base de E_β tal que

$$T_\beta^* e_j = \overline{M}_j e_j \text{ para } j = 1, \ldots, n.$$

Para cada $G \in H^\infty$ el operador $G(T_\beta) : E_\beta \to E_\beta$ definido por

$$G(T_\beta)e := P_\beta G e \text{ para } e \in E_\beta$$

donde P_β es la proyección ortogonal de H^2 sobre E_β, verifica para $j = 1, \ldots, n$

$$\begin{array}{rcl} G(T_\beta)g_j & = & G(M_j)\, g_j \\ G(T_\beta)^* e_j & = & \overline{G(M_j)} e_j . \end{array}$$

Si $f \in A(\mathbb{T}) \subset H^\infty$ denotamos por S_f al operador $f(T_\beta)$ y se tiene:

Proposición 4.2. *Si β es el producto de Blashke con ceros $M_1, ..., M_n$, $I = \beta A(\mathbb{T})$ y $E_\beta = H^2 \ominus \beta H^2$ entonces,*

a) Para cada $f \in A(\mathbb{T})$ $\quad S_f \in L(E_\beta)$ y $\|S_f\| \leq \|f\|_\infty$.

b) Para todo $f,\ g \in A(\mathbb{T})$ y $c \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} S_{cf+g} &= cS_f + S_g \\ S_{fg} &= S_f S_g \\ S_1 &= 1_{E_\beta} \end{aligned}$$

donde 1_{E_β} es el operador identidad de E_β.

c) Si $f \in I$ entonces, $S_f = 0$.

Se deduce de la proposición anterior que:

$$S_{f+g} = S_f \text{ para toda } f \in A(\mathbb{T}) \text{ y } g \in I.$$

Por lo tanto, para cada clase $[f] \in A/I$ el operador $S_{[f]} : E_\beta \to E_\beta$ definido por $S_{[f]}e := S_f e$ para todo $e \in E_\beta$ está bién definido, y se tiene:

Proposición 4.3. *Si β es el producto de Blashke con ceros $M_1, ..., M_n$, $I = \beta A(\mathbb{T})$ y $E_\beta = H^2 \ominus \beta H^2$ entonces,*

a) Para cada $[f] \in A/I, S_{[f]} \in L(E_\beta)$ y $\left\|S_{[f]}\right\| \leq \|[f]\|$.

b) Para toda $[f], [g] \in A/I$ y $c \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{rcl} S_{c[f]+[g]} & = & cS_{[f]} + S_{[g]} \\ S_{[f][g]} & = & S_{[f]}S_{[g]} \\ S_{[1]} & = & 1_{E_\beta}. \end{array}$$

O sea, la aplicación $S : A/I \to L(E_\beta)$ definida por

$$S([f]) := S_{[f]} \text{ para } [f] \in A/I$$

es una representación continua del álgebra A/I por operadores en E_β.

c) La representación $S([f]) = S_{[f]}$ *es un isomorfismo. Es decir, si* $S_{[f]} = 0$ *entonces,* $[f] = [0] = I$.

Demostración

c) Si $S_{[f]} = 0$ entonces, $S_{[f]}e = P_\beta f e = 0$ para todo $e \in E_\beta$. Luego, $fe \in \overline{I}$ para todo $e \in E_\beta$, por lo tanto $f \in \overline{I} \cap A(\mathbb{T}) \subset I$ de donde resulta $[f] = I$. □

La respuesta al problema de Cole-Lewis-Wermer para el álgebra $A(\mathbb{T})$ y la medida dominante m es:

Teorema 4.1. *Fijados* $M_1, \ldots, M_n \in \sum(A(\mathbb{T}))$ *distintos y* $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$, *y dada la clase* $[f_w]$ *tal que para toda* $g \in [f_w]$ $g(M_j) = w_j$ *para* $j = 1, \ldots, n$. *Las siguientes condiciones son equivalentes*

a) $\|[f_w]\| \leq 1$.

b) $\left\|S_{[f_w]}\right\| \leq 1$.

c) La matriz $\left(\frac{1-\overline{w}_j w_k}{1-\overline{M}_j M_k}\right)_{j,k=1}^{n}$ *es positiva semidefinida.*

Referencias

[1] Bonsall, F. F., Duncan, J., *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1973.

[2] Cedeño, G., Cotlar, M., *Condición de Unicidad para el Problema de Pick*, Divulgaciones Matemáticas **8** (2) (2000) 99-112.

[3] Cole, B., Lewis, K., Wermer, J., *Pick Conditions on a Uniform Algebra and Von Neumann Inequalities*, Jour. of Func. Anal., **107** (2) (1992), 234-244.

[4] Cole, B., Wermer, J., *Pick Interpolation Von Neumann Inequalities and Hyperconvex Sets*, (Preprint).

[5] Gamelin, T., *Uniform Algebras*, Prentice-Hall, Chelsea Publishing, New York, 1984.

[6] Hoffman, k., *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall Englewood Cliffs, N.J., 1962.