Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 22, pp. 513-520, May 2011

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

SUR UNE CLASSE DE FORMES BIQUADRATIQUES SEMI-DÉFINIES POSITIVES *

MOHAMED EL KADIRI †

Résumé. Poursuivant l'étude des formes biquadratiques semi-définies positives sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ([1], [9] et [10]), nous caractérisons celles qui se décomposent en la somme de carrés de formes bilinéaires.

On a class of positive semidefinite biquadratic forms

Abstract. Continuing the study of positive semidefinite biquadratic forms on $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ([1], [9] and [10]), we characterize those among them that are the sum of squares of bilinear forms.

Key words. Bilinear forms, Biquadratic forms, Positive operators, Completely positive operators.

AMS subject classifications. 11E25, 11E39, 15A63.

1. Introduction.

Selon la terminologie traditionnelle on entend par 'forme' un polynôme homogène de plusieurs variables. Dans cet article toutes les formes considérées sont à coefficients réels. En particulier une forme biquadratique est une forme de degré 4 en deux ensembles de variables réelles habituellement désignées par $x = (x_1, \ldots, x_m)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ par rapport à chacun d'eux elle est une forme quadratique. En d'autre termes, elle est de la forme

$$F(x, y) = \sum a_{jkpq} x_j x_k y_p y_q,$$

où $a_{jkpq} \in \mathbf{R}$, $j, k = 1, \ldots, m$; $p, q = 1, \ldots, n$.

Le carré d'une forme bilinéaire $f(x, y) = \sum \beta_{ij} x_i y_j$ est un exemple de forme biquadratique semi-définie positive (i.e. positive sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$). On peut alors se demander si toute forme biquadratique semi-définie positive est la somme de carrés de formes bilinéaires.

Pour $n = 2$, cette question a une réponse positive. A.P Calderón [5] a montré en 1973 le résultat suivant.

THÉORÈME. *Soit $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Considérons une forme*

$$F(x, y) = a(x, x)y_1^2 + b(x, x)y_1 y_2 + c(x, x)y_2^2,$$

*Received by the editors on January 25, 2010. Accepted for publication on February 27, 2011. Handling Editor : João Filipe Queiró.

†B.P. 726, Salé-Tabriquet, Salé, Morocco.

Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 22, pp. 513-520, May 2011

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

où a, b, c sont des formes bilinéaires à coefficients réels. Si F est semi-définie positive alors F admet la représentation en somme finie

$$F(x,y) = \sum_i (u_i(x)y_1 + v_i(x)y_2)^2,$$

où u_i et v_i sont des formes linéaires réelles.

Quelques années plus tard, Man-Duen Choi [7, p. 96] montra que si $m = n = 3$ il existe des formes biquadratiques semi-définies positives qui ne peuvent pas s'écrire sous forme de sommes de carrés de formes bilinéaires, ajoutant ainsi une classe intéressante d'exemples à ceux, peu nombreux, illustrant le théorème de Hilbert (de démonstration originale compliquée, ne reposant pas sur des exemples) selon lequel les formes semi-définies positives ne sont pas nécessairement des sommes de carrés de polynômes.

Avec l'exemple de Choi se pose la question de caractériser précisement les formes biquadratiques semi-définies positives qui sont des sommes de carrés de formes bilinéaires. Notre but dans ce travail est de répondre à cette question.

Nous précisons d'abord les notations qui seront utilisées tout au long de cet article. Soient $m, n \geq 2$ deux entiers, on note $\mathbf{Q}^+_{m,n}$ le cône des formes biquadratiques semi-définies positives sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. L'importance des formes biquadratiques semi-définies positives réside dans leur lien avec les opérateurs linéaires sur les matrices réelles symétriques. On note $\mathcal{S}_n$ l'espace des matrices réelles symétriques d'ordre n, $\mathcal{S}_n^+$ le cône positif de $\mathcal{S}_n$, c'est-à-dire le cône des matrices semi-définies positives de $\mathcal{S}_n$, et $\mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ le cône des opérateurs linéaires positifs de $\mathcal{S}_m$ dans $\mathcal{S}_n$. Rappelons qu'une matrice réelle symétrique est semi-définie positive si ses valeurs propres sont positives et qu'un opérateur linéaire $A : \mathcal{S}_m \to \mathcal{S}_n$ est dit positif si $A(\mathcal{S}_m^+) \subset \mathcal{S}_n^+$, autrement dit, s'il transforme les matrices semi-définies positives en matrices semi-définies positives. A tout opérateur $A \in \mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ correspond une forme biquadratique unique $F \in \mathbf{Q}^+_{m,n}$ définie par $F(x, y) = y^T A(xx^T)y$. Inversement, à toute forme biquadratique $F \in \mathbf{Q}^+_{m,n}$ est associé un opérateur unique $A \in \mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ tel que $F(x, y) = y^T A(xx^T)y$. Cette dérnière correspondance est moins évidente à établir ; on pourra consulter à ce sujet [7, p. 97].

Dans ce travail, nous allons caractériser les formes biquadratiques semi-définies positives qui sont des sommes de carrés de formes bilinéaires. Plus précisement, nous allons montrer que ce sont exactement celles dont les opérateurs associés sont complètement positifs.

2. Résultats. Soient E et F deux espaces vectoriels réels ou complexes, on note $\mathcal{L}(E, F)$, ou tout simplement $\mathcal{L}(E)$ si $E = F$, l'espace vectoriel des applications linéaires (opérateurs) de E dans F, et on identifie les éléments de $\mathcal{L}(K^m, K^n)$ avec

Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 22, pp. 513-520, May 2011

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

leur matrices dans les bases canoniques de K^m et K^n, où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si G et H sont des sous-espaces réels ou complexes de E et F respectivement et si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est tel que $A(G) \subset H$, alors A induit un opérateur dans $\mathcal{L}(G, H)$ qui sera appelé l'opérateur de G dans H induit par A.

Soit $\Sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. On définit un opérateur $\rho(\Sigma) \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ en posant pour tout $\Phi \in \mathcal{S}_m$

$$\rho(\Sigma)(\Phi) = \Sigma\Phi\Sigma^T,$$

où Σ^T est l'opérateur transposé de Σ. Pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, on a

$$\rho(\Sigma)(xx^T) = (\Sigma x)(\Sigma x)^T.$$

Il résulte alors de la théorie spectrale classique que $\rho(\Sigma)$ définit un opérateur de $\mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ (utiliser [11, p. 399] en prenant pour A et C respectivement I et Σx).

Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier

i) Pour tous $\Sigma_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), \Sigma_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, on a

$$\rho(\Sigma_2)\rho(\Sigma_1) = \rho(\Sigma_2\Sigma_1)$$

ii) Si $\Sigma \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$, alors $\rho(\Sigma) \in \mathcal{GL}(\mathcal{S}_n)$ et l'on a

$$\rho(\Sigma)^{-1} = \rho(\Sigma^{-1}).$$

De même, pour tout $V \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$, notons $\varrho(V)$ l'élément de

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}_m(\mathbb{C}), \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$$

défini par $\varrho(V)(\Phi) = V\Phi V^*$ pour tout $\Phi \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. Remarquons que si la matrice Σ est réelle on a $\varrho(\Sigma)(\mathcal{S}_m) \subset \mathcal{S}_n$ et $\varrho(\Sigma) = \rho(\Sigma)$ sur $\mathcal{S}_m$, donc $\rho(\Sigma)$ est l'opérateur de $\mathcal{S}_m$ dans $\mathcal{S}_n$ induit par $\varrho(\Sigma)$.

Soit Q une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, alors il existe un opérateur $\Sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ tel que $Q(x, y) = y^T\Sigma x$, d'où $Q(x, y)^2 = y^T\rho(\Sigma)(xx^T)y$ pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Donc, l'opérateur associé à la forme biquadratique $Q(x, y)^2$ est $\rho(\Sigma)$.

Il serait intéressant de déterminer les éléments extrémaux du cône $\mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$. On note $\widehat{\mathrm{Ext}}(\mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n))$ l'ensemble des génératrices extrémales du cône $\mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$, et on dira qu'un opérateur de $\mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ est extrémal s'il appartient à une génératrice

Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 22, pp. 513-520, May 2011

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

extrémale de $\mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ (pour la définition des points extrémaux et des génératrices extrémales, on renvoie par exemple à [14, p. 168]). De même, on dira qu'une forme biquadratique $F \in \mathbf{Q}^+_{m,n}$ est extrémale si elle appartient à une génératrice extrémale du cône $\mathbf{Q}^+_{m,n}$. Il est clair qu'une forme biquadratique $F \in \mathbf{Q}^+_{m,n}$ est extrémale si et seulement si l'opérateur $A \in \mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ associé à F est extrémal. Le théorème suivant donne une classe importante d'éléments extrémaux de $\mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$.

THEOREM 2.1. ([10] pour $m = n$.) *Pour tout* $\Sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, *l'opérateur* $\rho(\Sigma)$ *appartient à* $\widehat{\mathrm{Ext}}(\mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n))$.

Démonstration. Le cas où $\Sigma = 0$ est trivial ; on suppose donc que $\Sigma \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^m$, alors on a $\rho(\Sigma)(xx^T) = (\Sigma x)(\Sigma x)^T \in \widehat{\mathrm{Ext}}(\mathcal{S}^+_n)$. Si $A \in \mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$, non nul, est tel que $\rho(\Sigma) - A \in \mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$, alors $\rho(\Sigma)(xx^T) - A(xx^T) \in \mathcal{S}^+_n$, et, par suite, il existe un réel $\alpha(x) \in [0, 1]$ tel que $A(xx^T) = \alpha(x)\rho(\Sigma)(xx^T)$. On va montrer qu' on peut choisir le réel $\alpha(x)$ indépendant de x, ce qui démontrera le théorème. Posons $A(xx^T) = (a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq n}$ et $\Sigma = (b_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$. Soit $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$, où $\{e_i; 1 \leq i \leq m\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Alors $xx^T = \sum_{i=1}^m x_i^2 e_i e_i^T + \sum_{1\leq i<j\leq m} x_i x_j (e_i e_j^T + e_j e_j^T)$. Or $A(e_i e_i^T)$ et $A(e_i e_j^T + e_j e_i^T)$ sont des matrices symétriques, il en résulte que les entrées $a_{ij}(x)$ de $A(xx^T)$ sont des fonctions quadratiques homogènes (formes quadratiques en les x_i). Comme la matrice $(a_{ij}(x))$ est semi-définie positive non identiquement nulle, il existe un entier $i, 1 \leq i \leq n$, tel que le polynôme $P(x) = a_{ii}(x)$ soit non identiquement nul. Posons $L(x) = \sum_{j=1}^m b_{ij} x_j$. On a alors $P(x) = \alpha(x)L(x)^2$ pour tout x. Rappelons qu'en diagonalisant la matrice symétrique associée à une forme quadratique, nous pouvons écrire cette dérnière comme combinaison de carrés de forme linéaires et, dans le cas où elle est semi-définie positive, les coefficients de cette combinaison sont tous positifs (voir [12, p. 370]). Le polynôme P étant homogène positif de degré 2, on peut donc écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, $P(x) = P_1(x)^2 + P_2(x)^2 + \ldots + P_r(x)^2$, où $P_1, P_2, \ldots, P_r$ sont des formes linéaires non identiquement nulles sur $\mathbb{R}^m$. La relation $P(x) = \alpha(x)L(x)^2$ pour tout x entraine que les formes linéaires $P_1, P_2, \ldots P_r$ et L ont les mêmes noyaux, donc proportionnelles, ce qui permet bien de choisir $\alpha(x)$ indépendant de x et achève la démonstration du théorème. $\square$

REMARQUE 2.2. On peut remarquer que de l'équation $P(x) = \alpha L(x)^2$ et de la remarque qui la précède, le reste peut aussi se déduire de [3, p. 86], qui donne un corollaire du théorème des zéros de Hilbert dans le cas réel : Soit I un idéal premier et P un polynôme dans $\mathbb{R}[x] = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Si P s'annulle sur la variété définie par I, alors il existe un entier $m \geq 1$ et une somme de carrés (sos) ("sum of squares") de polynômes réels tels que P^{2m}+sos $\in I$. Pour notre cas nous choisissons I=idéal$(L(x))$, I est un idéal premier, donc un idéal réel [3, p. 84], d'où on a $P^m \in I$, et donc $P \in I$ puisque I est premier. On en déduit que $P = pL$ pour un certain polynôme p. Répétant ce raisonnement pour (p, L) à la place de (P, L), on voit que $p = p_1 L$ pour un certain

Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 22, pp. 513-520, May 2011

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

$p_1 \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. En substituant, on obtient $P(x) = p_1 L(x)^2$, de sorte que, quitte à changer la valeur de $\alpha(x)$ pour les x tels que $\Sigma x = 0$, on ait $p_1 = \alpha$, et donc α est un polynôme. Comme P et $\alpha L(x)^2$ sont de degrés 2, α est une constante.

Rappelons qu'un système d'opérateurs est un $\mathbb{C}$-sous-espace $\mathcal{S}$ d'une $\mathbb{C}^*$-algèbre $\mathcal{B}$ admettant un élément unité 1 tel que $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ est auto-adjoint) et $1 \in \mathcal{S}$, où

$$\mathcal{S}^* = \{x^*; x \in \mathcal{S}\}.$$

Ainsi le $\mathbb{C}$-sous-espace $\mathcal{S}_n + \mathrm{i}\mathcal{S}_n$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un système d'opérateurs.

Soit $\mathcal{S}$ un système d'opérateurs d'une $\mathbb{C}^*$-algèbre $\mathcal{B}$. On note $\mathcal{M}_k(\mathcal{S})$ l'espace des matrices carrées d'ordre $k \geq 1$ à entrées dans $\mathcal{S}$. Lorsque $\mathcal{S} = \mathcal{B}$, alors $\mathcal{M}_k(\mathcal{B})$ hérite de $\mathcal{B}$ d'une structure de $\mathbb{C}^*$-algèbre (voir [13, p. 2]). Un opérateur A de $\mathcal{S}$ dans une $\mathbb{C}^*$-algèbre $\mathcal{C}$ est dit complètement positif (c.p. en abrégé) si pour tout entier $k \geq 1$ et toute matrice positive $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_k(\mathcal{S})$, la matrice $(A(a_{ij}))$ de $\mathcal{M}_k(\mathcal{C})$ est positive. Rappelons qu'un élément a d'une $\mathbb{C}^*$-algèbre $\mathcal{C}$ est positif s'il existe $b \in \mathcal{C}$ tel que $a = bb^*$ (voir [2, p. 36], [13, p. 1] ou combiner p. 207 avec p. 67 de [2]) et qu'une matrice $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_k(\mathcal{S})$ est positive si elle est positive dans l'algèbre $\mathcal{M}_k(\mathcal{B})$.

Rappelons le théorème suivant de M.-D. Choi ([6, p. 286]) :

Theorem 2.3. *Soit A un opérateur de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes*

1. *A est c.p.*
2. *Il existe des matrices $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ telles que*

$$A = \varrho(\Sigma_1) + \cdots + \varrho(\Sigma_k).$$

Rappelons également le résultat suivant

Theorem 2.4. ([13, Th. 6.2].) *Soit $\mathcal{S}$ un système d'opérateurs dans une $\mathbb{C}^*$-algèbre $\mathcal{B}$. Alors pour tout opérateur A c.p. de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un opérateur B c.p. de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui prolonge A.*

Soit maintenant un opérateur linéaire $A : \mathcal{S}_m \longrightarrow \mathcal{S}_n$. On note $\tilde{A}$ le prolongement canonique de A à $\mathcal{S}_m + \mathrm{i}\mathcal{S}_m$ et $\mathcal{S}_n + \mathrm{i}\mathcal{S}_n$ défini par

$$\tilde{A}(\Phi + \mathrm{i}\Psi) = A(\Phi) + \mathrm{i}A(\Psi).$$

L'opérateur $\tilde{A}$ ainsi défini est donc $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathcal{S}_m + \mathrm{i}\mathcal{S}_m$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

On dira que l'opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ est c.p. si $\tilde{A}$ est c.p. C'est le cas si A est l'opérateur de $\mathcal{S}_m$ dans $\mathcal{S}_n$ induit par un opérateur c.p. $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_m(\mathbf{C}), \mathcal{M}_n(\mathbf{C}))$, tel

Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 22, pp. 513-520, May 2011

que $L(\mathcal{S}_m) \subset \mathcal{S}_n$.

Le théorème suivant donne une caractérisation des opérateurs de $\mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ qui correspondent aux formes biquadratiques qui sont des sommes de carrés de formes bilinéaires.

THEOREM 2.5. *Soit $A \in \mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) *Il existe des opérateurs $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, tels que $A = \sum_{i=1}^k \rho(\Sigma_i)$.*

ii) *A est c.p.*

Démonstration. Supposons que A est de la forme $\sum_{i=1}^k \rho(\Sigma_i)$ avec $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Alors A est l'opérateur de $\mathcal{S}_m$ dans $\mathcal{S}_n$ induit par l'opérateur $\sum_{i=1}^k \varrho(\Sigma_i) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_m(\mathbb{C}), \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. On en déduit que $\tilde{A}$ est l'opérateur $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathcal{S}_m + i\mathcal{S}_m$ dans $\mathcal{S}_n + i\mathcal{S}_n$ induit par $\sum_{i=1}^k \varrho(\Sigma_i)$, et donc d'après le théorème de Choi qu'il est c.p., donc A est c.p., d'où l'implication i)$\Longrightarrow$ii).

Réciproquement, soit $A \in \mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ qui soit c.p. D'après le théorème 2.4, A se prolonge en un opérateur c.p. $B \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_m(\mathbb{C}), \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. Mais d'après le théorème de Choi, on peut trouver des opérateurs $\Lambda_1, \dots, \Lambda_l \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$, tels que $B = \sum_{i=1}^l \varrho(\Lambda_i)$. Or, pour tout $1 \leq i \leq l$, on peut écrire $\Lambda_i = M_i^1 + \mathrm{i} M_i^2$, où $M_i^1, M_i^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, et donc, pour tout $\Phi \in \mathcal{S}_m$, on a

$$A(\Phi) = B(\Phi) = \sum_{i=1}^l \rho(M_i^1)(\Phi) + \sum_{i=1}^l \rho(M_i^2)(\Phi) + \mathrm{i} \sum_{i=1}^l (M_i^2 \Phi {M_i^1}^T - M_i^1 \Phi {M_i^2}^T);$$

et comme $A(\Phi) \in \mathcal{S}_n$, on a donc $\sum_{i=1}^l (M_i^2 \Phi {M_i^1}^T - M_i^1 \Phi {M_i^2}^T) = 0$, et donc $A(\Phi) = \sum_{i=1}^l \rho(M_i^1)(\Phi) + \sum_{i=1}^l \rho(M_i^2)(\Phi)$, d'où le résultat. $\square$

Si F est une forme biquadratique sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, pour voir qu'elle est la somme de carrés de formes bilinéaires, il suffit donc de vérifier que l'opérateur A associé est une somme d'opérateurs de la forme $\rho(\Sigma)$.

COROLLARY 2.6. *Une forme biquadratique F sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ est la somme de carrés de formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ si et seulement si l'opérateur $A \in \mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ associé à F est c.p.*

On note $\mathbf{P}_{c.p.}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ le cône des éléments c.p. de $\mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$. Ce cône admet évidemment une section affine compacte C qui l'engendre, c'est-à-dire telle que $\mathbf{P}_{c.p.}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n) = \mathbb{R}_+ C$. En d'autres termes, C est l'intersection de $\mathbf{P}_{c.p.}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ et d'un hyperplan affine de $\mathcal{L}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ ne passant pas par 0 et rencontrant toutes les

Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 22, pp. 513-520, May 2011

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

génératrices extrémales de $\mathbf{P}_{c.p.}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$. Plus précisement, soient $\{e_1, \dots, e_m\}$ et $\{f_1, \dots, f_n\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement, considérons l'ensemble

$$C = \{A \in \mathbf{P}_{c.p.}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n); \sum_{1\le i\le m, 1\le k\le n} f_k^T A(e_i e_i^T) f_k + \sum_{1\le i<j\le m, 1\le k\le n} f_k^T A(E_{ij}) f_k = 1\},$$

où $E_{ij} = (e_i + e_j)(e_i + e_j)^T$. Alors C est une section affine compacte de $\mathbf{P}_{c.p.}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$. En effet, il est clair que C est une section affine de $\mathbf{P}_{c.p.}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$, il suffit donc de montrer qu'elle engendre $\mathbf{P}_{c.p.}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ et qu'elle est compacte. Pour cela remarquons que si un opérateur $A \in \mathbf{P}_{c.p.}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ est tel que $\sum_{i,k} f_k^T A(e_i e_i^T) f_k + \sum_{1\le i<j\le m, 1\le k\le n} f_k^T A(E_{ij}) f_k = 0$, alors $A = 0$. En effet, si A est un tel opérateur, alors on a $A(e_i e_i^T) = 0$ pour tout i et $A(E_{ij}) = 0$ pour tous $1 \le i < j \le m$, et donc $A = 0$ puisque les matrices $e_i e_i^T$, $1 \le i \le m$, et E_{ij}, $1 \le i < j \le m$, sont semi-définies positives et forment une base de $\mathcal{S}_m$. Ceci montre que C engendre $\mathbf{P}_{c.p.}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$. Montrons maintenant que C est compacte. Il n'est pas difficile de voir que l'ensemble C est fermé. Supposons qu'un opérateur Y et un $A_0 \in C$ sont tels que $A_0 + \lambda Y \in C$ pour tout $\lambda \ge 0$. Alors on a nécessairement $\sum_{i,k} f_k^T Y(e_i e_i^T) f_k + \sum_{1\le i<j\le m, 1\le k\le n} f_k^T Y(E_{ij}) f_k = 0$. Or on a aussi pour tout $\lambda > 0$, $\frac{1}{\lambda} A_0 + Y \in P_{c.p.}(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_m)$. En faisant tendre λ vers $+\infty$ on obtient $Y \in P_{c.p.}(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_m)$. En appliquant à Y ce qui a été dit plus haut pour A, on voit que $Y = 0$. Ainsi nous avons montré que C admet un cône de récession trivial. D'après [14, p. 64], ceci dit précisement que C est borné, donc compact.

Corollary 2.7. *Les éléments de $\widehat{\mathrm{Ext}}(\mathbf{P}_{c.p.}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n))$ sont exactement ceux de la forme $\rho(\Sigma)$ pour un certain $\Sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. Si $A \in \widehat{\mathrm{Ext}}(\mathbf{P}_{c.p.}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n))$, alors $A \in \mathbf{P}_{c.p.}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n) \subset \mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ par définitions de l'extrémalité et de $\mathbf{P}_{c.p.}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$. Donc, d'après le théorème 2.4, on a $A = \sum_{i=1}^k \rho(\Sigma_i)$ pour certains $\Sigma_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Comme pour de tels Σ et tout réel λ on a $\rho(\lambda\Sigma) = \lambda^2 \rho(\Sigma)$, on peut supposer que pour deux indices quelconques $i \ne j$, on a $\mathbb{R}_+\Sigma_i \ne \mathbb{R}_+\Sigma_j$. Il résulte alors de l'extrémalité de A que $k = 1$, ce qui prouve l'inclusion dans un sens.

Réciproquement, soit $\Sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, alors on a d'après les théorèmes 2.1 et 2.4, $\rho(\Sigma) \in P_{c.p.}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n) \cap \widehat{\mathrm{Ext}}(P(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n))$. Or on a $P_{c.p.}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n) \subset P(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$, ce qui entraîne $\rho(\Sigma) \in \widehat{\mathrm{Ext}}(P_{p.c.}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n))$. $\square$

Ainsi, alors que le problème de déterminer les génératrices extrémales de

$$P(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$$

est considéré comme étant difficile, voir [7, p. 98], nous avons identifié les génératrices extrémales de $P_{c.p.}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$.

Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810
A publication of the International Linear Algebra Society
Volume 22, pp. 513-520, May 2011

ELA
http://math.technion.ac.il/iic/ela

Le théorème de Calderón [5], cité dans l'introduction, qui affirme que si $m = 2$ ou $n = 2$, alors toute forme biquadratique semi-définie positive sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ est somme de carrés de formes bilnéaires sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, se traduit par le fait que tout opérateur positif de $\mathcal{S}_2$ dans $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{S}_n$ dans $\mathcal{S}_2$) est c.p. d'après le théorème précédent.

Corollary 2.8. *Pour $m = 2$ ou $n = 2$, les éléments extrémaux de*

$$\widehat{\mathrm{Ext}}(\mathbf{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n))$$

sont exactement ceux de la forme $\rho(\Sigma)$ pour un certain $\Sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Remerciement. L'auteur tient à remercier le referee anonyme pour les nombreuses remarques, suggestions et indications bibliographiques qu'il a bien voulu lui faire et qui ont conduit à la présente version.

RÉFÉRENCES

[1] B. Aqzzouz and M. El Kadiri. Remarques sur les formes biquadratiques semi-définies positives. *Rend. Accad. XL Math. Appl*, 58:407–424, 2003.

[2] W. Arveson. *An Invitation to $\mathbb{C}^*$-Algebra.* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 39, Springer-Verlag, New York, 1976.

[3] J. Bochnak, M. Coste, and M.-F. Roy. *Real Algebraic Geometry.* Springer, 1998.

[4] F.F. Bonsall and J. Duncan. *Complete Normed Algebras.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 80, Springer-Verlag, New York, 1973.

[5] A.P. Calderón. A note on biquadratic forms. *Linear Algebra Appl.*, 7:175–177, 1973.

[6] M.D. Choi and T.Y. Lam. Completely positive linear maps on complex matrices. *Linear Algebra Appl.*, 10:285, 1975.

[7] M.D. Choi. Positive semidefinite biquadratic forms. *Linear Algebra Appl.*, 12:95–100, 1975.

[8] M.D. Choi and T.Y. Lam. Extremal positive semidefinite forms. *Math. Ann.*, 231:1–18, 1977.

[9] M. El Kadiri. Sur les génératrices extrémales de certains cônes de formes quadratiques doublement positives. *Comptes Rend. Acad. Sci.*, 324:421–425, 1997.

[10] M. El Kadiri. Opérateurs positifs sur certains espaces de formes quadratiques. *Linear Algebra Appl.*, 283:273–288, 1998.

[11] R. Horn and C. Johnson. *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[12] L. Mirsky. *Introduction to Linear Algebra.* Dover Publications (reprint), New York, 1990.

[13] V. Paulsen. *Completely Bounded Maps and Operator Algebras.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[14] T. Rockafellar. *Convex Analysis.* Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, 1997.