General Mathematics Vol. 18, No. 4 (2010), 85–108

Condition de stabilité d'un réseau de files d'attente à deux stations et N classes de clients [1]

Faiza Belarbi, Amina Angelika Bouchentouf

Résumé

Nous étudions l'ergodicité d'un réseau de files d'attente à deux stations et N classes avec $N-3$ feedbacks dans la deuxième station sous la discipline de service FIFO et sous les conditions habituelles $\rho_1 = m_1 + m_N < 1$ et $\rho_2 = \sum_{l=2}^{N-1} m_l < 1$. En utilisant le critère de modèle fluide présenté par Rybko, Stolyar et Dai, nous montrons que si $\rho_1 \leq \rho_2$ alors le modèle fluide est stable et le réseau de files d'attente stochastique est ergodique.

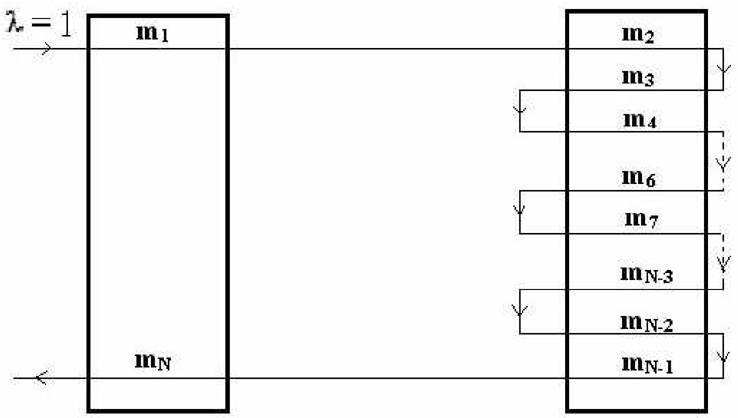
2010 Mathematics Subject Classification : 60K25, 60M20, 90B22.
Key words and phrases : Stabilité, Multiclasses, Service de discipline FIFO, Modèle fluide.

1 Introduction

Notre réseau se compose de deux files d'attente ($i = 1, 2$). A chaque file d'attente il y a un serveur et une salle d'attente de capacité infinie. Les clients suivent un itinéraire fixé par le réseau. Ils arrivent de l'extérieur à la cadence 1, ils vont faire la file 1 où ils ont besoin d'un service de moyenne m_1, et puis aligner 2 où ils ont besoin d'abord d'un service de moyenne m_2, et puis ils éprouvent un feedback à cette file exigeant un service de moyenne m_3, ensuite

[1] *Received 21 January, 2009*
Accepted for publication (in revised form) 17 February, 2009

ils éprouvent encore une fois un autre feedback à la même file exigeant un service de moyenne m_4, les clients continuent les feedbacks jusqu'à ce qu'ils auront leur dernier service dans cette station qui est de moyenne m_{N-1}, ensuite ils reviennent à la première file où ils demandent un service de moyenne m_N et ils quittent le réseau. Donc les clients font $N-3$ feedbacks dans la deuxième station avant de revenir définitivement à la première file d'attente. Par conséquent nous avons N classes de clients, 1 et N à la première file d'attente, et 2, 3, 4,...jusqu'à $N-1$ à la seconde. La discipline est FIFO dans les deux files d'attente.



Réseau à deux stations et N classes avec N-3 feedbacks.

Les conditions nécéssaires de stabilité sont

$$\rho_1 = m_1 + m_N < 1 \;\; et \;\; \rho_2 = \sum_{l=2}^{N-1} m_l < 1. \tag{1}$$

2 Modèle fluide

2.1 Présentation générale

Pour chaque nombre entier $n \geq 1$, soit $\tau(n)$ le temps d'interarrivée entre l'arrivée du $(n-1)^{ieme}$ client et celle du n^{ieme} client de l'extérieur ; le premier client arrive au temps $\tau(1)$: Les temps de services pour le n^{ieme} client dans les différentes classes sont $\sigma_1(n), ..., \sigma_N(n)$.

Nous faisons les présentations suivantes sur les interarrivées et les services. D'abord, nous avons :

$$(2) \qquad \{(\tau(n), \sigma_1(n), ..., \sigma_N(n)), n \geq 1\} \; \textit{est une suite i.i.d.}$$

Ensuite, nous supposons que les variables aléatoires ont les premiers moments finis.

$$(3) \qquad \mathbb{E}[\tau(1)] < \infty \;\; \textit{et} \;\; \mathbb{E}[\sigma_k(1)] = m_k < \infty, \;\; \textit{pour} \;\; k = 1, ..., N$$

Finalement, nous supposons que les interarrivées sont non bornées et leurs distributions sont étendues, c'est à dire

$$(4) \qquad \forall x > 0, \;\; \mathbb{P}[\tau(1) \geq x] > 0$$

On suppose aussi pour un certain nombre entier $n > 0$ et une certaine fonction $p(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $\int_0^\infty p(x)dx > 0$,

$$(5) \qquad \mathbb{P}[a \leq \sum_{j=1}^{n} \tau(j) \leq b] \geq \int_a^b p(x)dx, \;\; \textit{pour tout} \;\; 0 \leq a < b.$$

Sans perte de généralité, nous supposons que $\mathbb{E}[\tau(1)] = 1$. Pour $i = 1, 2$, la charge du travail pour le serveur i par unité de temps est $\rho_1 = m_1 + m_N$ et $\rho_2 = \sum_{l=2}^{N-1} m_l <$. Dans tout ce travail, nous supposons que les conditions (1) sont satisfaites. Nous supposons que la discipline de service dans les deux stations est FIFO.

Dans Dai [3] ou Dumas [4] les auteurs ont présenté un processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ qui décrit la dynamique du réseau de files d'attente.
Pour chaque $t \geq 0$, $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ où $X_i(t)$ est l'état à la station i au temps t.

Puisque la discipline utilisée est FIFO on a besoin de prendre

$$(6) \qquad X_i(t) = (C_i(i, 1), ..., C_t(i, N_i(t)), u(t), v_i(t))$$

où $N_i(t)$ est le nombre de clients à la file i au temps $t \geq 0$ et $C_t(i, h)$ est la classe du h^{eme} client dans la file i au temps t.

Ici, $u(t)$ est le temps résiduel pour le prochain client qui arrive de l'extérieur et $v_i(t)$ est le temps résiduel de service pour le client étant entretenu à la station i au temps t (par convention, si $N_i(t) = 0, v_i(t) = 0$). Dans les présentations (2) et (3) le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov déterministe par morceaux, voir Dai [3]. Comme d'habitude nous identifions la stabilité de notre réseau par la réccurence positive au sens de Harris de $(X_t)_{t\geq 0}$. Nous utiliserons la notion de limite fluide présentée par Rybko et Stolyar [5], et Dai [3]. A cet effet nous allons besoin de quelques notations.

Définition 1 *Pour un état initial donné x, et une classe donnée k à la file i,*
$Q_k(x,t)$ est le nombre de clients de la classe k au temps t.
$A_k(x,t)$ est le nombre d'arrivées de la classe k jusqu'au temps t. (par convention $Q_k(x,0) = A_k(x,0)$).
$D_k(x,t)$ est le nombre de départs de la classe k jusqu'au temps t (avec $D_k(x,0) = 0$)
$T_k(x,t)$ est le temps passé par le serveur $\sigma(k)$ pour servir des clients de la classe k jusqu'au temps t.
$Z_i(x,t)$ est la charge de travail immédiate à la file i au temps t.
Tous ces processus sont pris continus. Nous définissons les processus correspondants de vecteurs Q, A, D et T qui sont de dimension 4 et $Z = (Z_1, Z_2)$.

3 La limite fluide et le modèle fluide

Si x est l'état de réseau, nous notons par $|x|$ le nombre total des clients dans le système dans l'état x. Pour toute suite d'états $(x_n)_{n\geq 0}$ avec $|x_n| > 0$, $\forall n$, et pour tout processus $(H(x_n,t))_{t\geq 0}$, on définit $\overline{H}^n$ par

$$\forall t \geq 0,\ \ \overline{H}^n = \frac{H(x_n, |x_n|t)}{|x_n|}$$

Théorème 1 ***(Dai)*** *Soit (x_n) une suite d'états initiaux avec $|x_n| \to +\infty$, alors il existe une sous suite $(x_\phi(n))$ telle que $(\overline{Q}^{\phi(n)}, \overline{A}^{\phi(n)}, \overline{D}^{\phi(n)}, \overline{T}^{\phi(n)}, \overline{Z}^{\phi(n)})$ converge en loi vers la limite (Q, A, D, T, Z).*
Cette limite satisfait les équations suivantes :

$$(7) \qquad Q_k(t) = Q_k(0) + \mu_{k-1}T_{k-1}(t) - \mu_k T_k(t) \ \ pour \ \ k = 1, ...N$$

avec $\mu_k = \frac{1}{m_k}$ pour $k = 1, ..., N$, $\mu_0 = 1$ et $T_0(t) = t$ pour $t \geq 0$

$$(8) \qquad Q_k(t) \geq 0 \ \ pour \ \ k = 1, ..., N$$

(9) $$D_k(t) = \mu_k T_k(t) \ \ pour \ \ k = 1, ..., N$$

(10) $$T_k(0) = 0 \ \ et \ \ T_k(.) \ \ est \ \ croissant \ \ pour \ \ k = 1, ..., N$$

(11) $$B_1(t) = T_1(t) + T_N(t) \ \ et \ \ B_2(t) = \sum_{l=2}^{N-1} T_l(t)$$

(12) $$Y_i(t) = t - B_i(t) \ \ est \ \ croissant \ \ pour \ \ i = 1, 2,$$

(13) $$Y_i(t) \ \ augmente \ \ seulement \ \ par \ \ t \ \ quand \ \ Z_i(t) = 0, \ \ i = 1, 2$$

(14) $$\begin{cases} Z_1(t) = m_1 Q_1(t) + m_N Q_N(t). \\ Z_2(t) = \sum_{l=2}^{N-1} m_l Q_l(t). \end{cases}$$

(15) $$D_k(t + Z_i(t)) = Q_k(0) + A_k(t) \ \ pour \ \ k = 1, ..., N, \ \ i = \sigma(k)$$

Définition 2 *Toute solution aux équations (7),...,(15) s'appelle modèle fluide. Ainsi n'importe qu'elle limite fluide est un modèle fluide.*

Pour tout $k = 1, ..., N$, les fonctions $t \to T_k(t)$ et $t \to t - T_k(t)$ sont croissantes et nous avons $|T_k(t) - T_k(s)| \leq |t - s|$ pour tout $s, t \geq 0$, donc elles sont absolument continues et par les équations de fluides toutes les fonctions $Q_k(.)$, $B_i(.)$, $Y_i(.)$, et $Z_i(.)$ sont absolument continues.

La condition de conservation du travail (13) est utilisée dans la formule suivante

(16) $$Si \ \ Z_i(t) > 0 \ \ pour \ \ tout \ \ t \in [a, b], \ \ alors \ \ Y_i(a) = Y_i(b)$$

L'équation de FIFO (15) est également connue sous la forme équivalente suivante :

(17) $$D_k(t) = Q_k(0) + A_k(\tau_i(t)) \ \ pour \ \ tout \ \ t \geq t_i = Z_i(0), \ \ i = \sigma(k),$$

avec $\tau_i(t)$ est l'inverse de la fonction $t \to t + Z_i(t)$.

Dans le contexte stochastique, $\tau_i(t)$ est le temps d'arrivée du client actuel en service à la station i si $Z_i(t) > 0$ et $\tau_i(t) = t$ si $Z_i(t) = 0$

Dans la proposition suivante, on va donner les propriétés de la fonction $\tau_i(t)$, $i = 1, 2$ (Pour plus de détails, voir Chen et Zhang [2]).

Proposition 1 *Pour i=1,2, nous avons*

- *a)* $Z_i(\tau_i(t)) = t - \tau_i(t)$ *pour* $t \geq Z_i(0)$,
- *b)* $\tau_i(t)$ *est lipschitziènne sur* $[0, \infty[$,
- *c)* $\tau_i(t)$ *est une fonction croissante et* $\tau_i(t) \to +\infty$ *quand* $t \to +\infty$.

4 Résultat de stabilité :

Théorème 2 *En plus de (1), si nous avons :*

$$\rho_1 \leq \rho_2, \tag{18}$$

alors tout modèle fluide $Q(.)$ *satisfait* $\lim\limits_{t\to+\infty} |Q(t)| = 0$, *et donc le réseau est stable.*

Preuve. Soit $Z(t) = Z_1(t) + Z_2(t)$. Ainsi nous avons

$$\lim_{t\to+\infty} |Q(t)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to+\infty} Z(t) = 0$$

Nous réecrivons les charges de travail aux deux stations sous une forme commode qui nous permet d'employer la propriété de conservation (16).
En utilisant les équations fluides (7), (9),(14) et l'équation de FIFO (17), la charge de travail dans les deux stations peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} Z_1(t) = m_1(Q_1(0) + A_1(t)) + m_N(Q_N(0) + A_N(t)) - t + Y_1(t). \\ Z_2(t) = \displaystyle\sum_{l=2}^{N-1} m_l(Q_l(0) + A_l(t)) - t + Y_2(t). \end{cases} \tag{19}$$

Toutes les relations dans la suite ne peuvent se tenir pour aucun $y \geq 0$ mais seulement pour tout $t \geq T_0$ avec T_0 un temps fini à détèrminer par les données initiales. Et puisque nous étudions le comportement de $Z(t)$ lorsque $t \to \infty$, nous omettrons d'indiquer la constante T_0.

Le réseau est une ligne de réentrée, ainsi nous avons
$A_1(t) = t$, $A_2(t) = D_1(t)$, $A_3(t) = D_2(t)$, $A_4(t) = D_3(t)$,... $A_{N-1}(t) = D_{N-2}(t)$, $A_N(t) = D_{N-1}(t)$,

L'équation de FIFO (17) donne

$$A_1(t) = t \tag{20}$$

(21) $$A_2(t) = D_1(t) = Q_1(0) + A_1(\tau_1(t))$$

(22) $$A_3(t) = D_2(t) = Q_2(0) + A_2(\tau_2(t))$$

(23) $$A_4(t) = D_3(t) = Q_3(0) + A_3(\tau_2(t))$$

$$\vdots$$

(24) $$A_{N-1}(t) = D_{N-2}(t) = Q_{N-2}(0) + A_{N-2}(\tau_2(t))$$

(25) $$A_N(t) = D_{N-1}(t) = Q_{N-1}(0) + A_{N-1}(\tau_2(t))$$

En remplaçant t par $\tau_1(t)$ dans (20) et (25) et par $\tau_2(t)$ dans (21), (22), (23) et (24) nous obtenons

$$\begin{aligned}
&A_1(\tau_1(t)) = \tau_1(t)\\
&A_2(\tau_2(t)) = Q_1(0) + A_1(\tau_1(\tau_2(t)))\\
&A_3(\tau_2(t)) = Q_2(0) + A_2(\tau_2^{(2)}(t))\\
&A_4(\tau_2(t)) = Q_3(0) + A_3(\tau_2^{(2)}(t))\\
&\vdots\\
&\vdots\\
&A_{N-1}(\tau_2(t)) = Q_{N-2}(0) + A_{N-2}(\tau_2^{(2)}(t))\\
&A_N(\tau_1(t)) = Q_{N-1}(0) + A_{N-1}(\tau_2(\tau_1(t)))
\end{aligned}$$

Récapitulons les équations ci-dessus. Pour tout $t \geq T$ (avec T un temps fini)

$$\begin{aligned}
&A_1(t) = t\\
&A_2(t) = Q_1(0) + \tau_1(t)\\
&A_3(t) = Q_1(0) + Q_2(0) + \tau_1(\tau_2(t))\\
&A_4(t) = Q_1(0) + Q_2(0) + Q_3(0) + \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))\\
&\vdots\\
&\vdots\\
&A_{N-1}(t) = \sum_{l=1}^{N-2} Q_l(0) + \tau_1(\tau_2^{(N-3)}(t))\\
&A_N(t) = \sum_{l=1}^{N-1} Q_l(0) + \tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t))
\end{aligned}$$

La substitution de $A_k(t)$ en (19) rapporte
$Z_1(t) = c_1 - m_N(t - \tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t))) + (\rho_1 - 1)t + Y_1(t)$.
$Z_2(t) = c_2 - m_2(t - \tau_1(t)) - m_3(t - \tau_1(\tau_2(t))) - m_4(t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))$
$\quad - ... - m_{N-1}(t - \tau_1(\tau_2^{(N-3)}(t))) + (\rho_2 - 1)t + Y_2(t)$.
où c_1 et c_2 sont des constantes qui ne dépendent pas du temps.

Donc,

$$Y_1(t) = Z_1(t) + m_N(t - \tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t))) - (\rho_1 - 1)t - c_1. \tag{26}$$

$$\begin{aligned} Y_2(t) &= Z_2(t) + m_2(t - \tau_1(t)) + m_3(t - \tau_1(\tau_2(t))) \\ &+ m_4(t-\tau_1(\tau_2^{(2)}(t))) + ... + m_{N-1}(t-\tau_1(\tau_2^{(N-3)}(t))) - (\rho_2-1)t - c_2. \end{aligned} \tag{27}$$

En utilisant la proprieté a) de la proposition 1 nous pouvons réecrire (26) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= Z_1(t) + m_N[t - \tau_2(t) + \tau_2(t) - \tau_2^{(2)}(t) + \tau_2^{(2)}(t) - \tau_2^{(3)}(t) + \tau_2^{(3)}(t) \\ &+ ... + \tau_2^{(N-2)}(t) - \tau_2^{(N-2)}(t) - \tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t))] - (\rho_1 - 1)t - c_1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= Z_1(t) + m_N[\sum_{l=1}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))] \\ &- (\rho_1 - 1)t - c_1. \end{aligned} \tag{28}$$

avec $\tau_2^{(1)}(t) = \tau_2(t)$, et (27) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} Y_2(t) &= Z_2(t) + m_2(t - \tau_1(t)) + m_3[t - \tau_2(t) + \tau_2(t) - \tau_1(\tau_2(t))] \\ &+ m_4[t - \tau_2(t) + \tau_2(t) - \tau_2^{(2)}(t) + \tau_2^{(2)}(t) - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))] + ... \\ &+ m_{N-1}[t - \tau_2(t) + \tau_2(t) - \tau_2^{(2)}(t) + \tau_2^{(2)}(t) - \tau_2^{(3)}(t) + \tau_2^{(3)}(t) \\ &+ ... + \tau_2^{(N-3)}(t) - \tau_2^{(N-3}(t) - \tau_1(\tau_2^{(N-3)}(t))] - (\rho_2 - 1)t - c_2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} Y_2(t) &= Z_2(t) + m_2(Z_1(\tau_1(t))) + m_3[Z_2(\tau_2(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2(t)))] \\ &+ m_4[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] + ... \\ &+ m_{N-1}[\sum_{l=1}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-3)}(t)))] - (\rho_2-1)t - c_2. \end{aligned} \tag{29}$$

avec $\tau_2^{(1)}(t) = \tau_2(t)$.

Nous allons réduire ce problème à l'étude de $Z_1(t)$.

Lemme 1 *Si* $\lim\limits_{t\to+\infty} Z_1(t) = 0$ *alors* $\lim\limits_{t\to+\infty} Z(t) = 0$

Preuve. Soit t un temps tel que $Z_2(t) > 0$ et $a = max\{u < t, Z_2(u) = 0\}$, alors $Y_2(a) = Y_2(t)$. En utilisant la relation (27) et le fait que $Z_2(t) = 0$ nous avons

$$\begin{aligned}
&Z_2(t) + m_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3(t - \tau_1(\tau_2(t))) + m_4(t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))) \\
&+ ... + m_{N-1}(t - \tau_1(\tau_2^{(N-3)}(t))) - (\rho_2 - 1)t - [Z_2(a) + m_2 Z_1(\tau_1(a)) \\
&+ m_3(a - \tau_1(\tau_2(a))) + m_4(a - \tau_1(\tau_2^{(2)}(a))) + ... + m_{N-1}(a - \tau_1(\tau_2^{(N-3)}(a))) \\
&-(\rho_2 - 1)a] = 0.
\end{aligned}$$

$Z_2(a) = 0$ car $a = max\{u < t, Z_2(u) = 0\}$ et $\tau_2(a) = a$ car $Z_2(a) = 0$ donc,

$$\begin{aligned}
&Z_2(t) + m_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3(t - \tau_1(\tau_2(t))) + m_4(t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))) \\
&+ ... + m_{N-1}(t - \tau_1(\tau_2^{(N-3)}(t))) - m_2(Z_1(\tau_1(a))) - m_3(a - \tau_1(a)) \\
&- m_4(a - \tau_1(a)) - ... - m_{N-1}(a - \tau_1(a)) = (\rho_2 - 1)(t - a) \\
&Z_2(t) + m_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3(t - \tau_1(\tau_2(t))) + m_4(t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))) \\
&+ ... + m_{N-1}(t - \tau_1(\tau_2^{(N-3)}(t))) - \rho_2 Z_1(\tau_1(a)) = (\rho_2 - 1)(t - a).
\end{aligned}$$

Comme $\rho_2 < 1$, nous avons

$$\begin{aligned}
Z_2(t) &\leq Z_2(t) + m_2(t - \tau_1(t)) + m_3(t - \tau_1(\tau_2(t))) + m_4(t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))) \\
&+ ... + m_{N-1}(t - \tau_1(\tau_2^{(N-3)}(t))) < \rho_2 Z_1(\tau_1(a)),
\end{aligned}$$

donc,

$$Z_2(t) < \rho_2 \sup_{\tau_2(a) \leq u \leq t} Z_1(u) \tag{30}$$

Maintenant, pour prouver la stabilité, il suffit de prouver que $\lim\limits_{t\to+\infty} Z_1(t) = 0$. Pour toute solution fluide $Q(.)$, on a associé une suite croissante de temps t_i, comme dans Bertsimas, Gamarnik et Tsitsiklik [1] qui satisfait

$$\begin{cases} dans\,(t_{Nm+1}, t_{Nm+2}) & Z_1(t) > 0 & \text{et } Z_2(t) \geq 0 \\ dans\,(t_{Nm+2}, t_{Nm+3}) & Z_1(t) > 0 & \text{et } Z_2(t) > 0 \\ dans\,(t_{Nm+3}, t_{Nm+4}) & Z_1(t) \geq 0 & \text{et } Z_2(t) > 0 \\ \vdots \\ dans\,(t_{Nm+(N-1)}, t_{Nm+N}) & Z_1(t) \geq 0 & \text{et } Z_2(t) > 0 \\ dans\,(t_{Nm+N}, t_{Nm+(N+1)}) & Z_1(t) > 0 & \text{et } Z_2(t) > 0 \end{cases}$$

et par continuité, $Z_2(t_{Nm+1}) = Z_2(t_{Nm+2}) = 0$, et $Z_1(t_{Nm+3}) = ... = Z_1(t_{Nm+(N-1)}) = Z_1(t_{Nm+N}) = 0$.

L'existence de la suite t_i est due au fait que sous les conditions nécéssaires de stabilité (1), pour $i = 1, 2$ l'ensemble des points t auxquels $Z_i(t) = 0$ est illimité.

S'il existe $\delta > 0$ tel que $Z(t) = 0$ pour tout $t \geq \delta$ pour toute limite fluide $Z(.)$, alors $\underset{i \to +\infty}{lim}\, t_i \leq \delta$ et le réseau est stable. Sinon, il existe une solution fluide telle que la suite associée t_i satisfait $\underset{i \to +\infty}{lim}\, t_i = \infty$ et dans tout le reste de la preuve, nous considérons que nous somme dans le deuxième cas.

Pour terminer la preuve du théorème 2, nous avons besoin des inégalités suivantes :

$$\sup_{[t_{Nm+1}, t_{Nm+N}]} Z_1(t) < Z_1(\tau_1(t_{Nm+2})), \tag{31}$$

$$\sup_{[t_{Nm+N}, t_{Nm+(N+1)}]} Z_1(t) < m_N[Z_2(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))], \tag{32}$$

$$\sup_{[t_{Nm+(N+1)}, t_{N(m+1)+2}]} Z_1(t) < m_N[Z_2(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))], \tag{33}$$

Nous allons donner la preuve de la première inégalité, (31). La démonstration détaillée des deuxième et troisième inégalités, (32) et (33) sera donnée à l'appendice.

Preuve de l'inégalité (31) : Soit $t \in (t_{Nm+2}, t_{Nm+(N+1)})$, $Z_2(t) > 0$ et $Y_2(t) = Y_2(t_{Nm+2})$.

En utilisant (27) et le fait que,$Z_2(t_{Nm+2}) = 0$ nous avons

$$\begin{aligned} &Z_2(t) + m_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3(t - \tau_1(\tau_2(t))) + m_4(t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))) + ... \\ &+ m_{N-1}(t - \tau_1(\tau_2^{(N-3)}(t))) - \rho_2 Z_1(\tau_1(t_{Nm+2})) = (\rho_2 - 1)(t - t_{Nm+2}), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
&m_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3[t - \tau_1(\tau_2(t))] + m_4[t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))] + ...\\
&+m_{N-1}[t - \tau_1(\tau_2^{(N-3)}(t))]\\
&= m_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3[t - \tau_1(t) + \tau_1(t) - \tau_1(\tau_2(t))] + m_4[t - \tau_1(t)\\
&+\tau_1(t) - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))] + ... + m_{N-1}[t - \tau_1(t) + \tau_1(t) - \tau_1(\tau_2^{(N-3)}(t))]\\
&= \rho_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3[\tau_1(t) - \tau_1(\tau_2(t))] + m_4[\tau_1(t) - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))]\\
&+m_{N-1}[\tau_1(t) - \tau_1(\tau_2^{(N-3)}(t))].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&Z_2(t) + \rho_2 Z_1(\tau_1(t)) + m_3[\tau_1(t) - \tau_1(\tau_2(t))] + m_4[\tau_1(t) - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t))]\\
&+m_{N-1}[t - \tau_1(t) + \tau_1(t) - \tau_1(\tau_2^{(N-3)}(t))] - \rho_2 Z_1(\tau_1(t_{Nm+2}))\\
&= (\rho_2 - 1)(t - t_{Nm+2}).
\end{aligned}$$

ce qui implique que (quand $\rho_2 < 1$)

$$Z_1(\tau_1(t)) < Z_1(\tau_1(t_{Nm+2})) \ \textit{pour tout} \ t \in [t_{Nm+2}, t_{Nm+(N+1)}],$$

mais la fonction $\tau_1(.)$ est continue est strictement croissante de $[t_{Nm+2}, t_{Nm+(N+1)}]$ dans $[\tau_1(t_{Nm+2}), \tau_1(t_{Nm+(N+1)})]$. D'où, pour tout $t \in [\tau_1(t_{Nm+2}), \tau_1(t_{Nm+(N+1)})]$, nous avons

$$Z_1(t) < Z_1(\tau_1(t_{Nm+2})) \ \textit{pour tout} \ t \in [\tau_1(t_{Nm+2}), \tau_1(t_{Nm+(N+1)})],$$

Par définition de la suite $\{t_i\}$, nous avons en premier lieu $Z_1(t_{Nm+2}) > 0$, ainsi ainsi $\tau_1(t_{Nm+2}) < t_{Nm+2}$, et en second lieu $Z_1(\tau_1(t_{Nm+N})) = 0$, $t_{Nm+(N-1)} = \tau_1(t_{Nm+(N-1)}) \leq \tau_1(t_{Nm+(N+1)})$.
Pour conclure, nous récapitulons tous les résultats.
Nous avons

$$\sup_{[t_{Nm+2}, t_{Nm+N}]} Z_1(t) < Z_1(\tau_1(t_{Nm+2})),$$

et nous avons

$$\sup_{[t_{Nm+N}, t_{N(m+1)+2}]} Z_1(t) < m_N Z_1(\tau_1(t_{Nm+2})),$$

les deux inégalités impliquent, d'une part,

$$Z_1(\tau_1(t_{N(m+1)+2})) < m_N Z_1(\tau_1(t_{Nm+2})) \tag{34}$$

et d'autre part,

$$\sup_{[t_{Nm+2},t_{N(m+1)+2}]} Z_1(t) < Z_1(\tau_1(t_{Nm+2})). \tag{35}$$

La dérnière inégalité (35) est valable pour tout m, en remplaçant m par (m+1). Nous avons

$$\sup_{[t_{N(m+1)+2},t_{N(m+2)+2}]} Z_1(t) < Z_1(\tau_1(t_{N(m+1)+2})).$$

Ainsi, en utilisant (34), nous avons

$$Z_1(t) < m_N Z_1(\tau_1(t_{Nm+2})) \ \ pour \ \ tout \ \ t \in [t_{N(m+1)+2}, t_{N(m+2)+2}]. \tag{36}$$

Maintenant, soit $S_m = t_{Nm+2}$. Si $\lim\limits_{i\to+\infty} t_i = \infty$, alors $\lim\limits_{i\to\infty} S_i = \infty$, et l'inégalité (36) implique que

$$pour \ \ tout \ \ t \in [S_m, S_{m+2}], \ \ Z_1(t) < m_N \sup_{S_{m-2}\le u\le S_m} Z_1(u)$$

par itération et car $m_N < 1$, on aboutit au résultat escompté.

Nous terminerons cette section par deux résultats numériques.
On suppose que les clients arrivent suivant un processus de Poisson de paramètre $\lambda = 1$ et que les temps de services suivent des lois exponentielles de paramètres μ_i.
Dans les tableaux suivantx, nous donnons des exemples de simulation pour illustrer la stabilité du réseau quand la condition (18) du théorème (2) est vérifiée.

- **Cas d'un réseau à deux stations et cinq classes**

μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	Poucentage.
0.3	0.2	0.3	0.3	0.5	51%
0.4	0.2	0.4	0.3	0.2	96%
0.2	0.2	0.3	0.3	0.3	100%
0.6	0.1	0.6	0.1	0.1	87%

Le cas des moyennes $m_1 = 0.2359$, $m_2 = 0.2359$, $m_3 = 0.2979$, $m_4 = 0.2979$, $m_5 = 0.2979$. Le pourcentage est 100% c'est à dire que tous les clients sont servis et le réseau se vide (cas de stabilité).

• **Cas d'un réseau à deux stations et sept classes**

μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	Poucentage.
0.1	0.1	0.3	0.1	0.1	0.1	0.6	54%
0.1	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.2	98%
0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	100%
0.1	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	99%

Le cas des moyennes $m_1 = 0.2359$, $m_2 = 0.0883$, $m_3 = 0.0883$, $m_4 = 0.0883$, $m_5 = 0.0883$, $m_6 = 0.0883$, $m_7 = 0.0883$, Le pourcentage est 100%, les clients sont servis et le réseau se vide (cas de stabilité).

Maintenant, nous donnons des exemples de simulation pour illustrer l'instabilité du réseau quand la condition (18) du théorème (2) n'est pas vérifiée.

• **Cas d'un réseau à deux stations et cinq classes**

μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	Poucentage.
0.5	0.1	0.2	0.3	0.3	0%
0.4	0.2	0.1	0.1	0.4	0%
0.6	0.3	0.2	0.2	0.2	7%
0.8	0.4	0.1	0.1	0.1	0%

Le cas des moyennes $m_1 = 0.5564$, $m_2 = 0.0883$, $m_3 = 0.2359$, $m_4 = 0.2979$, $m_5 = 0.2979$. Le pourcentage est 0% c'est à dire qu'il y a blocage dans le réseau(cas d'instabilité).

• **Cas d'un réseau à deux stations et sept classes**

μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	Poucentage.
0.8	0.2	0.1	0.3	0.1	0.1	0.1	13%
0.5	0.1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.3	0%
0.2	0.3	0.2	0.1	0.1	0.1	0.7	9%
0.6	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0%

Le cas des moyennes $m_1 = 0.5564$, $m_2 = 0.0883$, $m_3 = 0.2359$, $m_4 = 0.0883$, $m_5 = 0.0883$, $m_6 = 0.0883$, $m_7 = 0.2979$. Le pourcentage est 100%, tous les clients sont servis et le réseau se vide (cas d'instabilité).

5 Appendice

La preuve des inégalités (32) et (33) se fait en deux étapes :
Etape 1 :
Nous montrerons l'inégalité suivante :

$$(37) \qquad Z_2(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N}))) < Z_1(\tau_1(t_{Nm+N}).$$

Preuve. Par définition $\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})$ satisfait

$$t_{Nm+2} < \tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N}) < t_{Nm+(N+1)}$$

d'où en utilisant la propriété de conservation (16), nous explicitons la relation (27) pour $t = t_{Nm+2}$ et pour $t = \tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})$ le fait que

$$Y_2(t_{Nm+N}) = Y_2(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})),$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&Z_2(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})) + \rho_2 Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N}))) + m_3(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N}))\\
&-\tau_1(\tau_2^{(N-1)}(t_{Nm+N}))) + m_4(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})) - \tau_1(\tau_2^{(N)}(t_{Nm+N})))\\
&+m_{N-1}(t - \tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})) + \tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N}))\\
&-\tau_1(\tau_2^{(N-3)}(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))) - \rho_2 Z_1(\tau_1(t_{Nm+2}))\\
&= (\rho_2 - 1)(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N}) - t_{Nm+2}).
\end{aligned}$$

La dernière expression peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
&(\rho_2 - 1)(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N}) - t_{Nm+2})\\
&= (\rho_2 - 1)[\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N}) - \tau_2^{(N-3)}(t_{Nm+N}) + \tau_2^{(N-3)}(t_{Nm+N}) - t_{Nm+2}]\\
&= -(\rho_2 - 1)[Z_2(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N}))] + (\rho_2 - 1)(\tau_2^{(N-3)}(t_{Nm+N}) - t_{Nm+2}).
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\rho_2[Z_2(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))] + m_3(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N}))\\
&-\tau_1(\tau_2^{(N-1)}(t_{Nm+N}))) + m_4(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})) - \tau_1(\tau_2^{(N)}(t_{Nm+N})))\\
&+m_{N-1}(t - \tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})) + \tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N}))\\
&-\tau_1(\tau_2^{(N-3)}(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))) - \rho_2 Z_1(\tau_1(t_{Nm+2}))\\
&= (\rho_2 - 1)(\tau_2^{(N-3)}(t_{Nm+N}) - t_{Nm+2}).
\end{aligned}$$

donc

$$Z_2(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})) < Z_1(\tau_1(t_{Nm+2})),$$

Etape 2 : Nous donnons la preuve de la deuxième inégalité
1^{er} **cas**
Si $\tau_2(t) \leq t_{Nm+N} \leq t$, alors nous aurons par la suite :

$$t_{Nm+N} - \tau_2^{(N-3)}(t_{Nm+N}) \leq t - \tau_2^{(N-2)}(t) \leq t - \tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)),$$

i.e

$$\sum_{l=1}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N}) < \sum_{l=1}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) < \sum_{l=1}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)).$$

mais t satisfait encore (comme $Y_1(t) = Y_1(t_{Nm+N})$)

$$\begin{aligned}
&Z_1(t) + m_N[\sum_{l=1}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))] - m_N[\sum_{l=1}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N}))\\
&+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))] = (\rho_1 - 1)(t - t_{Nm+N}) < 0.
\end{aligned}$$

d'où nous avons nécéssairement

$$Z_1(t) < m_N[Z_2(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))].$$

2^{eme} cas : Si $t_{Nm+N} < \tau_2(t) < t < t_{Nm+(N+1)}$, nous avons d'une part,

$$Y_2(\tau_2(t)) = Y_2(\tau_2(t_{Nm+N})),$$

ceci implique que

$$\begin{aligned}
&Z_2(\tau_2(t)) + m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t))) + m_3[Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))]\\
&+m_4[Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_2(\tau_2^{(3)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(3)}(t)))] + ...\\
&+m_{N-1}[\sum_{l=2}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))] - Z_2(\tau_2(t_{Nm+N}))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-m_2Z_1(\tau_1(\tau_2(t_{Nm+N}))) - m_3[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{Nm+N})))]\\
&-m_4[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{Nm+N})) + Z_2(\tau_2^{(3)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(3)}(t_{Nm+N})))]\\
&-... - m_{N-1}[\sum_{l=2}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))]\\
&= (\rho_2 - 1)(\tau_2(t) - \tau_2(t_{Nm+N}))\\
&= (\rho_2 - 1)[\tau_2(t) - t + t + \tau_2(t) - \tau_2(t) + \tau_2^{(2)}(t) - \tau_2^{(2)}(t) + \tau_2^{(3)}(t) - \tau_2^{(3)}(t)\\
&+... + \tau_2^{(N-3)}(t) - \tau_2^{(N-3)}(t) - t_{Nm+N} + t_{Nm+N} - \tau_2(t_{Nm+N}) + \tau_2(t_{Nm+N})\\
&-\tau_2(t_{Nm+N}) + \tau_2^{(2)}(t_{Nm+N}) - \tau_2^{(2)}(t_{Nm+N}) + \tau_2^{(3)}(t_{Nm+N}) - \tau_2^{(3)}(t_{Nm+N})\\
&+... + \tau_2^{(N-3)}(t_{Nm+N}) - \tau_2^{(N-3)}(t_{Nm+N})]\\
&= -(\rho_2 - 1)\sum_{l=1}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t) + (\rho_2 - 1)[t - t_{Nm+N} + \tau_2(t)\\
&-\tau_2(t_{Nm+N}) + \tau_2^{(N-3)}(t_{Nm+N}) - \tau_2^{(N-3)}(t)] + (\rho_2 - 1)\sum_{l=1}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N}).
\end{aligned}
$$

d'où,

$$
\begin{aligned}
(38)\quad &\rho_2\sum_{l=1}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t) + m_2Z_1(\tau_1(\tau_2(t))) + m_3[Z_2(\tau_2^{(2)}(t))\\
&+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] + m_4[Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_2(\tau_2^{(3)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(3)}(t)))]\\
&+... + m_{N-1}[\sum_{l=2}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))]\\
&-\rho_2\sum_{l=1}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N}) - m_2Z_1(\tau_1(\tau_2(t_{Nm+N})))\\
&-m_3[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{Nm+N})))] - m_4[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{Nm+N}))\\
&+Z_2(\tau_2^{(3)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(3)}(t_{Nm+N})))] - ...\\
&-m_{N-1}[\sum_{l=2}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))]\\
&= (\rho_2 - 1)[t - t_{Nm+N} + \tau_2(t) - \tau_2(t_{Nm+N}) + \tau_2^{(N-3)}(t_{Nm+N})\\
&-\tau_2^{(N-3)}(t)] + \sum_{l=2}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t) - \sum_{l=2}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N}).
\end{aligned}
$$

Comme $\rho_2 = \sum_{l=2}^{N-1} m_l$, la dernière égalité peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
&m_2 \sum_{l=1}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) + m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t))) + m_3[Z_2(\tau_2(t)) + 2Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) \\
&+ \sum_{l=3}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] + m_4[Z_2(\tau_2(t)) + 2Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) \\
&+2Z_2(\tau_2^{(3)}(t)) + \sum_{l=4}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(3)}(t)))] + ... \\
&+m_{N-1}[Z_2(\tau_2(t)) + 2\sum_{l=2}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) + Z_2(\tau_2^{(N-2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))] \\
&-m_2 Z_2(\tau_2(t_{Nm+N})) - m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t_{Nm+N}))) - m_3[Z_2(\tau_2(t_{Nm+N})) \\
&+2Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{Nm+N})) + \sum_{l=3}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{Nm+N})))] \\
&-m_4[Z_2(\tau_2(t_{Nm+N})) + 2Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{Nm+N})) + 2Z_2(\tau_2^{(3)}(t_{Nm+N})) \\
&+ \sum_{l=4}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(3)}(t_{Nm+N})))] - ... \\
&-m_{N-1}[Z_2(\tau_2(t_{Nm+N})) + 2\sum_{l=2}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N})) + Z_2(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})) \\
&+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))] \\
&= (\rho_2 - 1)[t - t_{Nm+N} + \tau_2(t)) - \tau_2(t_{Nm+N})) + \tau_2^{(N-3)}(t_{Nm+N}) \\
&-\tau_2^{(N-3)}(t)] + \sum_{l=2}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) - \sum_{l=2}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N})).
\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons $Y_1(t) = Y_1(t_{Nm+N})$ alors la relation (28) nous avons

$$\begin{aligned}
&Z_1(t) + m_N[\sum_{l=1}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))] \\
&-m_N[\sum_{l=1}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))] \\
&= (\rho_1 - 1)(t - t_{Nm+N}).
\end{aligned} \tag{39}$$

qui peut s'écrire comme suit

$$Z_1(t)+m_N[\sum_{l=1}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))]-m_N[\sum_{l=1}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t))$$
$$-Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))]-(\rho_1-1)(t-t_{Nm+N})$$
$$=m_N[\sum_{l=1}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N}))]+m_N[Z_2(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N}))$$
$$+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))].$$

D'où si,

$$Z_1(t)\geq m_N[Z_2(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N}))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))].$$

Alors :

$$m_N[\sum_{l=1}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))]-(\rho_1-1)(t-t_{Nm+N})$$
$$\leq m_N[\sum_{l=1}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N}))].$$

Utilisons la propriété de la fonction $\tau_i(.)$ pour $i=1,2$ nous avons

$$[\sum_{l=1}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))]=[t-\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t))]$$
$$>[t-\tau_1(\tau_2(t))]=[Z_2(\tau_2(t))+Z_1(\tau_1(t))]$$

.

donc,

$$(\rho_1-1)(t-t_{Nm+N})+m_N[\sum_{l=1}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N}))]-m_N[Z_2(\tau_2(t))$$
$$+Z_1(\tau_1(t))]>0. \tag{40}$$

La relation (38) nous permet d'écrire

$$\rho_2(\sum_{l=1}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N})))-\rho_2[\sum_{l=1}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))] \tag{41}$$
$$<(1-\rho_2)[t-t_{Nm+N}+\tau_2(t)-\tau_2(t_{Nm+N})+\tau_2^{(N-3)}(t_{Nm+N})$$
$$-\tau_2^{(N-3)}(t)]+\sum_{l=2}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N})-\sum_{l=2}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)$$
$$-m_2(Z_1(\tau_1(\tau_2(t_{Nm+N}))))-m_3[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{Nm+N}))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{Nm+N})))]$$

$$-m_4[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{Nm+N}))+Z_2(\tau_2^{(3)}(t_{Nm+N}))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(3)}(t_{Nm+N})))]$$
$$-...-m_{N-1}[\sum_{l=2}^{N-2}Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N}))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))].$$

D'autre part la relation (39) se réecrit comme suit

$$\begin{aligned}&Z_1(t)+m_N[\sum_{l=1}^{N-2}Z_2(\tau_2^{(l)}(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))]\\&+(1-\rho_1)(t-t_{Nm+N})\\&=m_N[\sum_{l=1}^{N-3}Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N}))]-m_N[Z_2(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N}))\\&+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))].\end{aligned}\tag{42}$$

Maintenant, on va distinguer deux cas selon le terme droite de l'égalité (42) est positif ou non. Si

$$\sum_{l=1}^{N-3}Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N}))\leq\sum_{l=1}^{N-2}Z_2(\tau_2^{(l)}(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t))).$$

Alors d'aprés l'egalité (42) et comme ($\rho_1<1$) on a

$$Z_1(t)<m_N[Z_2(\tau_2^{(N-2)}(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))].$$

Ce qui est le résultat recherché, sinon, on a

$$\sum_{l=1}^{N-3}Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N}))>\sum_{l=1}^{N-2}Z_2(\tau_2^{(l)}(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t))).$$

Alors puisque $m_N<\rho_1\leq\rho_2$, on a

$$m_N[\sum_{l=1}^{N-3}Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N}))]-m_N[\sum_{l=1}^{N-2}Z_2(\tau_2^{(l)}(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))]$$
$$<\rho_2(\sum_{l=1}^{N-3}Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N})))-\rho_2[\sum_{l=1}^{N-2}Z_2(\tau_2^{(l)}(t))+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))].$$

En utilisant toujours l'égalité (42), on obtient

$$Z_1(t) - m_N[Z_2(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))]$$
$$+(1-\rho_2)(t - t_{Nm+N}) < \rho_2(\sum_{l=1}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N}))) - \rho_2[\sum_{l=1}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t))$$
$$+Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))].$$

Ceci implique, d'aprés (41), que

$$Z_1(t) - m_N[Z_2(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))]$$
$$+(1-\rho_1)(t - t_{Nm+N}) < (1-\rho_2)[t - t_{Nm+N} + \tau_2(t) - \tau_2(t_{Nm+N})$$
$$+\tau_2^{(N-3)}(t_{Nm+N}) - \tau_2^{(N-3)}(t)] + \sum_{l=2}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N})) - \sum_{l=2}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t))$$
$$-m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t_{Nm+N}))) - m_3[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{Nm+N})))]$$
$$-m_4[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{Nm+N})) + Z_2(\tau_2^{(3)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(3)}(t_{Nm+N})))]$$
$$-... - m_{N-1}[\sum_{l=2}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))].$$

Or $(1-\rho_2) \leq (1-\rho_1)$, donc,

$$Z_1(t) - m_N[Z_2(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))]$$
$$< -m_2(Z_1(\tau_1(\tau_2(t_{Nm+N})))) - m_3[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t_{Nm+N})))]$$
$$-m_4[Z_2(\tau_2^{(2)}(t_{Nm+N})) + Z_2(\tau_2^{(3)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(3)}(t_{Nm+N})))]$$
$$-... - m_{N-1}[\sum_{l=2}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))]$$
$$+\sum_{l=2}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t_{Nm+N})) - \sum_{l=2}^{N-3} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) < 0.$$

Ce qui achève la preuve de l'inégalité, (32).

Maintenant , nous donnons la preuve de l'inégalité (33)

Preuve. $\forall t \in [t_{Nm+(N+1)}, t_{N(m+1)+2}]$, nous avons

$$Z_1(t) > 0 \;\; et \;\; Z_2(t) \geq 0$$

Nous pouvons alors écrire $[t_{Nm+(N+1)}, t_{N(m+1)+2}] = \bigcup_{i=0}^{i=M} (a_i, a_{i+1})$ tel que, à chaque intervalle (a_i, a_{i+1}) nous avons $\forall t \in (a_i, a_{i+1})$, $Z_1(t) > 0 \;\; et \;\; Z_2(t) > 0$ ou bien $\forall t \in (a_i, a_{i+1})$, $Z_1(t) > 0 \;\; et \;\; Z_2(t) = 0$

Ainsi dans la suite nous distinguons deux cas :

1^{er} **cas :** Soit $[a, b] \subset (t_{N(m+1)+1}, t_{N(m+1)+2})$ tel que

$$Z_2(a) = Z_2(b) = 0 \;\; et \;\; Z_2(t) > 0 \;\; pour \;\; tout \;\; a < t < b$$

Soit $t \in (a,b)$, alors $a < \tau_2(t) < t < b$ et $Y_2(\tau_2(t)) = Y_2(a)$, ainsi en utilisant la relation (29) sur l'intervalle (a, $\tau_2(t)$), nous avons

$$\begin{aligned}
(43)\qquad & Z_2(\tau_2(t)) + m_2(Z_1(\tau_1(\tau_2(t)))) + m_3[Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] \\
& + m_4[Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_2(\tau_2^{(3)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(3)}(t)))] + ... \\
& + m_{N-1}[\sum_{l=2}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))] - \rho_2 Z_1(\tau_1(a)) \\
& = (\rho_2 - 1)(\tau_2(t) - a) = (\rho_2 - 1)(\tau_2(t) - t + t - a) \\
& = -(\rho_2 - 1)Z_2(\tau_2(t)) + (\rho_2 - 1)(t - a).
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\rho_2 = \sum_{l=2}^{N-1} m_l$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
& Z_2(\tau_2(t)) + m_2 Z_1(\tau_1(\tau_2(t))) + m_3[Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] + m_4[Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) \\
& + Z_2(\tau_2^{(3)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(3)}(t)))] + ... + m_{N-1}[\sum_{l=2}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))] \\
& - \sum_{l=2}^{N-1} m_l Z_1(\tau_1(a) = -(\sum_{l=2}^{N-1} m_l - 1)Z_2(\tau_2(t)) + (\rho_2 - 1)(t - a). \\
& m_3[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] + m_4[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) \\
& + Z_2(\tau_2^{(3)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(3)}(t)))] + ... + m_{N-1}[\sum_{l=1}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) \\
& + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))] - \sum_{l=3}^{N-1} m_l Z_1(\tau_1(a)) \\
& = (\rho_2 - 1)(t - a) + m_2 Z_1(\tau_1(a)) - m_2[Z_2(\tau_2(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2(t)))].
\end{aligned}$$

Cette dernière relation est une conséquence de la propriété de conservation appliquée à la deuxième station.

En utilisant la même propriété pour la première station sur l'intervalle (a, t), $Y_1(t) = Y_1(a)$ et la relation (28) implique ceci

$$\begin{aligned}
(44)\qquad & Z_1(t) + m_N[\sum_{l=1}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))] \\
& - Z_1(a) - m_N Z_1(\tau_1(a)) = (\rho_1 - 1)(t - a).
\end{aligned}$$

(car le fait que $Z_2(a) = Z_2(b) = 0$ entraîne que $\tau_2(a) = \tau_2^{(2)}(a) = \tau_2^{(3)}(a)$ $= ... = \tau_2^{(N-2)}(a) = a$).

Cette égalité implique que

$$Z_1(t) < Z_1(a),$$

autrement dit, la dernière égalité implique, d'une part que

$$m_N[\sum_{l=1}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))] < m_N Z_1(\tau_1(a)). \tag{45}$$

et d'autre part, elle peut s'écrire comme suit :
$(\rho_1 - 1)(t-a) + m_N Z_1(\tau_1(a)) - m_N[t - \tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t))] = Z_1(t) - Z_1(a) \geq 0,$
et comme $t - \tau_1(\tau_2(t)) < t - \tau_1(\tau_2^{(2)}(t)) < ... < t - \tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t))$, nous avons :
$(\rho_1 - 1)(t-a) + m_N Z_1(\tau_1(a)) - m_N[t - \tau_1(\tau_2(t))] > 0,$
L'égalité (43) peut se reécrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & m_3[Z_2(\tau_2(t)) + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(2)}(t)))] + m_4[Z_2(\tau_2(t)) \\ & + Z_2(\tau_2^{(2)}(t)) + Z_2(\tau_2^{(3)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(3)}(t)))] + ... \\ & + m_{N-1}[+\sum_{l=1}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))] - (\sum_{l=3}^{N-1} m_l) Z_1(\tau_1(a)) \\ & = (\rho_2 - 1)(t-a) + m_2 Z_1(\tau_1(a)) - m_2(t - \tau_1(\tau_2(t))). \end{aligned} \tag{46}$$

Or,

$$[t - \tau_1(\tau_2(t))] < [t - \tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t))],$$

donc,

$$\begin{aligned} & \rho_2 Z_1(\tau_1(a)) - \rho_2[\sum_{l=1}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))] \\ & < (1-\rho_2)(t-a). \end{aligned} \tag{47}$$

D'autre part la relation (44) implique que

$$\begin{aligned} & Z_1(t) - Z_1(a) + (1-\rho_1)(t-a) = m_N Z_1(\tau_1(a)) \\ & - m_N[\sum_{l=1}^{N-2} Z_2(\tau_2^{(l)}(t)) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t)))]. \end{aligned} \tag{48}$$

En utilisant l'inégalité (47), dont les deux termes sont négatifs, et tenant compte que $m_N < \rho_2$, on obtient

$$Z_1(t) - Z_1(a) + (1-\rho_1)(t-a) < (1-\rho_2)(t-a),$$

et puisque $(1-\rho_2) \leq (1-\rho_1)$, alors $Z_1(t) < Z_1(a)$
2^{eme} **cas :** Soit $[a,b] \subset (t_{N(m+1)+1}, t_{N(m+1)+2})$ tel que $Z_2(.) = 0$, comme $Z_2(.)$ est une fonction positive, si elle est différentiable pour tout $t \in [a,b]$, alors $\dot{Z}_2(t) = 0$, ou bien,

$$\begin{array}{rcl}
Z_2(t) = \sum_{l=2}^{N-1} m_l Q_l(t) & \Rightarrow & \dot{Z}_2(t) = \sum_{l=2}^{N-1} m_l \dot{Q}_l(t) = 0 \\
 & \Rightarrow & \dot{Q}_l(t) = 0, \ \ \forall l = 2, ..., N-1 \\
Q_2(t) = Q_2(0) + \mu_1 T_1(t) - \mu_2 T_2(t) & \Rightarrow & \dot{Q}_2(t) = \mu_1 \dot{T}_1(t) - \mu_2 \dot{T}_2(t) = 0 \\
 & \Rightarrow & \mu_1 \dot{T}_1(t) = \mu_2 \dot{T}_2(t) \\
Q_3(t) = Q_3(0) + \mu_2 T_2(t) - \mu_3 T_3(t) & \Rightarrow & \dot{Q}_3(t) = \mu_2 \dot{T}_2(t) - \mu_3 \dot{T}_3(t) = 0 \\
 & \Rightarrow & \mu_2 \dot{T}_2(t) = \mu_3 \dot{T}_3(t) \\
Q_4(t) = Q_4(0) + \mu_3 T_3(t) - \mu_4 T_4(t) & \Rightarrow & \dot{Q}_4(t) = \mu_3 \dot{T}_3(t) - \mu_4 \dot{T}_4(t) = 0 \\
 & \Rightarrow & \mu_3 \dot{T}_3(t) = \mu_4 \dot{T}_4(t) \\
\vdots & & \\
\vdots & & \\
Q_{N-1}(t) = Q_{N-1}(0) + \mu_{N-2} T_{N-2}(t) & & \\
-\mu_{N-1} T_{N-1}(t) & \Rightarrow & \dot{Q}_{N-1}(t) = \mu_{N-2} \dot{T}_{N-2}(t) \\
 & & -\mu_{N-1} \dot{T}_{N-1}(t) = 0 \\
 & \Rightarrow & \mu_{N-2} \dot{T}_{N-2}(t) = \mu_{N-1} \dot{T}_{N-1}(t)
\end{array}$$

Ce qui implique que

$$\mu_1 \dot{T}_1(t) = \mu_2 \dot{T}_2(t) = \mu_3 \dot{T}_3(t) = \mu_4 \dot{T}_4(t) = ... = \mu_{N-1} \dot{T}_{N-1}(t).$$

Ainsi, nous avons d'une part

$$\begin{array}{l}
Z_1(t) = m_1[Q_1(0) + t - \mu_1 T_1(t)] + m_N[Q_N(0) + \mu_{N-1} T_{N-1}(t) - \mu_N T_N(t)] \\
\Rightarrow \dot{Z}_1(t) = m_1(1 - \mu_1 \dot{T}_1(t)) + m_N(\mu_{N-1} \dot{T}_{N-1}(t) - \mu_N \dot{T}_N(t)) = 0 \\
= m_1 - \dot{T}_1(t) + m_N \mu_{N-1} \dot{T}_{N-1}(t) - \dot{T}_N(t) \\
= m_1 + \mu_N \mu_1 \dot{T}_1(t) - (\dot{T}_1(t) + \dot{T}_N(t)) \\
= m_1 + \mu_N \mu_1 \dot{T}_1(t) - \dot{B}_1(t).
\end{array}$$

et d'autre part,

$$\begin{array}{l}
\dot{Z}_2(t) = m_2[\mu_1 T_1(t) - \mu_2 T_2(t)] + m_3[\mu_2 T_2(t) - \mu_3 T_3(t)] + m_4[\mu_3 T_3(t) - \mu_4 T_4(t)] \\
+ ... + m_{N-1}[\mu_{N-2} T_{N-2}(t) - \mu_{N-1} T_{N-1}(t)] = \rho_2 \mu_1 \dot{T}_1(t) - \dot{B}_2(t) = 0.
\end{array}$$

donc,

$$\rho_2 \mu_1 \dot{T}_1(t) = \dot{B}_2(t) < 1.$$

le fait que $m_N < \rho_2$ entraîne que

$$Z_1(t) - Z_1(a) = \int_a^t \dot{Z}_1(u)du \leq 0.$$

Récapitulons ci-dessus, pour tout $i = 0, ...M-1$

$$Z_1(t) \leq Z_1(a_i) \quad si \quad t \in [a_i, a_{i+1}],$$

Ainsi, pour tout $t \in [a_0, a_M] = [t_{Nm+(N+1)}, t_{N(m+1)+2}]$, $Z_1(t) \leq Z_1(a_0) = Z_1(t_{Nm+(N+1)})$ et par la deuxième inégalité

$$Z_1(t) < m_N[Z_2(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})) + Z_1(\tau_1(\tau_2^{(N-2)}(t_{Nm+N})))].$$

Références

[1] D. Bertsimas, D.Gamarnik & J.N.Tsitsiklis, *Stability conditions for multiclass fluid queueing networks,* IEEE Trans. Automat. Control, **41**(11), 1996, 1618-1631.

[2] H. Chen and H. Zhang, *Stability of multiclass queueing networks under FIFO service discipline,* Math. Oper. Res, **22**(3), 1997, 691-725.

[3] J. G. Dai, *On the positive Harris recurrence of multiclass queueing networks : a unified approach via fluid limit models,* Ann. App. Probab, **5**, 49-77, 1995.

[4] V. Dumas, *Diverging paths in FIFO fluid networks,* IEEE Trans. Automat. control, **44** (1), 1999, 191-194.

[5] A. N. Rybko and A. Stolyar, *Ergodicity of stochastic processes describing the operations of open queueing networks,* Problems Inform. Transmission, **28**, 1992, 199-220.

Faiza Belarbi, Amina Angelika Bouchentouf
Laboratoire de Mathématiques ,
B.P. 89, Université Djillali LIABES,
Sidi Bel Abbès, Algérie
e-mail : faiza_belarbi@yahoo.fr, bouchentouf_amina@yahoo.fr