

L'INTERPRÉTATION MATRICIELLE DE LA THÉORIE DE MARKOFF CLASSIQUE

SERGE PERRINE

Reçu le 22 avril 2001 et dans une forme révisée le 5 octobre 2001

On explicite l'approche de Cohn (1955) de la théorie de Markoff. On montre en particulier comment l'arbre complet des solutions de l'équation diophantienne associée apparaît comme quotient du groupe $GL(2, \mathbb{Z})$ des matrices 2×2 à coefficients entiers et de déterminant ± 1 par un sous-groupe diédral D_6 à 12 éléments. Différents développements intermédiaires sont faits autour du groupe $\text{Aut}(F_2)$ des automorphismes du groupe libre engendré par deux éléments F_2 .

Classification 2000 des Sujets Mathématiques: 11H50, 11H55, 20E05, 20F05, 20F12, 20F28.

1. Introduction. La théorie de Markoff concerne la résolution en nombres entiers de l'équation diophantienne

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2, \quad (m, m_1, m_2) \in (\mathbb{N} - \{0\})^3. \quad (1.1)$$

Elle a été découverte à partir de calculs faits sur les fractions continues par Markoff [26]. Elle a ensuite été mise en forme au moyen de formes quadratiques par Cassels [4]. Puis une interprétation géométrique plus profonde en a été donnée par Cohn [7, 8]. Dans la période récente, de nouveaux développements sont apparus. Ils sont liés à l'étude des groupes libres à deux générateurs [6, 9], à la dynamique symbolique [39], au théorème d'Atiyah-Singer [17], à la théorie de Teichmüller de certaines surfaces de Riemann [21], à l'étude de leur géodésiques [38], et avec [37] à l'étude de fibrés exceptionnels d'un espace projectif P_2 .

Des synthèses récentes de la théorie ont été écrites [14, 25]. On trouve aussi dans [10] un résumé de différents points de vue sur l'interprétation à donner à cette théorie.

Dans le présent article, on présente une approche directe de l'interprétation matricielle donnée par Cohn à la théorie de Markoff. On approfondit le lien avec le groupe libre à deux éléments et on en tire différentes conséquences.

On laisse de côté tout lien avec la cohomologie des groupes [40]. On évite les développements possibles autour des quaternions entrant dans la perspective de certains travaux sur les groupes fuchsien [44]. On n'aborde non plus les applications du théorème de Dyer et Formanek [23, page 24].

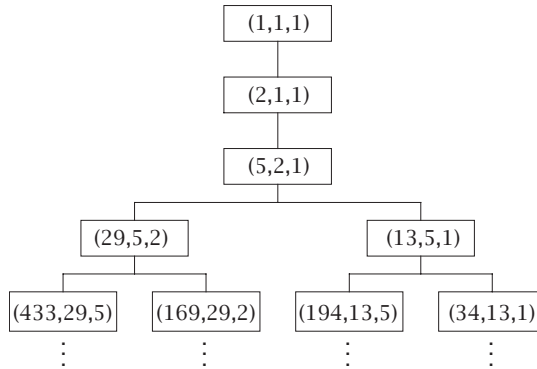


FIGURE 2.1

2. Présentation matricielle de la théorie de Markoff

2.1. Le problème de la présentation matricielle. On ne revient pas sur l'étude de l'équation de Markoff (1.1). Tous les éléments relatifs à cette question sont disponibles dans [4] ou [14].

L'arbre des solutions de privilégié ici est l'arbre des triplets de Cohn [13]. Ses sommets sont les solutions $(m, m_1, m_2) \in (\mathbb{N} - \{0\})^3$, triplets d'entiers positifs qui vérifient les inégalités

$$m \geq m_1 \geq m_2 \geq 1. \tag{2.1}$$

Cet arbre ne contient pas toutes les solutions possibles. Il en élimine beaucoup grâce aux permutations qui transforment toute solution en une autre. Il se construit à partir du triplet $(1, 1, 1)$ en engendrant à partir de tout triplet de solutions (m, m_1, m_2) deux nouveaux triplets qui en descendent à gauche et à droite,

$$\begin{aligned} (m^G, m_1^G, m_2^G) &= (3mm_1 - m_2, m, m_1), \\ (m^D, m_1^D, m_2^D) &= (3mm_2 - m_1, m, m_2). \end{aligned} \tag{2.2}$$

En haut de l'arbre, ces deux triplets se confondent. C'est ainsi que les deux formules donnent à partir de $(1, 1, 1)$ le triplet $(2, 1, 1)$, puis $(5, 2, 1)$. Mais à partir de ce dernier les triplets à droite et à gauche se distinguent, donnant naissance à un véritable arbre :

Présenter matriciellement la théorie de Markoff signifie ici qu'à chaque triplet (m, m_1, m_2) , de niveau supérieur à un niveau donné dans l'arbre précédent, on est capable d'associer un triplet (M, M_1, M_2) de matrices de $SL(2, \mathbb{Z})$ liées entre elles par le fait que l'une d'elles est produit des deux autres et vérifiant ces égalités pour les traces

$$\text{tr}(M) = 3m, \quad \text{tr}(M_1) = 3m_1, \quad \text{tr}(M_2) = 3m_2. \tag{2.3}$$

La notation $SL(2, \mathbb{Z})$ désigne le groupe multiplicatif des matrices de déterminant 1 à coefficients dans \mathbb{Z} , l'ensemble des nombres entiers positifs ou négatifs.

L'équation de Markoff apparaît alors comme une conséquence de la relation de Fricke (FR₁) suivante, valable pour deux matrices W et V de $SL(2, \mathbb{Z})$:

$$\operatorname{tr}(W)^2 + \operatorname{tr}(V)^2 + \operatorname{tr}(WV)^2 = \operatorname{tr}(W) \operatorname{tr}(V) \operatorname{tr}(WV) + \operatorname{tr}(WVW^{-1}V^{-1}) + 2. \quad (2.4)$$

La condition déterminante est d'avoir

$$\operatorname{tr}(WVW^{-1}V^{-1}) = -2. \quad (2.5)$$

En divisant par 9, on retrouve l'équation (1.1) à partir de la relation de Fricke (FR₁).

Le problème qui se pose est donc d'indiquer comment construire, de niveau en niveau de notre arbre, des triplets de matrices vérifiant les conditions requises.

Cette façon d'interpréter la théorie de Markoff, en rapprochant l'équation diophantienne correspondante des relations de Fricke, a été découverte par Cohn dans [7], puis complètement explicitée dans [9, théorème 5.1].

2.2. Une solution partielle du problème précédent. Une solution du problème posé est maintenant donnée. Elle est construite à partir des périodes (2,2) et (2,1,1,2) des développements en fraction continue des premiers nombres algébriques de degré 2 mis en évidence par la théorie de Markoff. On associe ainsi au triplet (5,2,1) les matrices

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ M_1 &= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

La troisième matrice du triplet (M, M_1, M_2) est calculée avec la condition

$$M = M_2 M_1. \quad (2.7)$$

On en déduit une matrice à gauche,

$$M^G = M M_1 = \begin{bmatrix} 75 & 31 \\ 29 & 12 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

D'où le triplet correspondant à la solution à gauche (29, 5, 2)

$$(M M_1, M, M_1). \quad (2.9)$$

On a aussi une matrice à droite,

$$M^D = M_2 M = \begin{bmatrix} 34 & 13 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Le triplet correspondant à la solution à droite (13, 5, 1) est

$$(M_2 M, M, M_2). \quad (2.11)$$

La construction se poursuit pas à pas, pour les triplets issus de $(5, 2, 1)$, grâce à une autre relation de Fricke (FR_2) valable également pour deux matrices W et V de $SL(2, \mathbb{Z})$,

$$\operatorname{tr}(V^2W) = \operatorname{tr}(VW)\operatorname{tr}(V) - \operatorname{tr}(W) = \operatorname{tr}(WV^2) = \operatorname{tr}(WV)\operatorname{tr}(V) - \operatorname{tr}(W). \quad (2.12)$$

Ces expressions donnent les transformations à gauche et à droite vues avant, grâce à une simple division par un facteur égal à 3.

(i) Pour $M = M_2M_1$ on utilise à gauche la dernière égalité de (FR_2) avec $W = M_2$ et $V = M_1$. À droite, on pose au contraire $W = M_1$ et $V = M_2$ et on utilise la première égalité de (FR_2) .

(ii) Dans le cas où $M = M_1M_2$, qui correspond par exemple à la situation obtenue avant à gauche, on utilise encore l'une des égalités (FR_2) avec $W = M_1$ et $V = M_2$. À droite, on pose au contraire $W = M_2$ et $V = M_1$.

Cette construction conduit par récurrence à énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 2.1. *Pour tout triplet (m, m_1, m_2) de l'arbre des triplets de Cohn, il existe un triplet de matrices (M, M_1, M_2) de $SL(2, \mathbb{Z})$ tel que l'on a*

$$(m, m_1, m_2) = ((\operatorname{tr}(M)/3), (\operatorname{tr}(M_1)/3), (\operatorname{tr}(M_2)/3)), \quad (2.13)$$

$$M = M_1M_2 \quad \text{ou} \quad M = M_2M_1.$$

En remontant dans l'arbre au dessus de $(5, 2, 1)$, le triplet $(2, 1, 1)$ correspond au triplet de matrices suivant :

$$\left(\left[\begin{array}{cc} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \right). \quad (2.14)$$

Il donne à droite et à gauche le triplet de matrices déjà vu, correspondant à $(5, 2, 1)$. Mais la difficulté est que maintenant les deux dernières matrices de ce triplet ne donnent pas la première par produit. Ceci ne permet pas de remonter au triplet $(1, 1, 1)$. Le théorème précédent est donc établi par le raisonnement par récurrence fait avant, à l'exception des deux premiers triplets $(1, 1, 1)$ et $(2, 1, 1)$.

On va cependant voir dans [section 3](#) comment corriger cette situation.

REMARQUE 2.2. Les deux formules (FR_1) et (FR_2) découlent de l'application répétée de la formule suivante (FR_0) , valable pour deux matrices quelconques W et V de $SL(2, \mathbb{Z})$

$$\operatorname{tr}(WV) + \operatorname{tr}(WV^{-1}) = \operatorname{tr}(W)\operatorname{tr}(V). \quad (2.15)$$

Cette dernière égalité est spécifique aux matrices 2×2 .

REMARQUE 2.3. Le groupe de matrices utilisé avant est $SL(2, \mathbb{Z})$, non $GL(2, \mathbb{Z})$, le groupe multiplicatif des matrices à coefficients entiers et de déterminant ± 1 . Dans ce dernier groupe, il existe aussi des formules généralisant les formules de Fricke précédentes, mais elles comprennent des signes. Le groupe $SL(2, \mathbb{Z})$ est un sous-groupe normal d'indice 2 de $GL(2, \mathbb{Z})$. Dans la terminologie de [12], $GL(2, \mathbb{Z})$ est le groupe unimodulaire et $SL(2, \mathbb{Z})$ le groupe modulaire.

3. D'autres présentations matricielles

3.1. Quelques remarques préalables. On approfondit ici la lecture du plus ancien article de Cohn [7]. S'inspirant de ses notations, on pose avec les matrices M, M_1, M_2 , que l'on a introduites avant,

$$B^* = M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}, \quad A^* = M_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^* = M_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Ceci revient à considérer le triplet de matrices

$$(M, M_1, M_2) = (B^{*-1}, A^*, B^{*-1}A^{*-1}). \quad (3.2)$$

Ces trois matrices de $SL(2, \mathbb{Z})$ donnent un peu plus que le seul produit du [théorème 2.1](#). On trouve en fait les deux relations de Cohn suivantes [7, 9], définissant l'unité 1 de $SL(2, \mathbb{Z})$ et la matrice K :

$$A^*B^*C^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1, \quad C^*B^*A^* = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = K. \quad (3.3)$$

Considérons alors le groupe engendré par les deux matrices A^* et B^* ,

$$G = \langle A^*, B^* \rangle. \quad (3.4)$$

Les matrices C et K introduites avant sont dans le groupe G . En effet, on a

$$C = B^{*-1}A^{*-1}, \quad K = B^{*-1}A^{*-1}B^*A^*. \quad (3.5)$$

Ce dernier terme est le commutateur de B^* et A^* , noté comme dans [2] :

$$K = [B^*, A^*]. \quad (3.6)$$

Le groupe G agit dans le demi-plan de Poincaré H . Pour cela, on considère l'action induite par celle de toute matrice $V \in SL(2, \mathbb{Z})$ s'écrivant [20, 33, 45] :

$$V = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Une telle matrice agit sur tout $z \in H$ par l'opération suivante, qui s'étend d'ailleurs au bord du demi-plan de Poincaré :

$$Vz = \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}} \quad (\text{noté aussi } z^V). \quad (3.8)$$

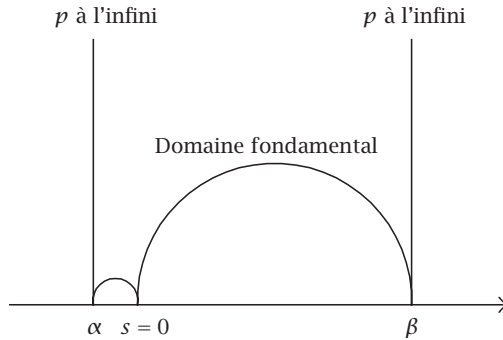


FIGURE 3.1

On dispose alors d'un domaine fondamental [41, page 128] pour l'action du groupe image de G dans $SL(2, \mathbb{Z}) / \{\pm 1\}$. C'est un quadrilatère curviligne dont les sommets peuvent être calculés [7] comme suit :

$$-\left(\frac{2}{5}\right) = \infty^{B^*}, \quad 0 = (\infty^{A^*})^{B^*} = (\infty^{B^*})^{A^*}, \quad \left(\frac{5}{2}\right) = \infty^{A^*}, \infty. \quad (3.9)$$

Ces quatre points, notés simplement ici $\alpha = \infty^{B^*}$, $s = 0$, $\beta = \infty^{A^*}$, $p = \infty$, sont situés au bord de H . Ils vérifient les égalités

$$A^*(\alpha) = s, \quad A^*(p) = \beta, \quad B^*(\beta) = s, \quad B^*(p) = \alpha. \quad (3.10)$$

Pour les calculer, il suffit donc d'en déterminer un. Et à partir de l'expression des matrices A^* et B^* on s'assure par exemple que $p = \infty$ avec

$$K(p) = B^{*-1}A^{*-1}B^*A^*(p) = p. \quad (3.11)$$

On a ainsi la représentation suivante du domaine fondamental pour l'action du groupe G dans le demi-plan H :

Le quotient du demi-plan de Poincaré H par le groupe G est, en tant que surface de Riemann [22, 45], un tore percé d'un trou en un point. Le trou correspond aux quatre points α, s, β, p , que l'on vient de déterminer sur le bord de H .

3.2. Nouvelles présentations matricielles de la théorie de Markoff. Comme Cohn [7, 9], il est maintenant possible de considérer de nouvelles matrices de $SL(2, \mathbb{Z})$:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

On complète par

$$C_0 = B_0^{-1}A_0^{-1} = C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Avec des formules comparables à celles d'avant, on pose maintenant

$$(M', M'_1, M'_2) = (B_0^{-1}, A_0, B_0^{-1}A_0^{-1}) = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right). \quad (3.14)$$

On a encore

$$M'_2 M'_1 = M'. \quad (3.15)$$

En utilisant sur ces matrices des formules identiques à celles qui ont conduit à énoncer le [théorème 2.1](#), on trouve grâce aux traces un nouvel arbre de triplets. Il est analogue à l'arbre des triplets de Cohn considéré avant, mais contient plus de triplets.

Il contient en particulier le triplet $(1, 1, 1)$ au sommet d'un arbre analogue à celui de la [figure 2.1](#). Ceci complète la démonstration du [théorème 2.1](#) et donne une nouvelle présentation matricielle.

On fait aussi apparaître de cette façon des triplets de matrices non déjà rencontrés, tels que le suivant :

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right). \quad (3.16)$$

En d'autres termes, le problème de trouver des triplets de matrices correspondant à un même triplet de l'arbre de Cohn admet en général plusieurs solutions. On en déduit qu'à quelques triplets près situés dans les plus bas niveaux de l'arbre, il y a plusieurs façons de présenter matriciellement la théorie de Markoff.

En regardant de près le triplet de matrices que l'on vient de considérer, on trouve à nouveau les relations de Cohn suivantes :

$$A_0 B_0 C_0 = 1, \quad C_0 B_0 A_0 = K. \quad (3.17)$$

De plus, en comparant aux matrices que l'on avait antérieurement, on a le lien suivant entre toutes les matrices introduites :

$$A^* = C_0 B_0^{-1}, \quad B^* = B_0 C_0^{-2}, \quad C^* = C_0. \quad (3.18)$$

Ces relations peuvent être complétées avec les égalités suivantes :

$$A_0 = C^{*-2} A^*, \quad B_0 = A^{*-1} C^*, \quad C_0 = C^*. \quad (3.19)$$

Ceci conduit plus généralement à énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1. *Soient V_1, V_2, V_3 , trois matrices 2×2 vérifiant les deux égalités suivantes, où L est une matrice 2×2 donnée et 1 désigne la matrice unité :*

$$V_1 V_2 V_3 = 1, \quad V_3 V_2 V_1 = L. \quad (3.20)$$

Supposons que l'on pose

$$W_1 = V_3^{-2} V_1, \quad W_2 = V_1^{-1} V_3, \quad W_3 = V_3. \quad (3.21)$$

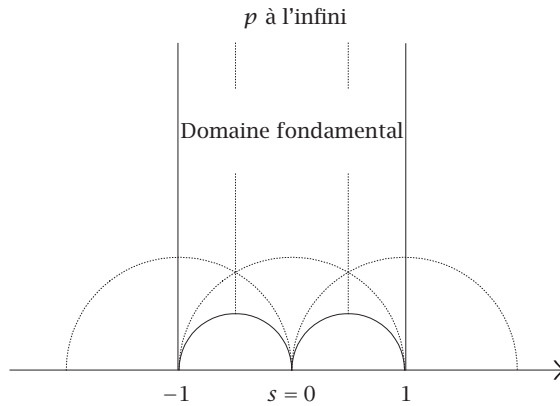


FIGURE 4.1

Alors on a aussi

$$W_1 W_2 W_3 = 1, \quad W_3 W_2 W_1 = L. \tag{3.22}$$

Une vérification directe de ce résultat est facile. Et une application répétée de cette dernière proposition permet, avec les mêmes formules qu'avant, de donner une infinité d'autres interprétations matricielles de la théorie de Markoff, éventuellement à un nombre fini de triplets près.

4. Identification du groupe dans lequel on travaille

4.1. Le groupe et son domaine fondamental. Considérons maintenant le groupe $G = gp(A^*, B^*)$ engendré par les deux matrices A^* et B^* définies avant. Les matrices C et K que l'on a introduites sont aussi dans le groupe G . En effet, on a

$$C = B^{*-1} A^{*-1}, \quad K = [B^*, A^*] = B^{*-1} A^{*-1} B^* A^*. \tag{4.1}$$

Il en résulte que toutes les matrices déduites de l'application répétée de la [proposition 3.1](#) sont aussi des éléments du groupe G . On voit ainsi que le groupe G est un groupe à deux générateurs, engendré aussi par les deux matrices A_0 et B_0 ,

$$G = gp(A_0, B_0). \tag{4.2}$$

Avec ces deux dernières matrices, et par la même méthode qu'avant, on peut calculer un domaine fondamental pour l'action dans le demi-plan H du groupe image de G dans le groupe modulaire projectif $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z}) / \{\pm 1\}$. On trouve [figure 4.1](#), qui apparaît aussi dans [7].

Ce nouveau domaine est différent de celui déjà donné pour l'action de G dans H . Il détermine encore au quotient pour surface de Riemann un tore percé d'un point.

4.2. Comparaison avec le domaine fondamental modulaire. Le domaine que l'on vient de mettre en évidence est plus vaste que le domaine fondamental habituellement donné pour l'action dans H du groupe modulaire projectif [41, page 128],

$$\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) / \{\pm 1\}. \quad (4.3)$$

Ce dernier groupe possède deux générateurs qui sont les classes $\bar{S} = \{\pm S\}$ et $\bar{T} = \{\pm T\}$ des éléments suivants de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Il admet une présentation qui en fait un produit libre d'un groupe cyclique C_2 d'ordre 2 et d'un groupe cyclique C_3 d'ordre 3,

$$\Gamma = \langle \bar{S}, \bar{T} \mid \bar{S}^2 = (\bar{S}\bar{T})^3 = 1 \rangle \simeq \langle \bar{S} \mid \bar{S}^2 = 1 \rangle * \langle \bar{S}\bar{T} \mid (\bar{S}\bar{T})^3 = 1 \rangle \simeq C_2 * C_3. \quad (4.5)$$

Remarquons que l'action de Γ dans H est induite par l'action introduite avant de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ dans H . Le passage à Γ vient de ce que l'on a pour tout $z \in H$

$$(-1)z = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z = z (\neq -z). \quad (4.6)$$

Pour comparer l'action dans H des deux groupes G et Γ , une question sur laquelle on reviendra est de savoir si l'on a $-1 \in G$.

4.3. Détermination du groupe. Le groupe G est contenu dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Il est normal dans ce dernier groupe, comme le montrent les relations suivantes, faciles à vérifier de façon directe :

$$SA_0S^{-1} = A_0^{-1}, \quad SB_0S^{-1} = B_0^{-1}, \quad TA_0T^{-1} = B_0^{-1}, \quad TB_0T^{-1} = A_0B_0. \quad (4.7)$$

Ceci permet de considérer le groupe quotient $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})/G)$.

Sur la [figure 4.1](#), la comparaison des domaines fondamentaux pour G et $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ indique que le groupe quotient $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})/G)$ est fini à 6 éléments au moins.

Ce groupe quotient est engendré par les deux éléments S_G classe modulo G de S et T_G classe modulo G de T . Or ces deux classes commutent, d'après les expressions suivantes, des commutateurs que l'on peut vérifier de façon directe :

$$\begin{aligned} [S^{-1}, T^{-1}] &= STS^{-1}T^{-1} = [T^{-1}, S^{-1}]^{-1} = B_0, \\ [S, T] &= S^{-1}T^{-1}ST = [T, S]^{-1} = A_0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Le groupe $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})/G)$ est donc commutatif. En particulier, G est un sous-groupe du groupe dérivé $[\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}), \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})]$, le sous-groupe normal engendré par tous les commutateurs de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ [2, chapitre 1, page 67].

Remarquons que l'on a aussi

$$\begin{aligned} [S, T^{-1}] &= S^{-1}TST^{-1} = [T^{-1}, S]^{-1} = S^{-1}B_0^{-1}S = B_0, \\ [S^{-1}, T] &= ST^{-1}S^{-1}T = [T, S^{-1}]^{-1} = T^{-1}B_0^{-1}T = A_0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

avec des expressions valables pour toutes matrices V_1, V_2, V_3 , dans $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, telles que

$$\begin{aligned} [V_1V_2, V_3] &= (V_2^{-1}[V_1, V_3]V_2)[V_2, V_3], \\ [V_1, V_2V_3] &= [V_1, V_3](V_3^{-1}[V_1, V_2]V_3), \\ [V_1, V_2] &= V_1^{-1}[V_2, V_1^{-1}]V_1 = [V_2, V_1]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Tout crochet de deux mots écrits avec S et T est donc dans G , ce qui garantit que l'on a en réalité

$$G = [\text{SL}(2, \mathbb{Z}), \text{SL}(2, \mathbb{Z})]. \quad (4.11)$$

4.4. Image dans le groupe modulaire projectif. On considère la classique présentation [24, page 46] du groupe modulaire $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$,

$$\text{SL}(2, \mathbb{Z}) = \langle S, T \mid S^4 = 1, S^2 = (ST)^3 \rangle \simeq C_4 *_{C_2} C_6. \quad (4.12)$$

Dans le groupe quotient $(\text{SL}(2, \mathbb{Z})/G)$, on a par la commutativité des classes S_G et T_G de S et T l'égalité

$$S_G = T_G^{-3}. \quad (4.13)$$

Ceci résulte en effet de la relation amalgamant les groupes cycliques à 4 et 6 éléments notés respectivement C_4 et C_6 ,

$$S_G^2 = (S_G T_G)^3. \quad (4.14)$$

Le groupe quotient est engendré par T_G , avec de plus la condition

$$T_G^{12} = S_G^{-4} = 1. \quad (4.15)$$

On a donc affaire à un sous-groupe du groupe cyclique à 12 éléments C_{12} , possédant par ce qui précède au moins 6 éléments, c'est-à-dire 6 ou 12 éléments.

Lorsque l'on quotiente par $\{\pm 1\}$, puisque $S^2 = -1$, la classe de T n'est que d'ordre 6 dans $\Gamma = \text{SL}(2, \mathbb{Z})/\{\pm 1\}$. Comme -1 commute avec tous les éléments de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, l'image de G dans Γ n'est autre que $[\Gamma, \Gamma]$, le sous-groupe normal dérivé de Γ , engendré par les commutateurs de ce dernier groupe. Au quotient, on obtient avec la comparaison des domaines fondamentaux faite avant, un groupe cyclique à 6 éléments C_6 .

Ceci permet d'énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 4.1. *Le groupe $G = gp(A_0, B_0)$ engendré par les deux matrices A_0 et B_0 est le groupe $[SL(2, \mathbb{Z}), SL(2, \mathbb{Z})]$, sous-groupe normal dérivé de $SL(2, \mathbb{Z})$. Son image dans le groupe modulaire projectif $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z}) / \{\pm 1\}$ est le sous-groupe normal dérivé $[\Gamma, \Gamma]$ de Γ . Le quotient du groupe modulaire projectif par son sous-groupe dérivé est le groupe cyclique à 6 éléments C_6 ,*

$$\Gamma / [\Gamma, \Gamma] \simeq C_6. \quad (4.16)$$

4.5. Remarques sur les présentations de groupe utilisées. En pratique, les présentations de groupe utilisées, d'où la détermination effective des classes de $\Gamma / [\Gamma, \Gamma]$, peuvent être calculées. En effet, toute matrice de $GL(2, \mathbb{Z})$ peut, grâce à l'algorithme d'Euclide, être décomposée en un produit des trois matrices suivantes :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Considérons une matrice quelconque du groupe unimodulaire $GL(2, \mathbb{Z})$,

$$V = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

(i) Si $\delta = 0$ et $\gamma = 1$, on trouve

$$V = \begin{cases} T^\alpha I, & \text{si } \beta = 1, \\ T^\alpha O I, & \text{si } \beta = -1. \end{cases} \quad (4.19)$$

- (ii) Si $\delta = 0$ et $\gamma = -1$, on applique le résultat précédent à VO , puis $O^2 = 1$.
- (iii) Si $\gamma = 0$ et $\delta = 1$, on applique le résultat précédent à VI , puis $I^2 = 1$.
- (iv) Si $\gamma = 0$ et $\delta = -1$, on applique le résultat précédent VIO , puis $O^2 = I^2 = 1$.
- (v) Si $\gamma\delta \neq 0$, la condition $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ permet l'application de l'algorithme

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha_1 \delta + r_1 & \text{avec } 0 \leq r_1 < |\delta|, \quad \alpha &= \alpha_1 \beta + s_1, \\ \delta &= \alpha_2 r_1 + r_2 & \text{avec } 0 \leq r_2 < |r_1|, \quad \beta &= \alpha_2 s_1 + s_2, \\ & & & \vdots \\ r_{n-1} &= \alpha_{n+1} r_n + r_{n+1} & \text{avec } 0 \leq r_{n+1} = 1, \quad s_{n-1} &= \alpha_{n+1} s_n + s_{n+1}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

D'où la décomposition suivante, permettant d'appliquer à tous les termes apparaissant le résultat précédent :

$$V = \begin{bmatrix} s_{n+1} & s_n - r_n s_{n+1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Ceci donné, toutes les vérifications complémentaires étant faciles, on a :

PROPOSITION 4.2. *Le groupe $GL(2, \mathbb{Z})$ admet la présentation*

$$\langle I, O, T \mid I^2 = O^2 = (OT)^2 = (OI)^4 = 1; (OI)^2 = (OIT)^3 \rangle. \quad (4.22)$$

Les présentations de $SL(2, \mathbb{Z})$ et $PSL(2, \mathbb{Z})$ rappelées avant s'en déduisent avec la remarque que l'on a

$$\det(I) = \det(O) = -1, \quad \det(T) = 1, \quad S = OI, \quad S^2 = -1. \quad (4.23)$$

On peut, avec des transformations de Tietze [19], choisir d'autres générateurs et donner l'ensemble des relations correspondantes. Par exemple $GL(2, \mathbb{Z})$ peut être présenté avec les triplets de générateurs suivants :

$$(O, S, T) \quad \text{ou} \quad (I, S, TS). \quad (4.24)$$

On peut même voir que (I, T) engendre $GL(2, \mathbb{Z})$ et en donner la présentation associée.

On peut considérer aussi le groupe unimodulaire projectif,

$$PGL(2, \mathbb{Z}) = GL(2, \mathbb{Z}) / \{\pm 1\}. \quad (4.25)$$

La dernière remarque faite donne pour ce qui le concerne :

PROPOSITION 4.3. *Le groupe $PGL(2, \mathbb{Z})$ admet la présentation*

$$\langle \bar{I}, \bar{O}, \bar{T} \mid \bar{I}^2 = \bar{O}^2 = (\bar{O}\bar{T})^2 = (\bar{O}\bar{I})^2 = (\bar{O}\bar{I}\bar{T})^3 = 1 \rangle. \quad (4.26)$$

Le [théorème 4.1](#) conduit naturellement à la question de savoir si tout élément de $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ s'écrit sous forme suffixe $W(\overline{A_0}, \overline{B_0})W_k(\overline{S}, \overline{T})$ où

$$\begin{aligned} W(\overline{A_0}, \overline{B_0}) &\in [\Gamma, \Gamma], \\ W_k(\overline{S}, \overline{T}) &\in \{1, \overline{S}, \overline{S}\overline{T}, \overline{S}\overline{T}\overline{S}, \overline{S}\overline{T}\overline{S}\overline{T}, \overline{S}\overline{T}\overline{S}\overline{T}\overline{S}\}, \quad (k = 0, 1, \dots, 5). \end{aligned} \quad (4.27)$$

L'existence d'une telle décomposition paraît démontrable en utilisant comme transducteur les expressions suivantes applicables sur les mots en \overline{S} et \overline{T} modulo $[\Gamma, \Gamma]$ qui apparaissent comme suit :

$$\overline{S}\overline{T} = \overline{B_0}\overline{T}\overline{S}, \quad \overline{T}\overline{S} = \overline{B_0}^{-1}\overline{S}\overline{T}, \quad \overline{S}\overline{T}^{-1} = \overline{A_0}\overline{T}\overline{S}, \quad \overline{T}^{-1}\overline{S} = \overline{A_0}^{-1}\overline{S}\overline{T}^{-1}. \quad (4.28)$$

Ces expressions permettent de remplacer un mot de deux lettres en \overline{S} et \overline{T} par un mot en les mêmes deux lettres, aux termes en $\overline{A_0}$ et $\overline{B_0}$ près, c'est-à-dire modulo $[\Gamma, \Gamma]$. Ceci peut conduire à des simplifications. Au pire, donc, la longueur des mots en \overline{S} et \overline{T} à considérer se conserve. Au mieux elle se raccourcit. La question posée revient à savoir si l'on peut toujours raccourcir ces mots modulo $[\Gamma, \Gamma]$ et pourquoi on n'aboutirait que sur les seules possibilités données pour $W_k(\overline{S}, \overline{T})$.

Cette question est traitée dans la suite de l'article (voir [proposition 8.8](#)).

4.6. Un domaine fondamental hexagonal. Il est possible, à partir de la [figure 4.1](#) et en considérant des transformés des différents triangles curvilignes apparaissant, de construire un nouveau domaine fondamental hexagonal pour l'action du groupe G . Sur la figure suivante, on a superposé les deux domaines pour permettre leur comparaison :

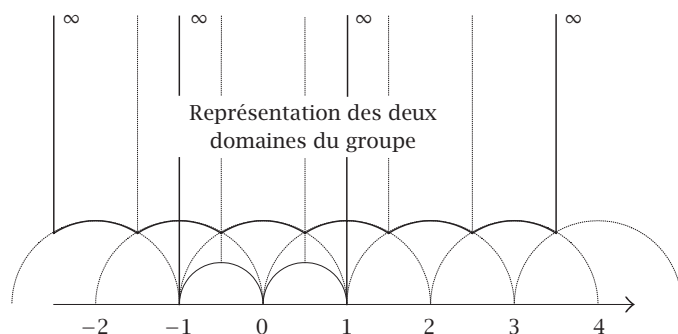


FIGURE 4.2

Grâce à l'expression matricielle de T , on visualise les 6 sommets de cet hexagone et le groupe cyclique à 6 éléments du [théorème 4.1](#). En notant en effet de droite à gauche $\theta, \eta, \zeta, \varepsilon, \delta, \gamma, \varpi$ les pointes du domaine représenté ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} T^{-1}(\theta) &= \eta, & T^{-1}(\eta) &= \zeta, & T^{-1}(\zeta) &= \varepsilon, \\ T^{-1}(\varepsilon) &= \delta, & T^{-1}(\delta) &= \gamma, & T^{-1}(\gamma) &= \varpi. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Le point ϖ est identifié au point θ grâce à la matrice K qui vaut avec les expressions données avant

$$K = -T^6 = S^2 T^6 = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in G. \quad (4.30)$$

5. Relation avec le groupe libre à deux générateurs. On retrouve de façon directe l'essentiel des résultats de Cohn [9] liant la théorie de Markoff au groupe libre à deux générateurs.

5.1. Introduction du groupe libre F_2 . Soient A_1, B_1, C_1, L des matrices quelconques de $SL(2, \mathbb{Z})$ vérifiant les égalités de Cohn écrites ici sous la forme

$$A_1 B_1 = C_1^{-1}, \quad B_1 A_1 = C_1^{-1} L. \quad (5.1)$$

Compte tenu que le déterminant de L est égal à 1, on en déduit que

$$\text{tr}(A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1}) = \text{tr}(B_1 A_1 B_1^{-1} A_1^{-1}) = \text{tr}(L) = \text{tr}(L^{-1}). \quad (5.2)$$

Dans le cas où la trace de la matrice L vaut -2 , la formule de Fricke (FR_1) se simplifie sous la forme

$$\text{tr}(A_1)^2 + \text{tr}(B_1)^2 + \text{tr}(A_1 B_1)^2 = \text{tr}(A_1) \text{tr}(B_1) \text{tr}(A_1 B_1). \quad (5.3)$$

On trouve dans [35] des développements autour de cette égalité. L'essentiel de ces résultats est établi de façon directe dans ce qui suit.

En fait, la dernière égalité reliant des traces est valable pour tout couple de matrices engendrant le sous-groupe $G = [SL(2, \mathbb{Z}), SL(2, \mathbb{Z})]$.

PROPOSITION 5.1. *Le groupe $[\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}), \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})]$ est libre à deux générateurs. Pour tout couple (A, B) de ses générateurs, on a la relation*

$$\mathrm{tr}(A)^2 + \mathrm{tr}(B)^2 + \mathrm{tr}(AB)^2 = \mathrm{tr}(A) \mathrm{tr}(B) \mathrm{tr}(AB). \quad (5.4)$$

En effet on a vu avant que (A_0, B_0) est un couple de générateurs du groupe G . On pose

$$x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = S, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = TS. \quad (5.5)$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} A_0 &= y^{-1}x^{-1}yx = [y, x] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \\ B_0^{-1} &= y^{-2}x^{-1}y^2x = [y^2, x] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Mais on peut établir de façon directe [24, pages 97-98] que ces deux éléments engendrent aussi un groupe libre à deux éléments que l'on note F_2 . Ceci établit une partie de la proposition précédente,

$$G = [\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}), \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})] = F_2. \quad (5.7)$$

Pour tout autre couple (A, B) de générateurs du groupe F_2 , il existe alors un automorphisme φ de ce groupe transformant A_0 en A et B_0 en B . Il en résulte par un résultat de Nielsen [24, théorème 3.9, page 165] que l'on a

$$\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) = \mathrm{tr}(A_0B_0A_0^{-1}B_0^{-1}) = -2. \quad (5.8)$$

On retrouve ainsi la possibilité d'appliquer la formule de Fricke (FR₁). Et ceci termine la démonstration de notre proposition.

En particulier [5, page 14], tout élément V de notre groupe s'écrit de façon unique sous la forme d'un mot réduit en A_0 et B_0 :

$$\begin{aligned} V &= \prod_{i=1}^{i=n} x_i^{\varepsilon_i} \quad \text{où } x_i \in \{A_0, B_0\}, \quad \varepsilon_i = \pm 1, \\ &\quad \varepsilon_{i+1} \neq -\varepsilon_i \quad \text{si } x_{i+1} = x_i. \end{aligned} \quad (5.9)$$

On note parfois, grâce à cette propriété,

$$V = V(A_0, B_0). \quad (5.10)$$

Si l'on veut que le mot réduit considéré ne contienne que des puissances ε_i égales à 1, on peut écrire accessoirement

$$V = V(A_0, A_0^{-1}, B_0, B_0^{-1}). \quad (5.11)$$

5.2. Conséquences pour l'arbre complet de l'équation de Markoff. Par construction, on a, a priori, dans la [proposition 5.1](#)

$$(\operatorname{tr}(A), \operatorname{tr}(B), \operatorname{tr}(AB)) \in \mathbb{Z}^3. \quad (5.12)$$

Il est facile de s'assurer, avec des congruences modulo 3, que la relation qui lie ces nombres n'est possible qu'avec

$$\operatorname{tr}(A) \equiv \operatorname{tr}(B) \equiv \operatorname{tr}(AB) \equiv 0 \pmod{3}. \quad (5.13)$$

On peut donc poser pour tout couple (A, B) de générateurs du groupe F_2

$$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(B^{-1}) = 3m, \quad \operatorname{tr}(A) = 3m_1, \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(B^{-1}A^{-1}) = 3m_2. \quad (5.14)$$

On retrouve ainsi l'équation de Markoff

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2. \quad (5.15)$$

Un examen plus précis de la situation montre que l'on a en réalité $(m, m_1, m_2) \in (\mathbb{N} - \{0\})^3$.

En effet, tout élément de F_2 s'écrit comme un mot comprenant les lettres $A_0, B_0, A_0^{-1}, B_0^{-1}$. Or un raisonnement par récurrence sur la longueur de ces mots est possible. Il établit que l'on reste pour ces triplets dans $(\mathbb{N} - \{0\})^3$.

Cependant rien n'impose ici la condition de Cohn, (2.1), de sorte que l'on ne se trouve plus nécessairement dans l'arbre des triplets de Cohn, mais dans un arbre plus vaste, l'arbre complet de toutes les solutions dans $(\mathbb{N} - \{0\})^3$ de l'équation de Markoff. Cet arbre, que l'on va considérer désormais, est construit à partir du triplet $(1, 1, 1)$ avec les trois transformations,

$$\begin{aligned} \tilde{X} &: (m, m_1, m_2) \rightarrow (3m_1m_2 - m, m_1, m_2), \\ \tilde{Y} &: (m, m_1, m_2) \rightarrow (m, 3mm_2 - m_1, m_2), \\ \tilde{Z} &: (m, m_1, m_2) \rightarrow (m, m_1, 3mm_1 - m_2). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Sur des triplets de matrices choisis ici de forme $(B^{-1}, A, B^{-1}A^{-1})$, on peut traduire ces transformations grâce à la relation de Fricke (FR_2) vue avant :

$$\begin{aligned} X_\phi &: (B^{-1}, A, B^{-1}A^{-1}) \rightarrow ((ABA)^{-1}, A^{-1}, (ABA)^{-1}A), \\ Y_\phi &: (B^{-1}, A, B^{-1}A^{-1}) \rightarrow (B, (BAB), B(BAB)^{-1}), \\ Z_\phi &: (B^{-1}, A, B^{-1}A^{-1}) \rightarrow (B^{-1}, A^{-1}, B^{-1}A). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ces conditions s'écrivent de façon équivalente sur les couples de matrices associés :

$$\begin{aligned} X_\phi &: (A, B) \rightarrow (A^{-1}, ABA), \\ Y_\phi &: (A, B) \rightarrow (BAB, B^{-1}), \\ Z_\phi &: (A, B) \rightarrow (A^{-1}, B). \end{aligned} \quad (5.18)$$

On peut remarquer que ces transformations sont involutives, on dit aussi que ce sont des réflexions ou des symétries,

$$X_\phi^2 = Y_\phi^2 = Z_\phi^2 = \text{id}. \quad (5.19)$$

En les composant de façon habituelle, on peut décrire tout chemin de l'arbre complet par un mot $\text{ch}(X_\phi, Y_\phi, Z_\phi)$ en X_ϕ, Y_ϕ ou Z_ϕ . Cet arbre s'identifie ainsi à un groupe qui est produit libre de trois groupes à deux éléments [5, page 24],

$$T_3 = C_2 * C_2 * C_2 = \langle X_\phi, Y_\phi, Z_\phi \mid X_\phi^2 = Y_\phi^2 = Z_\phi^2 = 1 \rangle. \quad (5.20)$$

Il peut être représenté graphiquement par le topographe de Conway [11]. Il apparaît dans de nombreux développements mathématiques [18], parfois explicitement sous forme d'arbre [42, page 28] et [46, page 41].

Le fait que l'on trouve réellement cet arbre grâce aux triplets est démontrable en considérant la hauteur de tout triplet,

$$h = \max(m, m_1, m_2). \quad (5.21)$$

Pour un triplet différent de $(1, 1, 1)$, si cette hauteur est atteinte sur m , le triplet est donné par X et on a

$$\begin{aligned} 3m_1m_2 - m &< \max(m_1, m_2) < h = m, \\ h = m &= \max(m, m_1) < 3mm_2 - m_1, \\ h = m &= \max(m, m_2) < 3mm_1 - m_2. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Si la hauteur est atteinte sur m_1 le triplet est donné par Y , si elle est atteinte sur m_2 le triplet est donné par Z , et on a dans tous les cas des inégalités équivalentes qui permettent de conclure à la structure de l'arbre [4, pages 27-28].

5.3. Une conséquence pour le groupe libre. On est maintenant en mesure de répondre à une question posée avant.

PROPOSITION 5.2. *Le groupe $F_2 = [\text{SL}(2, \mathbb{Z}), \text{SL}(2, \mathbb{Z})]$ vérifie la condition*

$$-1 \notin F_2 = [\text{SL}(2, \mathbb{Z}), \text{SL}(2, \mathbb{Z})]. \quad (5.23)$$

En particulier, le groupe quotient $\text{SL}(2, \mathbb{Z})/F_2$ est cyclique à 12 éléments,

$$\text{SL}(2, \mathbb{Z})/F_2 \simeq C_{12}. \quad (5.24)$$

L'application canonique $\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \text{SL}(2, \mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ donne un isomorphisme de groupes de $[\text{SL}(2, \mathbb{Z}), \text{SL}(2, \mathbb{Z})]$ sur le sous-groupe normal dérivé $[\Gamma, \Gamma]$ du groupe modulaire projectif Γ , sous-groupe qui est aussi libre à deux générateurs. Ceci donne une suite exacte,

$$1 \rightarrow F_2 \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{12} \rightarrow 1. \quad (5.25)$$

En effet dans le cas contraire, on pourrait écrire avec un mot réduit en A_0 et B_0

$$-1 = w(A_0, B_0). \quad (5.26)$$

Et en multipliant cet élément par lui même, on aurait une expression,

$$w(A_0, B_0)w(A_0, B_0) = 1. \quad (5.27)$$

Or le mot du premier membre devrait se réduire au mot vide dans G , avec deux cas à distinguer, tous deux impossibles :

- (i) le mot réduit $w(A_0, B_0)$ est vide. Dans ce cas $w(A_0, B_0)$ est de longueur paire et égal à $w(A_0, B_0)^{-1}$. Mais par les simplifications internes à $w(A_0, B_0)$ on trouve une contradiction avec le fait que le mot $w(A_0, B_0)$ lui même est réduit ;
- (ii) le mot réduit $w(A_0, B_0)$ n'est pas vide, mais on obtient alors une relation liant A_0 et B_0 . Ceci est contradictoire avec le fait que G est un groupe libre.

En particulier, en considérant la projection canonique

$$V \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \longrightarrow \bar{V} = \{\pm V\} \in \Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) / \{\pm 1\}. \quad (5.28)$$

On obtient par restriction un isomorphisme de groupes,

$$F_2 = [\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}), \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})] \longrightarrow [\Gamma, \Gamma]. \quad (5.29)$$

D'autre part, on a vu avant que l'on a $-T^6 \in F_2$.

Ce que l'on vient de démontrer impose que $T^6 \notin F_2$.

Dans le groupe quotient $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})/F_2)$, la classe T_{F_2} de T qui engendre ce groupe est donc d'ordre 12 et non 6. La suite exacte en résulte facilement (voir [2] pour la définition d'une suite exacte). Ceci termine la démonstration de première partie de la dernière proposition. Le reste de ce résultat est évident.

REMARQUE 5.3. On trouve dans l'ouvrage de Newman [29, chapitre VIII] des résultats complétant ce qui précède. Dans le groupe Γ tout sous-groupe normal est libre, à l'exception des trois groupes suivants : Γ le groupe entier, $\Delta(\bar{S})$ sous-groupe normal d'indice 3 engendré par \bar{S} , $\Delta(\overline{ST})$ sous-groupe normal d'indice 2 engendré par \overline{ST} .

De plus, tout sous-groupe normal libre G' de Γ d'indice fini μ est libre de rang r avec

$$r = 1 + \frac{\mu}{6}. \quad (5.30)$$

Le niveau du groupe G' est défini comme étant le plus petit entier n tel que \bar{T}^n appartienne à G' . Le genre du groupe G' , qui a une signification pour la surface de Riemann obtenue en quotientant le demi-plan de Poincaré H par le groupe G' , est alors le nombre

$$g = 1 + \frac{\mu(n-6)}{12n}, \quad (5.31)$$

$g = 1$ est la seule valeur du genre pour laquelle il existe une infinité de sous groupes normaux d'indice fini de Γ . Pour les autres valeur de g , il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour μ , et on trouve dans [28] une classification des sous-groupes normaux de $\Gamma = \text{SL}(2, \mathbb{Z}) / \{\pm 1\}$ par indice et par genre. Newman définit aussi les sous-groupes de congruence principaux $\Gamma(n)$ de niveau n . Il donne l'expression de leur indice pour $n > 2$,

$$\mu(n) = \frac{1}{2} n^3 \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right). \quad (5.32)$$

5.4. Interprétation de l'arbre sur les générateurs de F_2 . En rapprochant le [théorème 2.1](#) et les conséquences tirées ci-dessus de la [proposition 5.1](#), on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 5.4. *Tout couple de générateurs (A, B) du groupe F_2 donne un triplet de solutions de l'équation de Markoff tel que*

$$(m, m_1, m_2) = ((\text{tr}(B^{-1})/3), (\text{tr}(A)/3), (\text{tr}(B^{-1}A^{-1})/3)) \in (\mathbb{N} - \{0\})^3. \quad (5.33)$$

Inversement, pour tout triplet $(m, m_1, m_2) \in (\mathbb{N} - \{0\})^3$ de solutions de l'équation de Markoff il existe un couple de générateurs (A, B) du groupe F_2 vérifiant l'égalité précédente.

Remarquons que dans le [théorème 2.1](#), l'écriture des triplets utilise des expressions de forme

$$((\text{tr}(B^{-1})/3), (\text{tr}(A)/3), (\text{tr}(B^{-1}A^{-1})/3)). \quad (5.34)$$

Au contraire, dans la [proposition 5.1](#), on utilise des triplets de forme

$$((\text{tr}(B)/3), (\text{tr}(A)/3), (\text{tr}(AB)/3)). \quad (5.35)$$

Ceci n'a aucune importance, car pour toute matrice V de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ on a

$$\text{tr}(V) = \text{tr}(V^{-1}). \quad (5.36)$$

Le [théorème 5.4](#) assure un lien profond entre la théorie de Markoff et l'étude du groupe libre à deux générateurs. Comme ce groupe est défini indépendamment de sa présentation matricielle sous la forme de groupe dérivé de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, on doit approfondir ce lien pour comprendre comment faire apparaître un arbre de façon directe à partir du groupe libre à deux générateurs le plus général.

6. Equivalence des couples de générateurs de F_2 . Le [théorème 5.4](#) conduit à considérer l'application surjective de l'ensemble des couples de générateurs de F_2 dans l'ensemble des triplets de solutions de l'équation de Markoff :

$$\Pi : (A, B) \longrightarrow ((\text{tr}(B^{-1})/3), (\text{tr}(A)/3), (\text{tr}(B^{-1}A^{-1})/3)) \in (\mathbb{N} - \{0\})^3. \quad (6.1)$$

Différents couples de générateurs de F_2 ont pour image par Π la solution singulière $(1, 1, 1)$ par exemple (A_0, B_0) , (B_0, A_0) , $(B_0^{-1}A_0^{-1}, A_0)$, Ceci montre que l'application Π n'est pas injective.

La remarque que l'on vient de faire conduit à poser cette définition.

DÉFINITION 6.1. Un couple de générateurs (A, B) du groupe F_2 est fondamental si et seulement on a

$$\Pi(A, B) = (1, 1, 1). \quad (6.2)$$

Il est alors facile de s'assurer qu'il existe une infinité de couples de générateurs fondamentaux, par exemple ceux qui sont de la forme, avec $N \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$

$$(NA_0N^{-1}, NB_0N^{-1}). \quad (6.3)$$

Cette remarque sur le rôle des automorphismes intérieurs conduit à poser plus généralement la définition suivante.

DÉFINITION 6.2. On dit que deux couples de générateurs (A_1, B_1) et (A_2, B_2) du groupe F_2 sont équivalents par un automorphisme intérieur de $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ si et seulement s'il existe une matrice $N \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ telle que l'on a

$$(A_2, B_2) = (NA_1N^{-1}, NB_1N^{-1}). \quad (6.4)$$

On vérifie facilement que cette définition donne bien une relation d'équivalence. Elle peut d'ailleurs être rendue plus fine, en une équivalence par un automorphisme intérieur de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, en imposant la condition plus forte $N \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$.

On voit par exemple que les deux couples (A_0, B_0) et (B_0, A_0) sont équivalents avec

$$N = \pm O = \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}). \quad (6.5)$$

Par contre, les deux couples (A_0, B_0) et (A_0^{-1}, B_0) ne permettent de trouver aucune matrice $N \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ les rendant équivalents par un automorphisme intérieur.

6.1. Caractérisation des couples fondamentaux. En approfondissant la dernière remarque faite, on énonce ce théorème.

THÉORÈME 6.3. *Pour tout couple de générateurs (A, B) du groupe F_2 , on a équivalence des propriétés suivantes :*

- (1) *Le couple (A, B) est fondamental.*
- (2) *Le couple (A, B) est équivalent par un automorphisme intérieur de $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ au couple de générateurs (A_0, B_0) .*

Dans ce cas, il y a unicité au signe près de la matrice $N \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ telle que

$$(A, B) = (NA_0N^{-1}, NB_0N^{-1}). \quad (6.6)$$

- (i) L'implication (2) \Rightarrow (1) est évidente.
(ii) L'unicité de la matrice N au signe près s'établit à partir de l'égalité

$$(NA_0N^{-1}, NB_0N^{-1}) = (MA_0M^{-1}, MB_0M^{-1}). \quad (6.7)$$

On pose

$$M^{-1}N = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

On développe et on identifie, en utilisant les expressions de A_0 et B_0 . Il reste que

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{11} = \alpha_{22}. \quad (6.9)$$

Avec la condition $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = \pm 1$, on trouve la seule possibilité,

$$M^{-1}N = \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Et donc nécessairement

$$M = \pm N. \quad (6.11)$$

- (iii) L'implication (1) \Rightarrow (2) est beaucoup plus délicate à établir. Avec les conditions sur les traces de A et B qui sont égales à 3, on pose

$$A = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & 3 - u_{11} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 3 - a_{11} \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

Comme ces deux matrices sont dans $SL(2, \mathbb{Z})$, on a par les déterminants

$$u_{11}^2 - 3u_{11} + 1 = -u_{12}u_{21}, \quad a_{11}^2 - 3a_{11} + 1 = -a_{12}a_{21}. \quad (6.13)$$

L'idée de la démonstration qui suit consiste à interpréter ces deux égalités dans un anneau d'entiers quadratiques pour en déduire une structure paramétrique des matrices A et B . On combine ensuite ces structures pour construire l'automorphisme intérieur recherché, sachant que l'hypothèse essentielle à utiliser à ce stade est que la trace de la matrice AB est aussi égale à 3.

6.1.1. Interprétation des égalités issues des déterminants. On interprète ici l'égalité qui résulte de la valeur du déterminant de B . On le fait dans l'anneau des entiers quadratiques $\mathbb{Z}[\omega]$, où

$$\omega = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \omega^2 - 1. \quad (6.14)$$

Cette égalité s'écrit avec la norme de l'anneau $\mathbb{Z}[\omega]$,

$$N(a_{11} - 2 + \omega) = -a_{12}a_{21}. \quad (6.15)$$

L'idéal $a_{12}\mathbb{Z}[\omega]$ de $\mathbb{Z}[\omega]$ se décompose d'une et une seule façon en un produit d'idéaux premiers inertes, décomposés ou ramifiés :

$$a_{12}\mathbb{Z}[\omega] = \left(\prod_{i=1}^{i=l} (p_i\mathbb{Z}[\omega])^{\beta_i}\right) \left(\prod_{d=1}^{d=m} (p_d, e_d + \omega)^{\beta_d}\right) \left(\prod_{r=1}^{r=n} (p_r, e_r + \omega)^{\beta_r}\right). \quad (6.16)$$

On a, selon la nature des idéaux considérés,

- (i) $p_i \neq 5$ nombre premier égal à 2 ou impair tel que 5 non résidu quadratique,
- (ii) $p_d \neq 5$ nombre premier impair tel que 5 résidu quadratique,
- (iii) $p_r = 5$.

En passant aux normes des idéaux

$$N(a_{12}\mathbb{Z}[\omega]) = a_{12}^2 = \prod_{i=1}^{i=l} (p_i^{2\beta_i}) \prod_{d=1}^{d=m} (p_d^{\beta_d}) \prod_{r=1}^{r=n} (p_r^{\beta_r}). \quad (6.17)$$

Ceci impose dans \mathbb{Z} que β_d et β_r soient pairs. D'où une décomposition dans \mathbb{Z} ,

$$a_{12} = \prod_{i=1}^{i=l} (p_i^{\beta_i}) \prod_{d=1}^{d=m} (p_d^{(\beta_d/2)}) \prod_{r=1}^{r=n} (p_r^{(\beta_r/2)}). \quad (6.18)$$

Sachant que $\mathbb{Z}[\omega]$ est un anneau euclidien et donc aussi principal, on peut écrire

$$(p_d, e_d + \omega) = \alpha_d\mathbb{Z}[\omega], \quad (p_r, e_r + \omega) = \alpha_r\mathbb{Z}[\omega]. \quad (6.19)$$

Avec les normes des idéaux, en utilisant éventuellement $N(\omega) = -1$, on a

$$p_d = N(\alpha_d), \quad 5 = p_r = N(\alpha_r). \quad (6.20)$$

Ceci donne

$$a_{12} = \prod_{i=1}^{i=l} (p_i^{\beta_i}) N\left(\prod_{d=1}^{d=m} (\alpha_d^{\beta_d/2}) \prod_{r=1}^{r=n} (\alpha_r^{\beta_r/2})\right). \quad (6.21)$$

Il en résulte la possibilité de décomposer a_{12} avec

$$\begin{aligned} a_{12} &= \prod_{i=1}^{i=l} (p_i^{\beta_i}) N(\beta) = a'_{12} N(\beta), \\ \beta &= \prod_{d=1}^{d=m} (\alpha_d^{\beta_d/2}) \prod_{r=1}^{r=n} (\alpha_r^{\beta_r/2}) = p_{12} + q_{12}\omega \in \mathbb{Z}[\omega], \\ a'_{12} &= \prod_{i=1}^{i=l} (p_i^{\beta_i}) \in \mathbb{N} - \{0\}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

En échangeant les rôles de a_{12} et a_{21} , on a de même

$$\begin{aligned} a_{21} &= \prod_{i=1}^{i=l'} (p_i^{\gamma_i}) N(\gamma) = a'_{21} N(\gamma), \\ \gamma &= \prod_{d=1}^{d=m} (\alpha_d^{\gamma_d/2}) \prod_{r=1}^{r=n} (\alpha_r^{\gamma_r/2}) = p_{21} + q_{21}\omega \in \mathbb{Z}[\omega], \\ a'_{21} &= \prod_{i=1}^{i=l'} (p_i^{\gamma_i}) \in \mathbb{N} - \{0\}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

On peut de même décomposer l'idéal $(a_{11} - 2 + \omega)\mathbb{Z}[\omega]$ d'une et une seule façon en produit d'idéaux premiers :

$$(a_{11} - 2 + \omega)\mathbb{Z}[\omega] = \left(\prod_{i=1}^{i=l''} (p_i \mathbb{Z}[\omega])^{\lambda_i} \right) \left(\prod_{d=1}^{d=m''} (p_d, e_d + \omega)^{\lambda_d} \right) \left(\prod_{r=1}^{r=n''} (p_r, e_r + \omega)^{\lambda_r} \right). \quad (6.24)$$

Ceci donne pour les normes des idéaux

$$\begin{aligned} N((a_{11} - 2 + \omega)\mathbb{Z}[\omega]) &= |a_{11}^2 - 3a_{11} + 1| \\ &= \left(\prod_{i=1}^{i=l''} p_i^{2\lambda_i} \right) \left(\prod_{d=1}^{d=m''} p_d^{\lambda_d} \right) \left(\prod_{r=1}^{r=n''} p_r^{\lambda_r} \right) \\ &= |a_{12}a_{21}| \\ &= \Pi_i (p_i^{\beta_i + \gamma_i}) \Pi_d (p_d^{((\beta_d + \gamma_d)/2)}) \Pi_r (p_r^{((\beta_r + \gamma_r)/2)}). \end{aligned} \quad (6.25)$$

On en déduit, pour tout $i = 1, \dots, l''$, que

$$\beta_i + \gamma_i = 2\lambda_i. \quad (6.26)$$

Ceci permet de définir

$$\theta = \prod_{i=1}^{i=l''} p_i^{\lambda_i}. \quad (6.27)$$

L'intérêt de ce qui précède est que l'on est parvenu à une décomposition,

$$\begin{aligned} a_{12} &= a'_{12} (p_{12}^2 + p_{12}q_{12} - q_{12}^2) = a'_{12} N(p_{12} + q_{12}\omega), \\ a_{21} &= a'_{21} (p_{21}^2 + p_{21}q_{21} - q_{21}^2) = a'_{21} N(p_{21} + q_{21}\omega). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Par ce que l'on vient de voir sur les normes et $N(\omega) = -1$, on a la possibilité d'écrire

$$\begin{aligned} (a_{11} - 2 + \omega) &= \theta \omega (p_{12} + q_{12}\omega) (p_{21} + q_{21}\omega), \\ \theta^2 &= a'_{12} a'_{21} = \left(\prod_{i=1}^{i=l''} (p_i)^{\lambda_i} \right)^2 \quad \text{carré dans } \mathbb{N} - \{0\}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

En développant la dernière expression et identifiant, on en déduit les conditions suivantes dans \mathbb{Z} :

$$\begin{aligned} a_{11} - 2 &= \theta (q_{12}p_{21} + p_{12}q_{21} + q_{12}q_{21}), \\ 1 &= \theta (q_{12}p_{21} + p_{12}q_{21} + p_{12}p_{21} + 2q_{12}q_{21}). \end{aligned} \quad (6.30)$$

La dernière égalité impose $\theta = 1$. Par l'expression de θ^2 vue avant, on obtient $a'_{12} = a'_{21} = 1$.

D'où finalement les deux égalités

$$\begin{aligned} 1 &= (q_{12}p_{21} + p_{12}q_{21} + p_{12}p_{21} + 2q_{12}q_{21}), \\ a_{11} &= (2 + q_{12}p_{21} + p_{12}q_{21} + q_{12}q_{21}). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Ceci donne différentes expressions paramétriques pour la matrice B , avec $p_{12}, q_{12}, p_{21}, q_{21} \in \mathbb{Z}$, par exemple,

$$B = \begin{bmatrix} (2 + q_{12}p_{21} + p_{12}q_{21} + q_{12}q_{21}) & (p_{12}^2 + p_{12}q_{12} - q_{12}^2) \\ (p_{21}^2 + p_{21}q_{21} - q_{21}^2) & -1 + 2p_{12}p_{21} + q_{12}p_{21} + p_{12}q_{21} + 3q_{12}q_{21} \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

La même conclusion vaut pour la matrice A , avec d'autres paramètres entiers.

6.1.2. Construction d'un automorphisme intérieur associé. On cherche ici à identifier une matrice $N \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ telle que

$$B = NB_0N^{-1}. \quad (6.33)$$

On la suppose de la forme

$$N = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

On remarque d'abord qu'une seule de ces matrices N les détermine toutes. Il suffit en effet de remplacer N par NV , avec

$$B_0 = VB_0V^{-1}. \quad (6.35)$$

Cette dernière égalité donne toutes les possibilités pour V

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_1 - v_2 \end{bmatrix} \text{ avec } v_1, v_2 \in \mathbb{Z}. \quad (6.36)$$

La condition $\det(V) = \pm 1$ s'obtient par la résolution de l'équation diophantienne suivante :

$$v_1^2 - v_1v_2 - v_2^2 = \pm 1. \quad (6.37)$$

Elle possède une infinité de solutions données avec les nombres de Fibonacci [3]. En particulier, on peut faire en sorte d'avoir $\det(V) = -1$ si on le veut.

On écrit maintenant la relation définissant N sous la forme

$$BN = NB_0. \quad (6.38)$$

Ceci est équivalent à la conjonction des quatre conditions suivantes :

$$\begin{aligned} (a_{11} - 1)\alpha_{11} + \alpha_{12} + a_{12}\alpha_{21} &= 0, & a_{21}\alpha_{11} + (2 - a_{11})\alpha_{21} + \alpha_{22} &= 0, \\ \alpha_{11} + (a_{11} - 2)\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22} &= 0, & a_{21}\alpha_{12} + \alpha_{21} + (1 - a_{11})\alpha_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Avec l'expression du déterminant de B , ces relations se réduisent à deux, de sorte que l'on peut se limiter à rechercher α_{11} et α_{21} tels que

$$N = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & (1 - a_{11})\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{21} \\ \alpha_{21} & (a_{11} - 2)\alpha_{21} - a_{21}\alpha_{11} \end{bmatrix}. \quad (6.40)$$

La condition $\det(N) = \pm 1$ s'écrit

$$a_{12}\alpha_{21}^2 + (2a_{11} - 3)\alpha_{11}\alpha_{21} - a_{21}\alpha_{11}^2 = \pm 1. \quad (6.41)$$

Multipliée par a_{12} , elle permet d'écrire avec les expressions établies précédemment

$$\begin{aligned} & (a_{12}\alpha_{21} + (a_{11} - 2)\alpha_{11})^2 + (a_{12}\alpha_{21} + (a_{11} - 2)\alpha_{11})\alpha_{11} - \alpha_{11}^2 \\ & = \pm (p_{12}^2 + p_{12}q_{12} - q_{12}^2). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Dans l'anneau principal $\mathbb{Z}[\omega]$, elle est assurée pourvu que l'une ou l'autre des deux conditions suivantes soit vérifiée, avec $n \in \mathbb{Z}$:

$$a_{12}\alpha_{21} + ((a_{11} - 2) + \omega)\alpha_{11} = \pm \omega^n (p_{12} + q_{12}\omega), \quad (6.43)$$

$$a_{12}\alpha_{21} + ((a_{11} - 2) + \omega)\alpha_{11} = \pm \omega^n \overline{(p_{12} + q_{12}\omega)}. \quad (6.44)$$

Multipliée par a_{21} , on s'assure de même que l'une ou l'autre des deux conditions suivantes doit être vérifiée, avec $m \in \mathbb{Z}$:

$$(1 - (a_{11} - 2)\omega)\alpha_{21} + a_{21}\omega\alpha_{11} = \pm \omega^m \overline{(p_{21} + q_{21}\omega)}, \quad (6.45)$$

$$(1 - (a_{11} - 2)\omega)\alpha_{21} + a_{21}\omega\alpha_{11} = \pm \omega^m (p_{21} + q_{21}\omega). \quad (6.46)$$

Dans ce qui précède, on a établi que

$$\begin{aligned} & (a_{11} - 2) + \omega = \omega(p_{12} + q_{12}\omega)(p_{21} + q_{21}\omega), \\ & a_{12} = (p_{12} + q_{12}\omega)\overline{(p_{12} + q_{12}\omega)} = N(p_{12} + q_{12}\omega). \end{aligned} \quad (6.47)$$

La condition (6.43) se simplifie donc dans $\mathbb{Z}[\omega]$ en la suivante :

$$\overline{(p_{12} + q_{12}\omega)}\alpha_{21} + \omega(p_{21} + q_{21}\omega)\alpha_{11} = \pm \omega^n. \quad (6.48)$$

De même, on peut utiliser la relation suivante qui découle par conjugaison d'une précédente écriture :

$$(1 - (a_{11} - 2)\omega) = \overline{(p_{12} + q_{12}\omega)}\overline{(p_{21} + q_{21}\omega)}. \quad (6.49)$$

On combine avec

$$a_{21} = (p_{21} + q_{21}\omega)\overline{(p_{21} + q_{21}\omega)} = N(p_{21} + q_{21}\omega). \quad (6.50)$$

En simplifiant dans $\mathbb{Z}[\omega]$ la condition (6.45), on en déduit que

$$\overline{(p_{12} + q_{12}\omega)}\alpha_{21} + \omega(p_{21} + q_{21}\omega)\alpha_{11} = \pm \omega^m. \quad (6.51)$$

En comparant les deux conditions (6.48) et (6.51), il apparaît que l'on a nécessairement

$$m = n. \quad (6.52)$$

De sorte que les deux conditions (6.43) et (6.45) constituent la même relation à un facteur près de $\mathbb{Z}[\omega]$.

Par le même procédé, on voit que (6.44) et (6.46) sont la même relation à un facteur près de $\mathbb{Z}[\omega]$.

Il suffit maintenant d'utiliser les nombres de Fibonacci qui donnent pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\omega^n = \mathcal{F}_{n-1}\omega + \mathcal{F}_{n-2}. \quad (6.53)$$

On en déduit, dans le cas où (6.43) ou (6.45) est assurée que

$$\begin{aligned} \pm(\mathcal{F}_{n-1}\omega + \mathcal{F}_{n-2}) &= (q_{21}\alpha_{11} + p_{21}\alpha_{11} - q_{12}\alpha_{21})\omega \\ &\quad + (p_{12}\alpha_{21} + q_{12}\alpha_{21} + q_{21}\alpha_{11}). \end{aligned} \quad (6.54)$$

En identifiant

$$\begin{bmatrix} q_{21} & p_{12} + q_{12} \\ p_{21} + q_{21} & -q_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{n-2} \\ \mathcal{F}_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (6.55)$$

Le déterminant de ce système en α_{11} et α_{21} vaut

$$-p_{12}p_{21} - p_{12}q_{21} - q_{12}p_{21} - 2q_{12}q_{21} = -1. \quad (6.56)$$

Il permet la détermination effective de la matrice N avec

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{bmatrix} = \mp \begin{bmatrix} q_{12} & p_{12} + q_{12} \\ p_{21} + q_{21} & -q_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{n-2} \\ \mathcal{F}_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (6.57)$$

Dans le cas où c'est au contraire (6.44) ou (6.46) qui est assurée, un calcul analogue peut être fait. Il permet de même la détermination effective de la matrice N .

Remarquons qu'avec ce qui a été vu avant pour la matrice V , on peut faire en sorte d'avoir $\det(N) = 1$. On a donc établi dans ce qui précède la proposition suivante.

PROPOSITION 6.4. *Pour toute matrice $B \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, on a équivalence des trois propriétés suivantes :*

(1) $\text{tr}(B) = 3$.

(2) Il existe une matrice $N \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ telle que

$$B = NB_0N^{-1}. \quad (6.58)$$

(3) Il existe une matrice $N \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ telle que

$$B = NB_0N^{-1}. \quad (6.59)$$

Cette proposition est applicable aux deux matrices A et A_0 . Appliquée à A_0 , elle permet d'écrire

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} B_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}. \quad (6.60)$$

Avec une expression comparable pour la matrice A , on déduit en éliminant B_0 l'existence d'une matrice $M \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ vérifiant

$$A = MA_0M^{-1}. \quad (6.61)$$

6.1.3. Fin de la démonstration du théorème 6.3. On peut maintenant supposer que l'on a avec $M, N \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ les écritures suivantes :

$$A = MA_0M^{-1}, \quad B = NB_0N^{-1}. \quad (6.62)$$

En combinant ces expressions, on obtient

$$B^{-1}A^{-1} = NB_0^{-1}N^{-1}MA_0^{-1}M. \quad (6.63)$$

Ceci conduit à considérer la matrice

$$W = N^{-1}M = \begin{bmatrix} \varpi_1 & \varpi_4 \\ \varpi_3 & \varpi_2 \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}). \quad (6.64)$$

On utilise l'hypothèse essentielle que la trace de $B^{-1}A^{-1}$ est égale à 3, et on l'écrit sous la forme équivalente,

$$\text{tr}(B_0^{-1}WA_0^{-1}W^{-1}) = 3 = 3(\varpi_1\varpi_2 - \varpi_3\varpi_4). \quad (6.65)$$

Ceci donne une équation diophantienne,

$$\varpi_1^2 - \varpi_2^2 + \varpi_3^2 - \varpi_4^2 + 2\varpi_2\varpi_1 - \varpi_1\varpi_4 - \varpi_2\varpi_4 - \varpi_3\varpi_4 + \varpi_2\varpi_3 + \varpi_1\varpi_3 = 0. \quad (6.66)$$

Celle-ci possède par construction deux solutions évidentes :

$$(\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \varpi_4) = \pm(1, 1, 0, 0). \quad (6.67)$$

Pour déterminer toutes les autres solutions, on orthogonalise la forme quadratique avec les quatre vecteurs suivants :

$$v_0(0, 1, 0, 0), \quad v_1(0, 1, 2, 0), \quad v_2(0, 1, -1, 3), \quad v_3(2, 1, -1, 1). \quad (6.68)$$

On obtient ainsi la forme quadratique plus simple,

$$\gamma_0^2 + 3\gamma_1^2 - 4\gamma_2^2 - 12\gamma_3^2. \quad (6.69)$$

Où

$$\begin{aligned} \varpi_1 &= 2\gamma_2, & \varpi_2 &= \gamma_2 + 3\gamma_3, \\ \varpi_3 &= 2\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3, & \varpi_4 &= \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Une solution particulière issue de celle identifiée ci-dessus est

$$(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \pm\left(-1, \left(\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{6}\right)\right). \quad (6.71)$$

Le calcul que l'on vient de faire introduit naturellement une algèbre de quaternions classiquement notée [1, page 18], où \mathbb{Q} désigne le corps des nombres rationnels,

$$\left(\begin{array}{c} (-3, 4) \\ \mathbb{Q} \end{array} \right). \quad (6.72)$$

Dans cette algèbre, la dernière forme quadratique est en réalité la norme du quaternion suivant :

$$q = y_0 e_0 + y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3. \quad (6.73)$$

En exprimant (y_0, y_1, y_2, y_3) en fonction de $(\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \varpi_4)$, tout revient à rechercher un quaternion de norme nulle dans le sous-module engendré par les quatre éléments suivants :

$$q_0 = e_0, \quad q_1 = -\frac{e_0 - e_1}{2}, \quad q_2 = -\frac{3e_0 - e_1 - 2e_3}{6}, \quad q_3 = -\frac{3e_0 - e_1 - 3e_2 + e_3}{6}. \quad (6.74)$$

Les règles de calcul de l'algèbre, où e_0 est unité, sont les suivantes :

$$e_1^2 = -3e_0, \quad e_2^2 = 4e_0, \quad e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3. \quad (6.75)$$

Cette algèbre de quaternions n'est pas un corps puisque la forme quadratique associée a une solution rationnelle non triviale. C'est donc une algèbre isomorphe à $M_2(\mathbb{Q})$, l'algèbre des matrices 2×2 à coefficients rationnels [1, page 20].

Il est facile d'explicitier l'isomorphisme de cette algèbre de quaternions sur $M_2(\mathbb{Q})$ à partir du fait que l'on a une solution évidente $(x, y) = (1, 1)$ pour l'équation

$$-3x^2 + 4y^2 = 1. \quad (6.76)$$

On pose pour cela que

$$e_0^* = e_0, \quad e_1^* = e_1 + e_2, \quad e_2^* = e_3, \quad e_3^* = -4e_1 - 3e_2. \quad (6.77)$$

Ceci donne une base de l'algèbre de quaternions notée usuellement

$$\left(\begin{array}{c} (1, 12) \\ \mathbb{Q} \end{array} \right). \quad (6.78)$$

Or cette dernière base est facilement explicitable sous la forme matricielle [1, page 20]. On en déduit des expressions pour les éléments e_0, e_1, e_2, e_3 . Ceci permet d'écrire sous la forme matricielle,

$$q = y_0 e_0 + y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 = \begin{bmatrix} y_0 - 3y_1 + 4y_2 & y_1 - y_2 - y_3 \\ -12y_1 + 12y_2 - 12y_3 & y_0 + 3y_1 - 4y_2 \end{bmatrix}. \quad (6.79)$$

La norme $N(q)$ de ce quaternion n'est autre que le déterminant de la matrice correspondante. Elle vaut

$$\begin{aligned} y_0^2 + 3y_1^2 - 4y_2^2 - 12y_3^2 &= (y_0 - 3y_1 + 4y_2)(y_0 + 3y_1 - 4y_2) \\ &\quad - (y_1 - y_2 - y_3)(-12y_1 + 12y_2 - 12y_3). \end{aligned} \quad (6.80)$$

Tout revient donc pour le problème qui nous concerne, en remplaçant les termes y_i par leurs expressions en fonction de $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \varpi_4$, à étudier l'égalité dans \mathbb{Z} ,

$$(\varpi_1 + \varpi_4 - 2\varpi_3 - \varpi_2)(\varpi_4 + \varpi_3 - 2\varpi_1) = (\varpi_1 - \varpi_3 - \varpi_2)(3\varpi_3 - \varpi_2 - \varpi_1). \quad (6.81)$$

Une solution simple consiste à poser avec de nouveaux paramètres dans \mathbb{Z}

$$\begin{aligned} (\varpi_1 + \varpi_4 - 2\varpi_3 - \varpi_2) &= \lambda_1 \mu_1, & (\varpi_4 + \varpi_3 - 2\varpi_1) &= \mu_2 \lambda_2, \\ (\varpi_1 - \varpi_3 - \varpi_2) &= \lambda_1 \mu_2, & (3\varpi_3 - \varpi_2 - \varpi_1) &= \mu_1 \lambda_2. \end{aligned} \quad (6.82)$$

En inversant ces relations et en remarquant que les expressions obtenues donnent une décomposition en produit de matrices pour W ,

$$W = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\mu_1 - 3\mu_2 & \mu_1 - 2\mu_2 \\ \mu_1 - 2\mu_2 & \mu_1 - \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 - \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (6.83)$$

En passant au déterminant, on obtient l'égalité suivante :

$$(\mu_2^2 + \mu_2 \mu_1 - \mu_1^2)(\lambda_1^2 + 3\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2^2) = 4. \quad (6.84)$$

Cette égalité s'interprète dans l'anneau $\mathbb{Z}[\omega]$ sous la forme

$$(2) = (\mu_2 + \mu_1 \omega)Z[\omega] \cdot (\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_2 \omega)Z[\omega]. \quad (6.85)$$

Comme l'idéal (2) est premier et inerte dans l'anneau principal $\mathbb{Z}[\omega]$, il en découle seulement deux possibilités.

(1) La première possibilité donne

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_2 \omega)Z[\omega] = (2), \quad (\mu_2 + \mu_1 \omega) \text{ unité de } \mathbb{Z}[\omega]. \quad (6.86)$$

Elle impose que $(\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_2 \omega)$ soit multiple de 2 par une unité $\varepsilon + \zeta \omega$ de $\mathbb{Z}[\omega]$. Et ceci se traduit dans $GL(2, \mathbb{Z})$ comme suit :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 - \lambda_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \zeta & \varepsilon + \zeta \end{bmatrix}. \quad (6.87)$$

En remplaçant dans le produit précédent égal à W , on en déduit une autre décomposition de W en deux nouvelles matrices que l'on note respectivement N_0^{-1} et M_0 ,

$$W = N^{-1}M = \begin{bmatrix} -3\mu_2 + 2\mu_1 & -4\mu_2 + 3\mu_1 \\ -2\mu_2 + \mu_1 & -3\mu_2 + \mu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \zeta & \varepsilon + \zeta \end{bmatrix} = N_0^{-1}M_0. \quad (6.88)$$

On vérifie alors, avec les expressions de A_0 et M_0 que l'on a

$$M_0 A_0^{-1} M_0^{-1} = A_0^{-1}. \quad (6.89)$$

On s'assure d'autre part, avec l'expression de B_0 et N_0 , que l'on a

$$N_0^{-1}A_0^{-1}B_0A_0N_0 = B_0. \quad (6.90)$$

On introduit alors la matrice

$$R = NN_0^{-1}A_0^{-1} = MM_0^{-1}A_0^{-1}. \quad (6.91)$$

Elle donne par construction

$$\begin{aligned} RA_0R^{-1} &= MM_0^{-1}A_0^{-1}A_0A_0M_0M^{-1} \\ &= MM_0^{-1}A_0M_0M^{-1} = MA_0M^{-1} = A, \\ RB_0R^{-1} &= NN_0^{-1}A_0^{-1}B_0A_0N_0N^{-1} = NB_0N^{-1} = B. \end{aligned} \quad (6.92)$$

(2) La seconde possibilité donne

$$(\mu_2 + \mu_1\omega)\mathbb{Z}[\omega] = (2), \quad (\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_2\omega) \text{ unité de } \mathbb{Z}[\omega]. \quad (6.93)$$

Elle se traite exactement de même et conduit à la même conclusion.

On a donc identifié de façon constructive un automorphisme intérieur. Et ceci termine la démonstration de notre théorème.

Sur l'exemple particulier du couple $(A, B) = (B_0, A_0)$, on peut calculer l'unique matrice $N \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ telle que

$$B_0 = NA_0N^{-1}, \quad A_0 = NB_0N^{-1}. \quad (6.94)$$

On trouve l'unique matrice

$$N = O = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}). \quad (6.95)$$

Remarquons qu'elle n'est pas dans $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$. Ceci montre que le [théorème 6.3](#) n'est pas vrai si l'on remplace dans son second énoncé $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ par $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$.

6.2. Généralisation aux autres couples de générateurs. Le [théorème 6.3](#) débouche sur un résultat beaucoup plus vaste, ce théorème.

THÉORÈME 6.5. *Deux couples de générateurs (A, B) et (A', B') du groupe F_2 étant donnés, on a équivalence des propriétés suivantes :*

(1) On a

$$\Pi(A, B) = \Pi(A', B'). \quad (6.96)$$

(2) Les deux couples (A, B) et (A', B') sont équivalents par un automorphisme intérieur de $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$.

Dans ce cas, il y a unicité au signe près de la matrice $N \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ telle que

$$(A', B') = (NAN^{-1}, NBN^{-1}). \quad (6.97)$$

On procède comme dans la démonstration du [théorème 6.3](#) :

(i) L'implication (2) \Rightarrow (1) est évidente.

(ii) L'implication (1) \Rightarrow (2) se fait en utilisant le fait établi avant que le couple de générateurs (A, B) du groupe F_2 donne un triplet de solutions de l'équation de Markoff

$$\begin{aligned} (m, m_1, m_2) &= \Pi(A, B) \\ &= ((\operatorname{tr}(B^{-1})/3), (\operatorname{tr}(A)/3), (\operatorname{tr}(B^{-1}A^{-1})/3)) \in (\mathbb{N} - \{0\})^3. \end{aligned} \quad (6.98)$$

Dans l'arbre complet de tous les triplets de cette équation, on peut construire avec les transformations X, Y et Z un chemin $\operatorname{ch}(X, Y, Z)$ conduisant de ce triplet au triplet $(1, 1, 1)$.

En combinant, on trouve ainsi deux mots W_1 et W_2 vérifiant

$$\Pi(W_1(A, B), W_2(A, B)) = (1, 1, 1). \quad (6.99)$$

Par le [théorème 6.3](#), on établit que

$$W_1(A, B) = RA_0R^{-1}, \quad W_2(A, B) = RB_0R^{-1}. \quad (6.100)$$

Par le chemin inverse dans l'arbre complet, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} A &= W_1^*(RA_0R^{-1}, RB_0R^{-1}) = RW_1^*(A_0, B_0)R^{-1}, \\ B &= W_2^*(RA_0R^{-1}, RB_0R^{-1}) = RW_2^*(A_0, B_0)R^{-1}. \end{aligned} \quad (6.101)$$

Sachant maintenant que pour (A', B') on peut faire le même raisonnement avec les mêmes chemins dans le même arbre, on peut écrire également

$$A' = R'w_1^*(A_0, B_0)R'^{-1}, \quad B' = R'w_2^*(A_0, B_0)R'^{-1}. \quad (6.102)$$

Et en éliminant les mots en A_0 et B_0 , il reste que

$$A' = (R'R^{-1})A(R'R^{-1})^{-1}, \quad B' = (R'R^{-1})B(R'R^{-1})^{-1}. \quad (6.103)$$

Toutes les vérifications complémentaires étant faciles, le [théorème 6.5](#) en résulte. Il interprète l'arbre complet de toutes les solutions de l'équation de Markoff dans $(\mathbb{N} - \{0\})^3$ comme étant l'arbre des classes des couples de générateurs du groupe F_2 pour l'action du groupe des automorphismes intérieurs de $\operatorname{GL}(2, \mathbb{Z})$.

7. Conséquences pour le groupe des automorphismes de F_2 . On a évoqué dans ce qui précède les automorphismes du groupe libre à deux générateurs F_2 . Ce qui a été dit se résume par le résultat suivant.

PROPOSITION 7.1. *Se donner un automorphisme $\phi \in \text{Aut}(F_2)$ du groupe libre F_2 est équivalent à se donner un couple de générateurs de ce même groupe F_2 .*

À partir du couple de générateurs (A_0, B_0) de F_2 , choisi comme couple de référence, il est en effet équivalent de considérer ϕ ou le couple de générateurs de F_2 . Par abus de langage ce dernier est aussi noté ϕ ,

$$\phi = (\phi(A_0), \phi(B_0)). \quad (7.1)$$

En pratique, ceci se traduit par l'existence de mots W_a^ϕ et W_b^ϕ tels que l'on peut écrire sur le couple de référence (A_0, B_0) , également appelé la base

$$\phi : A_0 \rightarrow W_a^\phi(A_0, B_0) = \phi(A_0), \quad \phi : B_0 \rightarrow W_b^\phi(A_0, B_0) = \phi(B_0). \quad (7.2)$$

Pour tout mot $W^{(a,b)}$ écrit avec les deux lettres a et b , et tout élément $W(A_0, B_0)$ du groupe F_2 qui s'en déduit dans la base (A_0, B_0) ,

$$\phi : W^{(a,b)}(A_0, B_0) \rightarrow W^\phi(A_0, B_0) = \phi(W^{(a,b)}(A_0, B_0)). \quad (7.3)$$

Sur le mot $W^{(a,b)}$, traduire ϕ revient à substituer le mot W_a^ϕ à la première variable de $W^{(a,b)}$, et W_b^ϕ à sa seconde variable. Ceci construit le mot $W^\phi = W^{(a,b)}(W_a^\phi, W_b^\phi)$ écrit avec les deux lettres a et b . On peut en effet écrire

$$\begin{aligned} \phi : (a, b) &\rightarrow (W_a^\phi, W_b^\phi), \\ \phi : W^{(a,b)} &\rightarrow W^\phi = W^{(a,b)}(W_a^\phi, W_b^\phi). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Et par construction, on a dans F_2

$$W^\phi(A_0, B_0) = \phi(W^{(a,b)}(A_0, B_0)) = W^{(a,b)}(\phi(A_0), \phi(B_0)). \quad (7.5)$$

Ceci revient à noter sous forme exponentielle

$$\phi(a) = W_a^\phi, \quad \phi(b) = W_b^\phi. \quad (7.6)$$

Avec les notations de [24, page 129] l'automorphisme ϕ est ainsi défini par la substitution libre $\bar{\phi}$ agissant sur les mots par

$$a \rightarrow W_a^\phi, \quad b \rightarrow W_b^\phi. \quad (7.7)$$

L'automorphisme identique s'écrit

$$\text{id}_{F_2} = (A_0, B_0). \quad (7.8)$$

Il donne sur les mots

$$W_a^{\text{id}_{F_2}} = a, \quad W_b^{\text{id}_{F_2}} = b. \quad (7.9)$$

Pour la composition des automorphismes, on a avec la notation habituelle pour la composition

$$\begin{aligned}
\phi_1 \circ \phi_2 &= (\phi_1 \circ \phi_2(A_0), \phi_1 \circ \phi_2(B_0)) \\
&= (\phi_1(\phi_2(A_0)), \phi_1(\phi_2(B_0))) \\
&= (\phi_1(W_a^{\phi_2}(A_0, B_0)), \phi_1(W_b^{\phi_2}(A_0, B_0))) \\
&= (W_a^{\phi_2}(\phi_1(A_0), \phi_1(B_0)), W_b^{\phi_2}(\phi_1(A_0), \phi_1(B_0))) \\
&= (W_a^{\phi_2}(W_a^{\phi_1}(A_0, B_0), W_b^{\phi_1}(A_0, B_0)), W_b^{\phi_2}(W_a^{\phi_1}(A_0, B_0), W_b^{\phi_1}(A_0, B_0))) \\
&= (W_a^{\phi_2}(W_a^{\phi_1}, W_b^{\phi_1})(A_0, B_0), W_b^{\phi_2}(W_a^{\phi_1}, W_b^{\phi_1})(A_0, B_0)).
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Soit

$$\begin{aligned}
\phi_1 \circ \phi_2(A_0) &= W_a^{\phi_1 \circ \phi_2}(A_0, B_0) = W_a^{\phi_2}(W_a^{\phi_1}, W_b^{\phi_1})(A_0, B_0), \\
\phi_1 \circ \phi_2(B_0) &= W_b^{\phi_1 \circ \phi_2}(A_0, B_0) = W_b^{\phi_2}(W_a^{\phi_1}, W_b^{\phi_1})(A_0, B_0).
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Ceci donne simplement sur les mots

$$\begin{aligned}
W_a^{\phi_1 \circ \phi_2} &= W_a^{\phi_2}(W_a^{\phi_1}, W_b^{\phi_1}) = \phi_1(W_a^{\phi_2}), \\
W_b^{\phi_1 \circ \phi_2} &= W_b^{\phi_2}(W_a^{\phi_1}, W_b^{\phi_1}) = \phi_1(W_b^{\phi_2}).
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Ces expressions reviennent à remplacer dans les deux expressions définissant ϕ_2 la lettre a par le mot $W_a^{\phi_1}$ associé à ϕ_1 (respectivement le terme A_0 par $W_a^{\phi_1}(A_0, B_0)$ dans F_2), et la lettre b par le mot $W_b^{\phi_1}$ associé à ϕ_1 (respectivement le terme B_0 par $W_b^{\phi_1}(A_0, B_0)$ dans F_2).

On remarquera que dans [24], [30, page 130], et d'autres références..., la substitution libre qui en résulte est notée $\overline{\phi_2 \phi_1}$. Avec nos notations cette substitution libre s'écrit au contraire $\overline{\phi_1 \circ \phi_2}$.

Pour éviter toute confusion (voir [23, page 22]), on n'utilisera pas dans la suite la notation $\phi_2 \phi_1$ qui inverse l'ordre des automorphismes par rapport à leur ordre dans la notation habituelle de la composition $\phi_1 \circ \phi_2$ ici adoptée.

Par abus de langage, on peut aussi faire agir φ sur F_2^n en notant

$$\phi(W_1(A_0, B_0), \dots, W_n(A_0, B_0)) = (\phi(W_1(A_0, B_0)), \dots, \phi(W_n(A_0, B_0))). \tag{7.13}$$

Ceci permet d'écrire de façon bien cohérente

$$\begin{aligned}
\phi_1 \circ \phi_2 &= (\phi_1(W_a^{\phi_2}(A_0, B_0)), \phi_1(W_b^{\phi_2}(A_0, B_0))) \\
&= \phi_1((W_a^{\phi_2}(A_0, B_0), W_b^{\phi_2}(A_0, B_0))) \\
&= \phi_1((\phi_2(A_0), \phi_2(B_0))) \\
&= \phi_1(\phi_2(A_0, B_0)) \\
&= \phi_1 \circ \phi_2(A_0, B_0).
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Le [théorème 6.5](#) peut alors être présenté au moyen de l'action des automorphismes intérieurs sur le groupe $\text{Aut}(F_2)$ des automorphismes du groupe libre F_2 . On se limite ici à considérer les automorphismes intérieurs sur $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$.

Remarquons en effet que les notations précédentes permettent de définir

$$\Pi(\phi) = \Pi(\phi(A_0), \phi(B_0)). \quad (7.15)$$

Le [théorème 6.5](#) peut alors être écrit avec un automorphisme intérieur φ_N sous la forme

$$\Pi(\phi) = \Pi(\phi') \iff \varphi_N \circ \phi = \phi'. \quad (7.16)$$

7.1. Précisions sur les automorphismes intérieurs. Les automorphismes que l'on considère dans ce qui précède sont issus d'une représentation du groupe libre F_2 dans le \mathbb{Z} -module \mathbb{Z}^2 ,

$$\rho_{A_0 B_0} : F_2 \longrightarrow \text{GL}(2, \mathbb{Z}). \quad (7.17)$$

Cette représentation transforme les générateurs du groupe libre en A_0 et B_0 . En fait, $\rho_{A_0 B_0}$ est un isomorphisme de groupes de F_2 sur son image que l'on a précédemment identifiée à F_2 ,

$$F_2 \simeq \rho_{A_0 B_0}(F_2) = [\text{SL}(2, \mathbb{Z}), \text{SL}(2, \mathbb{Z})] \text{ sous-groupe normal de } \text{GL}(2, \mathbb{Z}). \quad (7.18)$$

Également, on a indiqué que F_2 est un sous-groupe normal de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, lui même normal dans $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$,

7.1.1. Les automorphismes intérieurs de $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$. On définit d'abord avec $N \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ les automorphismes intérieurs que l'on considère ici

$$\varphi_N : V \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}) \longrightarrow \varphi_N(V) = NVN^{-1} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}). \quad (7.19)$$

Ces automorphismes constituent pour la composition un groupe noté $\text{Int}(\text{GL}(2, \mathbb{Z}))$. Par construction, on dispose d'un homomorphisme surjectif de groupes

$$\varphi_* : N \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}) \longrightarrow \varphi_*(N) = \varphi_N \in \text{Int}(\text{GL}(2, \mathbb{Z})). \quad (7.20)$$

Le noyau de cet homomorphisme, qui est le centre $C(\text{GL}(2, \mathbb{Z}))$ de $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$, peut être calculé. Si $N \in \text{Ker}(\varphi_*)$, on a pour tout $V \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ l'égalité

$$NV = VN. \quad (7.21)$$

Cette égalité peut être considérée pour les matrices $V \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.22)$$

Ceci donne les seules possibilités $N = \pm 1$,

$$C(\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})) = \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \{\pm 1\}. \quad (7.23)$$

On a donc un isomorphisme de groupes factorisant, φ_* ,

$$\overline{\varphi}_* : \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) / \{\pm 1\} = \mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Int}(\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})). \quad (7.24)$$

Pour tout $N \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$, en notant $\overline{N} = \{\pm N\}$ la classe de N dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z})$, ceci permet d'écrire

$$\varphi_N = \varphi_*(N) = \overline{\varphi}_*(\overline{N}) = \overline{\varphi}_{\overline{N}}. \quad (7.25)$$

Remarquons que $\overline{\varphi}_*$ peut être restreinte à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, comme φ_* peut l'être à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. On utilisera dans la suite les mêmes notations pour ces restrictions.

7.1.2. Restriction à F_2 . Comme F_2 est normal dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, lui même normal dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$, chaque élément de $\mathrm{Int}(\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}))$ laisse F_2 stable. En remplaçant N par N^{-1} , on voit que tout élément $\varphi_N \in \mathrm{Int}(\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}))$ se restreint en un automorphisme de F_2 , et s'identifie en réalité à un élément de $\mathrm{Aut}(F_2)$. Ceci donne un morphisme injectif de groupes

$$\mathrm{rest} : \mathrm{Int}(\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})) \longrightarrow \mathrm{Aut}(F_2). \quad (7.26)$$

Par composition omise dans les notations, il apparaît ainsi deux homomorphismes de groupes dont le second factorise le premier,

$$\begin{aligned} \mathrm{rest} \varphi_* : N \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathrm{rest} \varphi_*(N) = \mathrm{rest} \varphi_N \in \mathrm{Aut}(F_2), \\ \mathrm{rest} \overline{\varphi}_* : \overline{N} \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathrm{rest} \overline{\varphi}_*(\overline{N}) = \mathrm{rest} \varphi_N \in \mathrm{Aut}(F_2). \end{aligned} \quad (7.27)$$

Ils vérifient pour tout $V \in F_2$ que

$$\mathrm{rest} \overline{\varphi}_*(\overline{N})(V) = \mathrm{rest} \varphi_*(N)(V) = \mathrm{rest} \varphi_N(V) = \varphi_N(V) = NVN^{-1}. \quad (7.28)$$

L'injectivité de $\overline{\varphi}_*$ impose celle de $\mathrm{rest} \overline{\varphi}_*$. Mais ceci peut se vérifier de façon directe en considérant toutes les équations résultant des deux relations suivantes :

$$NA_0N^{-1} = A_0, \quad NB_0N^{-1} = B_0. \quad (7.29)$$

Elles donnent $N = \pm 1$, ce qui permet de conclure. En particulier, il en résulte l'isomorphisme de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z})$ et de son image dans $\mathrm{Aut}(F_2)$ par l'homomorphisme injectif $\mathrm{rest} \overline{\varphi}_*$.

Ceci montre, avec les remarques faites autour de la [proposition 4.3](#), que le groupe $\text{rest } \overline{\varphi}_* (\text{PGL}(2, \mathbb{Z})) \simeq \text{PGL}(2, \mathbb{Z})$ est engendré par trois automorphismes de F_2 que l'on note d'après la [proposition 7.1](#),

$$\begin{aligned} o &= \text{rest } \overline{\varphi}_* (\overline{O}) = (B_0, A_0), & s &= \text{rest } \overline{\varphi}_* (\overline{S}) = (A_0^{-1}, B_0^{-1}), \\ t &= \text{rest } \overline{\varphi}_* (\overline{T}) = (B_0^{-1}, A_0 B_0). \end{aligned} \quad (7.30)$$

7.1.3. Les automorphismes intérieurs de F_2 . Il existe un autre groupe que l'on peut considérer. C'est le sous-groupe normal de $\text{Aut}(F_2)$ des automorphismes intérieurs du groupe F_2 noté $\text{Int}(F_2)$.

Tout élément de ce groupe est défini avec $N \in F_2$ par

$$\psi_N : V \in F_2 \rightarrow \psi_N(V) = NVN^{-1} \in F_2. \quad (7.31)$$

On peut considérer l'homomorphisme de groupes [2, chapitre 1, page 53], d'ailleurs surjectif,

$$\psi_* : N \in F_2 \rightarrow \psi_*(N) = \psi_N \in \text{Int}(F_2). \quad (7.32)$$

Son noyau est le centre $C(F_2)$ de F_2 , composé des matrices qui commutent avec A_0 et B_0 . En explicitant les deux conditions correspondantes, on trouve dans ce centre les seules possibilités

$$\pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.33)$$

Mais avec la [proposition 5.2](#) qui s'applique à $F_2 = [\text{SL}(2, \mathbb{Z}), \text{SL}(2, \mathbb{Z})]$, il reste en réalité que

$$C(F_2) = \{1\}. \quad (7.34)$$

En d'autres termes ψ_* est un isomorphisme,

$$\psi_* : F_2 = [\text{SL}(2, \mathbb{Z}), \text{SL}(2, \mathbb{Z})] \rightarrow \text{Int}(F_2). \quad (7.35)$$

7.1.4. Relations entre les différents groupes d'automorphismes. Les différents homomorphismes de groupes introduits ci-dessus ne sont pas indépendants les uns des autres. On peut énoncer cette proposition.

PROPOSITION 7.2. *Le groupe des automorphismes intérieurs $\text{Int}(F_2)$ du groupe libre à deux générateurs F_2 est isomorphe à ce dernier groupe. De plus, si l'on note j l'injection canonique de F_2 dans $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ et i_{Int} celle de $\text{Int}(F_2)$ dans $\text{Aut}(F_2)$, on a la factorisation suivante identifiant ψ_* à la restriction à F_2 de $\text{rest } \varphi_*$:*

$$\text{rest } \varphi_* \circ j = \text{rest} \circ \varphi_* \circ j = i_{\text{Int}} \circ \psi_*. \quad (7.36)$$

Pour tout $N \in F_2 \subset \text{GL}(2, \mathbb{Z})$, on considère $\varphi_N = \varphi_*(N) \in \text{Int}(\text{GL}(2, \mathbb{Z}))$, et bien sûr $\text{rest } \varphi_N \in \text{Aut}(F_2)$. Pour tout $V \in F_2$, on a alors

$$\text{rest } \varphi_*(N)(V) = \text{rest } \varphi_N(V) = \varphi_N(V) = NVN^{-1} = \psi_N(V) = \psi_*(N)(V). \quad (7.37)$$

Avec $j(N) = N$, la proposition en résulte. Elle permet de considérer ψ_* comme la restriction de $\text{rest } \varphi_*$ à F_2 .

En particulier, le groupe $\text{Int}(F_2)$ possède deux générateurs $\psi_*(A_0)$ et $\psi_*(B_0)$. Il est ordinairement identifié à son image dans $\text{Aut}(F_2)$ grâce à i_{Int} que l'on oublie usuellement. Le groupe $\text{Int}(F_2)$ apparaît ainsi comme le sous-groupe de $\text{Aut}(F_2)$ engendré par les deux automorphismes suivants :

$$\begin{aligned} \psi_*(A_0) &= \psi_{A_0} = \text{rest } \varphi_*(A_0) = \text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{A_0}) = (A_0, A_0 B_0 A_0^{-1}), \\ \psi_*(B_0) &= \psi_{B_0} = \text{rest } \varphi_*(B_0) = \text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{B_0}) = (B_0 A_0 B_0^{-1}, B_0). \end{aligned} \quad (7.38)$$

7.2. Une tour de sous groupes d'automorphismes de F_2 . Récapitulatif, on peut énoncer, avec ce qui a été vu avant, et notamment la [proposition 5.2](#), cette proposition.

PROPOSITION 7.3. *On a*

$$\text{Int}(F_2) \subset \text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PSL}(2, \mathbb{Z})) \subset \text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PGL}(2, \mathbb{Z})) \subset \text{Aut}(F_2) \quad (7.39)$$

où

$$\begin{aligned} \text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PSL}(2, \mathbb{Z})) &\simeq \Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \text{ normal dans } \text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PGL}(2, \mathbb{Z})), \\ \text{Int}(F_2) &= \text{rest } \overline{\varphi}_*([\text{PSL}(2, \mathbb{Z}), \text{PSL}(2, \mathbb{Z})]) \simeq [\Gamma, \Gamma] \\ &\simeq F_2, \text{ sous-groupe dérivé de } \Gamma. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Une question qui se pose de façon naturelle est de savoir si l'on a

$$\text{Int}(F_2) \text{ sous-groupe normal dans } \text{Aut}(F_2). \quad (7.41)$$

La réponse est connue et positive [24, page 169], [27]. Elle est due à Nielsen [30]. On sait de plus que l'on a pour le groupe quotient

$$\text{Aut}(F_2)/\text{Int}(F_2) \simeq \text{GL}(2, \mathbb{Z}). \quad (7.42)$$

On trouve de plus dans [24, page 168] une présentation de $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ qui résulte d'une présentation de $\text{Aut}(F_2)$ en ajoutant une relation supplémentaire comme suit.

PROPOSITION 7.4. *Le groupe $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ a une présentation à trois générateurs P_{00} , σ_{00} , U_{00} , dont les relations qui le définissent s'écrivent*

$$\begin{aligned} P_{00}^2 = \sigma_{00}^2 = (U_{00} \circ P_{00} \circ \sigma_{00} \circ P_{00})^2 = 1, & \quad (\sigma_{00} \circ P_{00} \circ U_{00})^3 = (P_{00} \circ \sigma_{00})^4 = 1, \\ [\sigma_{00} \circ U_{00} \circ \sigma_{00}, U_{00}] = 1, & \quad (\sigma_{00} \circ U_{00})^2 = 1. \end{aligned} \quad (7.43)$$

En supprimant la dernière relation, on obtient une présentation du groupe $\text{Aut}(F_2)$, dont $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ est donc un quotient.

Ces résultats conduisent à examiner ce qui est connu quant aux présentations du groupe $\text{Aut}(F_2)$. On fait quelques rappels dans ce qui suit.

8. Présentations du groupe des automorphismes de F_2 . Les résultats les plus anciens sur ce sujet ont été obtenus par Nielsen [30]. On les considère ici en utilisant les notations mises au point précédemment.

8.1. La présentation classique du groupe $\text{Aut}(F_2)$. Cette présentation du groupe $\text{Aut}(F_2)$, due à Nielsen, est citée dans [24, Corollary N1, p. 164]. Conformément à notre [proposition 7.1](#), ses trois générateurs sont définis par les expressions

$$\begin{aligned} P_0 &= (B_0, A_0), \quad (\text{noté antérieurement } o = \text{rest } \overline{\varphi}_* (\overline{O})) \\ U_0 &= (A_0 B_0, B_0), \quad \sigma_0 = (A_0^{-1}, B_0). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Cette présentation est mentionnée dans ([12], où σ_0 est noté O comme dans [30]), ([15, page 24], avec d'autres notations). On va l'expliciter avec nos notations, compte tenu que la composition des automorphismes privilégiée ici écrit les produits en sens inverse du sens d'écriture habituel des travaux sur ce sujet.

Avec les définitions précédentes, P_0 et σ_0 sont des involutions (des éléments d'ordre 2),

$$P_0^2 = \sigma_0^2 = \text{id}_{F_2} = (A_0, B_0). \quad (8.2)$$

Au contraire, U_0 n'est pas une involution, mais permet d'en considérer d'autres qui s'écrivent

$$P_0 \circ \sigma_0 \circ P_0 \circ U_0 = (A_0 B_0^{-1}, B_0^{-1}), \quad U_0 \circ P_0 \circ \sigma_0 \circ P_0 = (A_0 B_0, B_0^{-1}). \quad (8.3)$$

On trouve dans $\text{Aut}(F_2)$ des éléments d'ordre 4

$$P_0 \circ \sigma_0 = (B_0^{-1}, A_0), \quad \sigma_0 \circ P_0 = (B_0, A_0^{-1}). \quad (8.4)$$

Les formules définissant nos automorphismes permettent de calculer

$$\begin{aligned} [U_0, \sigma_0 \circ U_0 \circ \sigma_0] &= U_0^{-1} \circ \sigma_0 \circ U_0^{-1} \circ \sigma_0 \circ U_0 \circ \sigma_0 \circ U_0 \circ \sigma_0 = \text{id}_{F_2} = (A_0, B_0), \\ [\sigma_0 \circ U_0 \circ \sigma_0, U_0] &= \sigma_0 \circ U_0^{-1} \circ \sigma_0 \circ U_0^{-1} \circ \sigma_0 \circ U_0 \circ \sigma_0 \circ U_0 = \text{id}_{F_2} = (A_0, B_0). \end{aligned} \quad (8.5)$$

On trouve également un élément d'ordre 3,

$$\sigma_0 \circ P_0 \circ U_0 = (B_0 A_0^{-1}, A_0^{-1}). \quad (8.6)$$

Au contraire de [24, page 169], le terme $(U_0 \circ P_0 \circ \sigma_0)$ n'est pas d'ordre 3

$$(U_0 \circ P_0 \circ \sigma_0)^3 = (B_0^{-1} A_0^{-1} A_0^{-1} A_0 B_0, B_0^{-1} A_0^{-1} B_0^{-1} A_0 B_0) = \psi_{B_0^{-1} A_0^{-1}} (A_0^{-1}, B_0^{-1}). \quad (8.7)$$

Il faut donc bien faire attention à l'ordre de composition des automorphismes que l'on utilise ici dans $\text{Aut}(F_2)$. Avec nos notations, la présentation de Nielsen du groupe des automorphismes de F_2 est donnée comme suit.

PROPOSITION 8.1. *Le groupe $\text{Aut}(F_2)$ a une présentation à trois générateurs P_0, σ_0, U_0 , dont les relations qui le définissent s'écrivent*

$$\begin{aligned} P_0^2 = \sigma_0^2 &= (U_0 \circ P_0 \circ \sigma_0 \circ P_0)^2 = 1, \\ (\sigma_0 \circ P_0 \circ U_0)^3 &= (P_0 \circ \sigma_0)^4 = 1, \quad [\sigma_0 \circ U_0 \circ \sigma_0, U_0] = 1. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Il est possible de vérifier que P_0, U_0, σ_0 sont des automorphismes intérieurs qui ne sont contenus ni dans le groupe $\text{Int}(F_2)$ ni dans le groupe rest $\overline{\varphi}_*(\text{PSL}(2, \mathbb{Z}))$. Si tel n'était pas le cas, on aurait

$$\begin{aligned} P_0 &= (B_0, A_0) = (\varphi_*(N_P)(A_0), \varphi_*(N_P)(B_0)), \\ U_0 &= (A_0 B_0, B_0) = (\varphi_*(N_U)(A_0), \varphi_*(N_U)(B_0)), \\ \sigma_0 &= (A_0^{-1}, B_0) = (\varphi_*(N_\sigma)(A_0), \varphi_*(N_\sigma)(B_0)). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Or ces expressions ne permettent de calculer aucune des matrices correspondantes N_P, N_U, N_σ dans $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$. On n'a donc pas affaire à des éléments de $\text{Int}(F_2)$ qui est bien strictement plus petit que $\text{Aut}(F_2)$.

Par contre, on a

$$P_0 = \text{rest } \overline{\varphi}_*(O) \in \text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PGL}(2, \mathbb{Z})), \quad (8.10)$$

cependant, une telle appartenance n'est absolument pas assurée pour U_0 ni σ_0 .

Avec ces trois générateurs, on a

$$\begin{aligned} \psi_{A_0} &= P_0 \circ \sigma_0 \circ U_0^{-1} \circ \sigma_0 \circ U_0^{-1} \circ P_0, & \psi_{B_0} &= \sigma_0 \circ U_0^{-1} \circ \sigma_0 \circ U_0^{-1}, \\ \psi_{A_0}^{-1} &= P_0 \circ \sigma_0 \circ U_0 \circ \sigma_0 \circ U_0 \circ P_0, & \psi_{B_0}^{-1} &= \sigma_0 \circ U_0 \circ \sigma_0 \circ U_0, \\ s &= P_0 \circ \sigma_0 \circ P_0 \circ \sigma_0, & t &= U_0 \circ P_0 \circ \sigma_0, & o &= P_0. \end{aligned} \quad (8.11)$$

8.2. Une autre présentation du groupe $\text{Aut}(F_2)$. On trouve dans un article de Meskin [27] une autre présentation du groupe $\text{Aut}(F_2)$ utilisant cinq générateurs. Pour la traduire dans nos notations il faut également utiliser la transformation de passage à l'inverse pour que les produits s'écrivent dans l'ordre imposé par la composition utilisée ici.

Les cinq générateurs sont les suivants :

$$\begin{aligned} \psi_{A_0}^{-1} &= (A_0, A_0^{-1} B_0 A_0), & \psi_{B_0}^{-1} &= (B_0^{-1} A_0 B_0, B_0), & P_0 &= (B_0, A_0), \\ \chi &= \sigma_0 \circ P_0 = (B_0, A_0^{-1}), & \zeta &= \sigma_0 \circ t \circ \sigma_0 = (B_0, A_0^{-1} B_0). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Les relations associées, qui peuvent se vérifier de façon directe sur les couples de générateurs, sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \chi^4 = P_0^2 = (\chi \circ P_0)^2 = \text{id}_{F_2}, \quad (\zeta \circ P_0)^2 = \psi_{B_0}^{-1}, \quad \chi \circ \chi = \psi_{A_0}^{-1} \circ \psi_{B_0} \circ \zeta^3, \\ P_0 \circ \psi_{A_0}^{-1} \circ P_0^{-1} = \chi \circ \psi_{A_0}^{-1} \circ \chi^{-1} = \zeta \circ \psi_{A_0}^{-1} \circ \zeta^{-1} = \psi_{B_0}^{-1}, \\ P_0 \circ \psi_{B_0}^{-1} \circ P_0^{-1} = \psi_{A_0}^{-1}, \quad \chi \circ \psi_{B_0}^{-1} \circ \chi^{-1} = \psi_{A_0}, \quad \zeta \circ \psi_{B_0}^{-1} \circ \zeta^{-1} = \psi_{B_0}^{-1} \psi_{A_0}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Si l'on veut maintenant relier ces générateurs à ceux de Nielsen, on peut utiliser les valeurs données en (8.11) pour $\psi_{A_0}^{-1}$, $\psi_{B_0}^{-1}$ et t .

En sens inverse, on a

$$U_0 = \chi \circ P_0 \circ \zeta \circ \chi \circ P_0 \circ \sigma_0 \circ P_0, \quad \sigma_0 = \chi \circ P_0. \quad (8.14)$$

Ceci montre que P_0 , χ et σ_0 suffisent pour engendrer le groupe $\text{Aut}(F_2)$. Ceci apparaît d'ailleurs simplement à l'observation des relations précédentes qui donnent par exemple

$$\psi_{A_0}^{-1} = (P_0 \circ \zeta)^2, \quad \psi_{B_0}^{-1} = (\zeta \circ P_0)^2. \quad (8.15)$$

On trouve aussi

$$o = P_0, \quad s = \chi^2, \quad t = \chi \circ P_0 \circ \zeta \circ \chi \circ P_0. \quad (8.16)$$

Ces égalités peuvent se vérifier directement avec les expressions des automorphismes P_0 , χ , ζ . L'équivalence des présentations précédentes peut se démontrer avec des transformations de Tietze [19].

8.3. Quelques conséquences. L'article [27] suggère implicitement que l'on a $\text{Int}(F_2)$ sous-groupe normal de $\text{Aut}(F_2)$. Il traite cette question en notant π un morphisme canonique du groupe $\text{Aut}(F_2)$ sur $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ qui résulte des présentations qu'il donne,

$$\begin{aligned} \pi(\psi_{A_0}^{-1}) = \pi(\psi_{B_0}^{-1}) = 1, \quad \pi(P_0) = p_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = I, \\ \pi(\chi) = x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = S, \quad \pi(\zeta) = y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = TS. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Il donne pour le noyau de π

$$\text{Ker}(\pi) = \text{Int}(F_2) \simeq F_2. \quad (8.18)$$

D'autre part, il fournit pour l'image de π et ce qui en découle cette proposition.

PROPOSITION 8.2. *Le groupe $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ a la présentation suivante :*

$$\text{GL}(2, \mathbb{Z}) = \langle x, y, p_0 \mid p_0^2 = (p_0 x)^2 = (p_0 y)^2 = 1, x^2 = y^3, x^4 = 1 \rangle. \quad (8.19)$$

La comparaison de la présentation donnée ici pour $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ avec celle de la proposition 4.2 est facile avec

$$\begin{aligned} I = p_0, \quad O = x p_0, \quad T = y p_0 x p_0, \\ p_0 = I, \quad x = OI = S, \quad y = TOI = TS. \end{aligned} \quad (8.20)$$

On peut comparer à ce que l'on trouve dans l'ouvrage de Coxeter et Moser [12, page 85]

$$R_1 = p_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_2 = p_0 x p_0 y x p_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_3 = x p_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$p_0 = R_1, \quad x = R_3(R_1 R_3)R_3^{-1}, \quad y = R_3(R_1 R_2)R_3^{-1}. \quad (8.21)$$

On peut également comparer avec la présentation que donne de façon naturelle la classique réduction des formes quadratiques binaires définies entières [32]. Les trois générateurs privilégiés sont alors

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = R_1, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = R_3, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = R_3 R_1 R_2 R_3 R_1. \quad (8.22)$$

Pour montrer l'équivalence de toutes ces présentations, comme l'équivalence de celle donnée par notre [proposition 7.4](#), on peut utiliser des transformations de Tietze [19], et expliciter tous les passages nécessaires.

On peut également ajouter que l'on a avec les notations de [27]

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) = \langle x, y \mid x^4 = 1, x^2 = y^3 \rangle. \quad (8.23)$$

Et au quotient, pour le groupe modulaire projectif,

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \langle \bar{x}, \bar{y} \mid \bar{x}^2 = \bar{y}^3 = 1 \rangle. \quad (8.24)$$

Avec les expressions rappelées avant, dues à [27], on trouve de façon directe que

$$\begin{aligned} \pi(\psi_{A_0}^{-1}) &= \pi((P_0 \circ \zeta)^2) = (p_0 y)^2 = 1, \\ \pi(\psi_{B_0}^{-1}) &= \pi((\zeta \circ P_0)^2) = (y p_0)^2 = 1, \\ \pi(U_0) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \pi(\sigma_0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \pi(t) &= \pi(\chi \circ P_0 \circ \zeta \circ \chi \circ P_0) = x p_0 y x p_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \pi(s) &= \pi(\chi^2) = x^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 = \pi(t)^3. \end{aligned} \quad (8.25)$$

On fait ainsi apparaître dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ un groupe cyclique à 6 éléments dont $\pi(t)$ est un générateur. Avec [27], remarquons en passant que dans $\mathrm{Aut}(F_2)$ il n'y a aucun élément d'ordre 6.

8.4. Abélianisation et applications. Un lien entre $\mathrm{Int}(F_2)$ et $\mathrm{Aut}(F_2)$ est classiquement fait [23, 24] par le processus d'abélianisation du groupe F_2 . Le groupe F_2 se transforme par le morphisme correspondant en un groupe commutatif libre, un \mathbb{Z} -module de rang 2 que l'on note additivement, avec a_0 projection de A_0 et b_0 projection de B_0 ,

$$\mathrm{proj} : F_2 \rightarrow F_2/[F_2, F_2] \simeq \mathbb{Z}^2. \quad (8.26)$$

Tout automorphisme $\phi \in \text{Aut}(F_2)$ se factorise de façon naturelle, grâce à cette projection de F_2 sur \mathbb{Z}^2 , en un automorphisme $\pi'(\phi) \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}) \simeq \text{Aut}(\mathbb{Z}^2)$,

$$\pi'(\phi) \circ \text{proj} = \text{proj} \circ \phi. \quad (8.27)$$

Dans la base (a_0, b_0) , on peut écrire

$$\begin{aligned} \pi'(\phi)(a_0) &= \text{proj}(\phi(A_0)) = \alpha_{aa}a_0 + \alpha_{ba}b_0, \\ \pi'(\phi)(b_0) &= \text{proj}(\phi(B_0)) = \alpha_{ab}a_0 + \alpha_{bb}b_0. \end{aligned} \quad (8.28)$$

On n'a aucune peine à vérifier que ceci définit un morphisme de groupes,

$$\phi \in \text{Aut}(F_2) \longrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{aa} & \alpha_{ab} \\ \alpha_{ba} & \alpha_{bb} \end{bmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}). \quad (8.29)$$

Ce morphisme est surjectif [23, page 24]. Ceci se vérifie en utilisant les automorphismes particuliers suivants, appelés transformations de Nielsen, qui engendrent $\text{Aut}(F_2)$:

$$\begin{aligned} P_0 &= (B_0, A_0), & \alpha_A &= (A_0^{-1}, B_0) = \sigma_0, & \alpha_B &= (A_0, B_0^{-1}) = P_0 \circ \sigma_0 \circ P_0, \\ \beta_{AB} &= (A_0 B_0, B_0) = U_0, & \beta_{BA} &= (A_0, B_0 A_0) = P_0 \circ U_0 \circ P_0. \end{aligned} \quad (8.30)$$

On voit sans difficulté que leurs images dans $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ par le morphisme d'avant engendrent ce dernier groupe.

Par ailleurs, il est facile de vérifier, avec la forme particulière des automorphismes intérieurs, que le noyau Ker de ce morphisme contient le sous-groupe $\text{Int}(F_2)$. Ceci donne naissance à un morphisme canonique de groupes

$$\text{Aut}(F_2) / \text{Int}(F_2) \longrightarrow \text{Aut}(F_2) / \text{Ker} \simeq \text{GL}(2, \mathbb{Z}). \quad (8.31)$$

On peut alors utiliser une présentation de $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$, des préimages dans $\text{Aut}(F_2)$ de ses générateurs, et montrer que les mêmes relations appliquées à ces préimages dans $\text{Aut}(F_2)$ donnent des automorphismes intérieurs. C'est faisable comme dans [23, page 25] avec les trois matrices suivantes qui engendrent $\text{Aut}(F_2)$:

$$A = R_1 R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = R_1 R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.32)$$

Ces matrices sont associées à des automorphismes préimages, générateurs de $\text{Aut}(F_2)$:

$$\alpha = U_0 \circ P_0 \circ \sigma_0 = (B_0^{-1}, A_0 B_0), \quad \beta = P_0 \circ \sigma_0 = (B_0^{-1}, A_0), \quad \gamma = P_0 = (B_0, A_0). \quad (8.33)$$

Les relations à considérer, qui correspondent à une présentation de $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$, sont les suivantes :

$$A^6 = B^2 A^3 = (CA)^2 = (CB)^2 = C^2 = 1. \quad (8.34)$$

Les expressions des automorphismes donnent dans $\text{Aut}(F_2)$, avec les mêmes relations

$$\begin{aligned}\alpha^6 &= \psi_{[B_0, A_0]} \in \text{Int}(F_2), & \beta^2 \circ \alpha^3 &= \psi_{B_0 A_0} \in \text{Int}(F_2), \\ (\gamma \circ \alpha)^2 &= (\gamma \circ \beta)^2 = \gamma^2 = \text{id}_{F_2} \in \text{Int}(F_2).\end{aligned}\tag{8.35}$$

Ceci permet d'établir que tout élément de Ker est un automorphisme intérieur contenu dans $\text{Int}(F_2)$. On a donc finalement l'égalité

$$\text{Ker} = \text{Int}(F_2).\tag{8.36}$$

Elle garantit l'isomorphisme de groupes,

$$\text{Aut}(F_2) / \text{Int}(F_2) \simeq \text{GL}(2, \mathbb{Z}).\tag{8.37}$$

8.4.1. Traduction dans une base particulière. On traduit les expressions vues avant, en changeant de base pour commodité, ce qui revient à travailler à un automorphisme intérieur près de $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$:

$$s(A_0) = SA_0S^{-1} = A_0^{-1}, \quad s(B_0) = SB_0S^{-1} = B_0^{-1}.\tag{8.38}$$

Dans la base $(b_0, -a_0)$ on trouve la matrice suivante, comparable à celle donnée avant par π :

$$\begin{aligned}\pi'(s)(b_0) &= -b_0, & \pi'(s)(-a_0) &= -(-a_0), \\ \pi'(s) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \pi(s).\end{aligned}\tag{8.39}$$

On a vu aussi que

$$t(A_0) = TA_0T^{-1} = B_0^{-1}, \quad t(B_0) = TB_0T^{-1} = A_0B_0.\tag{8.40}$$

Ceci se traduit dans la même base par la même matrice que π ,

$$\begin{aligned}\pi'(t)(b_0) &= b_0 - (-a_0), & \pi'(t)(-a_0) &= b_0, \\ \pi'(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \pi(t).\end{aligned}\tag{8.41}$$

Avec P_0 , on trouve au contraire que

$$\begin{aligned}\pi'(P_0)(b_0) &= -(-a_0), & \pi'(P_0)(-a_0) &= -b_0, \\ \pi'(P_0) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -\pi(P_0) = \pi(sP_0).\end{aligned}\tag{8.42}$$

Avec U_0 , on obtient également la même matrice que π ,

$$\begin{aligned}\pi'(U_0)(b_0) &= b_0, & \pi'(U_0)(-a_0) &= -b_0 + (-a_0), \\ \pi'(U_0) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \pi(U_0).\end{aligned}\tag{8.43}$$

Avec σ_0 , au contraire,

$$\begin{aligned}\pi'(\sigma_0)(b_0) &= b_0, & \pi'(\sigma_0)(-a_0) &= -(-a_0), \\ \pi'(\sigma_0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\pi(\sigma_0) = \pi(s\sigma_0).\end{aligned}\tag{8.44}$$

Ces relations permettent de constater que l'on a en fait :

PROPOSITION 8.3. *L'automorphisme s vérifie les égalités*

$$P_0 \circ s = s \circ P_0, \quad \sigma_0 \circ s = s \circ \sigma_0.\tag{8.45}$$

Et ces deux automorphismes forment avec U_0 un système de générateurs du groupe $\text{Aut}(F_2)$.

D'autre part, pour tout $\phi \in \text{Aut}(F_2)$, on peut introduire sur $\text{Aut}(F_2)$ un indice défini par

$$\varepsilon_{\det}(\phi) = \det(\pi'(\phi)).\tag{8.46}$$

Il est évident par les formules données pour π' que ε_{\det} est un morphisme de groupes surjectif à valeurs dans le groupe multiplicatif à deux éléments $\{\pm 1\}$, centre de $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$. Ceci permet de donner la liaison entre π et π' résultant des expressions précédentes, et donc une interprétation du morphisme utilisé par [27].

PROPOSITION 8.4. *Pour tout $\phi \in \text{Aut}(F_2)$, on a*

$$\pi(\phi) = \varepsilon_{\det}(\phi)\pi'(\phi) \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}).\tag{8.47}$$

Pour tout automorphisme intérieur $\phi \in \text{Int}(F_2)$, on a la condition $\varepsilon_{\det}(\phi) = 1$. Ceci garantit aussi que

$$\text{Ker}(\pi) = \text{Ker}(\pi') = \text{Int}(F_2).\tag{8.48}$$

Pour tout $\phi \in \text{Int}(F_2)$, on a $\pi'(\phi) = 1$, d'où $\varepsilon_{\det}(\phi) = 1$. Ceci impose que

$$\text{Ker}(\pi') = \text{Int}(F_2) \subset \text{Ker}(\pi).\tag{8.49}$$

Inversement, pour $\phi \in \text{Ker}(\pi)$, deux cas sont possibles :

$$\begin{aligned}\pi'(\phi) = \varepsilon_{\det}(\phi) = 1 & \text{ soit } \phi \in \text{Ker}(\pi'), \\ \pi'(\phi) = \varepsilon_{\det}(\phi) = -1 = s & \text{ soit } \phi \in s \circ \text{Ker}(\pi').\end{aligned}\tag{8.50}$$

Mais ce dernier cas est contradictoire, car le symbole de s comme celui de tout élément de $\text{Ker}(\pi')$ vaut 1. Seul le premier cas est donc vrai, imposant

$$\text{Ker}(\pi) \subset \text{Ker}(\pi') = \text{Int}(F_2).\tag{8.51}$$

On en déduit l'égalité des noyaux mentionnée dans la [proposition 8.4](#).

Remarquons que maintenant on comprend pourquoi l'indice ε_{\det} s'introduit dans la présentation donnée par [27]. Ceci est lié à la propriété suivante sur les générateurs :

$$\det(p_0) = -1, \quad \det(x) = 1, \quad \det(y) = 1.\tag{8.52}$$

Au contraire, dans la présentation de [12] on a

$$\det(R_1) = \det(R_2) = \det(R_3) = -1. \tag{8.53}$$

On peut également dire que les deux représentations π et π' du groupe $\text{Aut}(F_2)$ dans le \mathbb{Z} -module \mathbb{Z}^2 ne sont pas équivalentes.

8.4.2. Trois applications. On a trois conséquences classiques sur les éléments primitifs de F_2 , la détermination des IA-automorphismes de F_2 , et le calcul du centre de $\text{Aut}(F_2)$.

(i) Un élément A de F_2 est dit primitif si et seulement s'il existe un autre élément $B \in F_2$ tel que (A, B) est une système de générateurs de F_2 . On dit alors que A et B sont des éléments primitifs associés. La caractérisation des éléments primitifs est importante pour différents problèmes de topologie [6, 31]. Les travaux de Cohn autour de l'arbre des solutions de l'équation de Markoff ont permis de faire avancer cette question initialement résolue par Whitehead [16], [23, page 107], [24, page 166].

Il est clair, par ce qui précède, que deux éléments primitifs de F_2 sont conjugués par un automorphisme intérieur si et seulement si leurs images par π' sont égales. Ceci a été établi par Nielsen en 1918.

(ii) Les IA-automorphismes de F_2 sont caractérisés par leur équivalence modulo $[F_2, F_2]$ à l'identité de F_2 . Ils constituent d'après [30] ou [23, page 24] un sous-groupe de $\text{Aut}(F_2)$ isomorphe à $\text{Int}(F_2)$. Or ceci est évident, car on a pour un tel IA-automorphisme ϕ

$$\pi'(\phi) = 1. \tag{8.54}$$

Et on a vu avant que l'on a

$$\text{Ker}(\pi') = \text{Int}(F_2) \simeq F_2. \tag{8.55}$$

(iii) Considérons $\phi \in C(\text{Aut}(F_2))$ dans le centre du groupe des automorphismes. On obtient du fait de la surjectivité de π' que

$$\pi'(\phi) \in C(\text{GL}(2, \mathbb{Z})) = \{\pm 1\}. \tag{8.56}$$

Ceci donne

$$\phi \in \text{Int}(F_2) \cup (s \circ \text{Int}(F_2)). \tag{8.57}$$

Avec l'isomorphisme ψ_* et ce qui a été vu avant sur le centre de $\text{Int}(F_2)$, le cas $\phi \in \text{Int}(F_2)$ se réduit à $\phi = \text{id}_{F_2}$.

Le cas $\phi \in s \circ \text{Int}(F_2)$ permet d'écrire $\phi = s \circ \psi_*(W(A_0, B_0))$ où W est un mot réduit. L'expression de s permet aussi d'écrire $\phi = \psi_*(W(A_0^{-1}, B_0^{-1})) \circ s$. Et puisque ϕ commute avec s il reste que

$$\psi_*(W(A_0, B_0)) = \psi_*(W(A_0^{-1}, B_0^{-1})). \tag{8.58}$$

Comme ψ_* est un isomorphisme, il reste dans F_2 que

$$W(A_0, B_0) = W(A_0^{-1}, B_0^{-1}). \tag{8.59}$$

Or cette égalité n'est possible que si W est le mot vide, donnant $W(A_0, B_0) = 1$, et donc $\phi = s$. Mais comme il est facile de vérifier que s et t ne permutent pas, ce cas est impossible. On vient donc d'établir (voir [23, page 24]) la [proposition 8.5](#).

PROPOSITION 8.5. *Le centre du groupe $\text{Aut}(F_2)$ est réduit à l'unité*

$$C(\text{Aut}(F_2)) = \{\text{id}_{F_2}\}. \quad (8.60)$$

Ceci donne un isomorphisme de groupes, associant à tout automorphisme de F_2 l'automorphisme intérieur qu'il définit dans le groupe $\text{Int}(\text{Aut}(F_2))$,

$$\phi \in \text{Aut}(F_2) \mapsto \phi \circ * \circ \phi^{-1} \in \text{Int}(\text{Aut}(F_2)). \quad (8.61)$$

Le théorème de Dyer et Formanek [23, page 24] complète ce résultat en indiquant que l'image du morphisme construit par cette proposition n'est autre que tout le groupe $\text{Aut}(\text{Aut}(F_2))$. La démonstration s'appuie sur un théorème de Burnside caractérisant les cas où $\text{Aut}(\text{Aut}(F_2)) \simeq \text{Aut}(F_2)$.

8.5. Questions de normalité. La question que l'on a développée quant au fait que $\text{Int}(F_2)$ soit normal dans $\text{Aut}(F_2)$ est en réalité décomposable en trois questions intermédiaires issues de la tour de groupes d'automorphismes donnée par la [proposition 7.3](#). Ces questions consistent à savoir si les inclusions de groupes de cette proposition correspondent à la relation de sous-groupe normal.

Le groupe $\text{Int}(F_2)$ est normal dans tous les groupes intermédiaires entre lui et $\text{Aut}(F_2)$. On va également tirer quelques conclusions de cette remarque.

8.5.1. Première question. Elle a été résolue de manière directe et donne

$$\text{Int}(F_2) \text{ est normal dans } \text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PSL}(2, \mathbb{Z})). \quad (8.62)$$

Cette propriété résulte de la [proposition 5.2](#) établissant que $F_2 = [\Gamma, \Gamma]$ est un sous-groupe normal de $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Pour tout $V \in F_2$ et tout $\overline{N} \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$, on peut en effet écrire

$$\text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{N}) \circ \text{Int}(V) \circ (\text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{N}))^{-1} = \text{Int}((\text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{N}))(\overline{V})) \in \text{Int}(F_2). \quad (8.63)$$

Le groupe quotient correspondant a été calculé par le [théorème 4.1](#),

$$\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PSL}(2, \mathbb{Z})) / \text{Int}(F_2) \simeq \Gamma / [\Gamma, \Gamma] \simeq C_6. \quad (8.64)$$

On a d'ailleurs trouvé dans ce qui précède des représentants privilégiés dans les classes d'équivalence correspondantes à ce quotient. Ce sont les termes $\pi(t)^k$ où $k = 0, 1, \dots, 5$.

Une vérification directe de cette dernière propriété est faisable en observant que l'on a

$$t^6 = \psi_{B_0^{-1}A_0^{-1}B_0A_0} = \psi_{[B_0, A_0]} = \psi_K = \psi_{B_0}^{-1} \circ \psi_{A_0}^{-1} \circ \psi_{B_0} \circ \psi_{A_0} = [\psi_{B_0}, \psi_{A_0}]. \quad (8.65)$$

Elle montre que tout élément de $\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PSL}(2, \mathbb{Z}))$ peut être écrit sous la forme

$$\psi_N \circ t^k = t^k \circ \psi_{N'} \quad \text{avec } k = 0, 1, \dots, 5, N, N' \in F_2. \quad (8.66)$$

Le lien entre N et N' est donné par l'égalité facile à vérifier de façon directe pour tout $N \in F_2$

$$t \circ \psi_{N'} \circ t^{-1} = \psi_{t(N')}. \quad (8.67)$$

Une vérification directe montre en particulier que l'on a

$$s = \psi_{A_0 B_0} \circ t^3. \quad (8.68)$$

Les propriétés précédentes se résument comme suit [2].

PROPOSITION 8.6. *Le groupe $\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PSL}(2, \mathbb{Z}))$ est une extension de $\text{Int}(F_2)$ par C_6 , mais non un produit semi-direct de $\text{Int}(F_2)$ par C_6 . Cette extension est équivalente à la donnée d'une suite exacte,*

$$1 \rightarrow F_2 \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow C_6 \rightarrow 1. \quad (8.69)$$

En effet on n'a pas $t^6 = \text{id}_{F_2}$. De sorte que l'on ne peut pas plonger C_6 dans le groupe $\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PSL}(2, \mathbb{Z}))$.

Supposons, en complément de ce qui précède, que l'on ait une égalité

$$\psi_{N_1} \circ t^{k_1} = \psi_{N_2} \circ t^{k_2}. \quad (8.70)$$

Il en résulte que

$$t^{k_2 - k_1} = (\psi_{N_1})^{-1} \circ (\psi_{N_2}) = \psi_{N_1^{-1} N_2} \in \text{Int}(F_2). \quad (8.71)$$

Or en appliquant le morphisme π ou π' , cette condition n'est possible qu'avec

$$k_1 \equiv k_2 \pmod{6}. \quad (8.72)$$

Si l'on a supposé comme avant que l'on a $k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, 5\}$, il en résulte que

$$k_1 = k_2. \quad (8.73)$$

D'où en simplifiant

$$\psi_{N_1} = \psi_{N_2}. \quad (8.74)$$

Et puisque ψ_* est un isomorphisme,

$$N_1 = N_2. \quad (8.75)$$

Les vérifications complémentaires étant évidentes, on a donc établi ce théorème.

THÉORÈME 8.7. *Tout élément de $\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PSL}(2, \mathbb{Z}))$ peut être écrit de façon unique sous la forme*

$$\psi_N \circ t^k = t^k \circ \psi_{t^{-k}(N)} \quad \text{avec } k = 0, 1, \dots, 5, N \in F_2. \quad (8.76)$$

Ce résultat peut être traduit sur le groupe $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ et son sous-groupe $[\Gamma, \Gamma] \simeq F_2$ par un résultat de suffixation qui résoud une question que l'on a posée antérieurement.

PROPOSITION 8.8. *Tout élément de $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ s'écrit sous forme d'un produit de forme $W(\overline{A_0}, \overline{B_0})W_k(\overline{S}, \overline{T})$ où*

$$\begin{aligned} W(\overline{A_0}, \overline{B_0}) &\in [\Gamma, \Gamma], \\ W_k(\overline{S}, \overline{T}) &\in \{1, \overline{S}, \overline{ST}, \overline{STS}, \overline{STST}, \overline{STSTS}\} \quad (\text{avec } k = 0, 1, \dots, 5). \end{aligned} \quad (8.77)$$

De plus, cette décomposition est unique.

En appliquant en effet $\text{rest } \overline{\varphi}_*$, l'image de tout élément noté $\overline{V} \in \Gamma$ s'écrit, par le [théorème 8.7](#),

$$\text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{V}) = \psi_N \circ t^k \quad \text{avec } k = 0, 1, \dots, 5, N \in F_2. \quad (8.78)$$

Or on a

$$\begin{aligned} 1 &= t^0, & s &= \psi_{A_0 B_0} \circ t^3, & s \circ t &= \psi_{A_0 B_0} \circ t^4, \\ s \circ t \circ s &= \psi_{A_0 B_0} \circ t^4 \circ \psi_{A_0 B_0} \circ t^3 = \psi_{A_0 B_0 t^4 (A_0 B_0)} \circ t^7 \\ &= \psi_{A_0 B_0 t^4 (A_0 B_0) B_0^{-1} A_0^{-1} B_0 A_0} \circ t, \\ s \circ t \circ s \circ t &= \psi_{A_0 B_0 t^4 (A_0 B_0) B_0^{-1} A_0^{-1} B_0 A_0} \circ t^2, \\ s \circ t \circ s \circ t \circ s &= \psi_{A_0 B_0 t^4 (A_0 B_0) B_0^{-1} A_0^{-1} B_0 A_0} \circ t^2 \circ \psi_{A_0 B_0} \circ t^3 \\ &= \psi_{A_0 B_0 t^4 (A_0 B_0) B_0^{-1} A_0^{-1} B_0 A_0 t^2 (A_0 B_0)} \circ t^5. \end{aligned} \quad (8.79)$$

Pour chacun des mots W_k proposés, on a donc trouvé un mot $V_k(A_0, B_0) \in F_2$ qui permet d'écrire, en réindexant correctement les mots W_k ,

$$t^k = \psi_{V_k(A_0, B_0)} \circ W_k(s, t). \quad (8.80)$$

Ceci donne

$$\text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{V}) = \psi_N \circ \psi_{V_k(A_0, B_0)} \circ W_k(s, t) = \text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{N}V_k(\overline{A_0}, \overline{B_0})W_f(\overline{S}, \overline{T})). \quad (8.81)$$

Par injectivité de $\text{rest } \overline{\varphi}_*$ il reste seulement l'unique décomposition recherchée, où $\overline{N}V_k(\overline{A_0}, \overline{B_0}) \in [\Gamma, \Gamma]$

$$\overline{V} = \overline{N}V_k(\overline{A_0}, \overline{B_0})W_k(\overline{S}, \overline{T}). \quad (8.82)$$

Naturellement dans $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$, on a également un résultat de préfixation obtenu par les mêmes méthodes, écrivant \overline{V} sous une unique forme,

$$W_k(\overline{S}, \overline{T})W'(\overline{A_0}, \overline{B_0}). \quad (8.83)$$

D'autre part, en application de la [proposition 5.2](#) on peut remonter à $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ ces résultats de préfixation et de suffixation en introduisant des signes.

8.5.2. Seconde question. La seconde question a aussi été résolue de manière directe. Elle donne $\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PSL}(2, \mathbb{Z}))$ est normal dans $\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PGL}(2, \mathbb{Z}))$.

Cette propriété a pour conséquence que $\text{Int}(F_2)$ est aussi normal dans le groupe $\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PGL}(2, \mathbb{Z}))$. On peut donc reprendre l'approche du paragraphe précédent en utilisant cette fois comme générateurs du quotient $\pi(t)$ et $\pi(o) = \pi(P_0) = p_0 = I$.

Une relation non réductible entre ces éléments se remonterait dans $\text{Aut}(F_2)$ en une appartenance d'un élément écrit avec t et o à $\text{Int}(F_2)$, et remontant par $\text{rest } \varphi_*$, en l'appartenance d'un élément écrit avec T et O à $[\text{SL}(2, \mathbb{Z}), \text{SL}(2, \mathbb{Z})]$. Or ce groupe, contenu dans $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, ne contient que des matrices de déterminant 1, alors que O a un déterminant égal à -1 . Comme $p_0^2 = 1$, on trouverait une contradiction si le nombre de termes $\pi(o)$ n'est pas pair.

Cette remarque conduit à se pencher sur le terme $\pi(t)\pi(o)$. Il vérifie par un calcul direct l'égalité

$$(\pi(t)\pi(o))^2 = 1. \tag{8.84}$$

Et plus généralement, en regardant de près le groupe engendré par ces deux éléments, on voit que l'on obtient un groupe diédral D_6 à 12 éléments [12, page 6] et [19, page 36]. On a donc

$$\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PGL}(2, \mathbb{Z})) / \text{Int}(F_2) \simeq \text{PGL}(2, \mathbb{Z}) / [\text{PSL}(2, \mathbb{Z}), \text{PSL}(2, \mathbb{Z})] \simeq D_6. \tag{8.85}$$

Ceci s'énonce aussi sous la forme suivante.

PROPOSITION 8.9. *Le groupe $\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PGL}(2, \mathbb{Z}))$ est une extension de $\text{Int}(F_2)$ par D_6 . Cette extension est équivalente à la donnée d'une suite exacte,*

$$1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{Z}) \longrightarrow D_6 \longrightarrow 1. \tag{8.86}$$

Quelques nouvelles questions découlent de ce calcul. Par exemple, on a

$$[\text{PSL}(2, \mathbb{Z}), \text{PSL}(2, \mathbb{Z})] \subset [\text{PGL}(2, \mathbb{Z}), \text{PGL}(2, \mathbb{Z})]. \tag{8.87}$$

Les questions sont les suivantes : déterminer $[\text{PGL}(2, \mathbb{Z}), \text{PGL}(2, \mathbb{Z})]$, déterminer $[\text{GL}(2, \mathbb{Z}), \text{GL}(2, \mathbb{Z})]$ et comparer à $[\text{PGL}(2, \mathbb{Z}), \text{PGL}(2, \mathbb{Z})]$.

On ne détaille pas ici, sauf à dire que [12, page 86] énonce que le commutateur $[\text{GL}(2, \mathbb{Z}), \text{GL}(2, \mathbb{Z})]$ possède la présentation suivante à trois générateurs :

$$\langle r_s, r_w, -1 \mid r_s^3 = r_w^3 = -1, (-1)^2 = 1 \rangle. \tag{8.88}$$

Les générateurs s'écrivent en fonction de matrices déjà rencontrées,

$$r_s = R_1 R_2 = [I, T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad r_w = R_3 R_2 R_1 R_3 = [I, T^{-1}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.89}$$

Les deux matrices I et T engendrant $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$, on en déduit que r_s et r_w engendrent $[\text{GL}(2, \mathbb{Z}), \text{GL}(2, \mathbb{Z})]$. La présentation que l'on vient de donner pour ce dernier groupe peut se déduire de celle de $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ en fonction de I et T .

En procédant par la même méthode que celle qui a conduit au [théorème 8.7](#), on obtient maintenant ce théorème.

THÉORÈME 8.10. *Tout élément de $\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PGL}(2, \mathbb{Z}))$ peut être écrit de façon unique sous la forme*

$$\psi_N \circ o^h \circ t^k \quad \text{avec } h = 0, 1; k = 0, 1, \dots, 5; N \in F_2. \quad (8.90)$$

Un élément quelconque $\overline{W} \in \text{PGL}(2, \mathbb{Z})$ étant donné, on peut considérer le terme

$$\pi(\text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{W})) \in \text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PGL}(2, \mathbb{Z})) / \text{Int}(F_2) \simeq D_6. \quad (8.91)$$

Par ce qui précède, il est décomposable dans D_6 comme un mot en $\pi(o)$ et $\pi(t)$. En remontant au groupe de départ, on trouve pour \overline{W} une décomposition de la forme

$$\psi_{N_1} \circ w(o, t). \quad (8.92)$$

Il est maintenant possible d'utiliser une remarque faite, en écrivant

$$(\pi(t^{-1})\pi(o))^2 = 1. \quad (8.93)$$

Ceci permet d'écrire

$$t^{-1} \circ o \circ t^{-1} \circ o = \psi_{N_2} \quad \text{avec } N_2 \in F_2. \quad (8.94)$$

En fait, l'expression des automorphismes t et o montre que $\psi_{N_2} = \text{id}_{F_2}$. On obtient donc simplement que

$$o \circ t \circ o = t^{-1}. \quad (8.95)$$

Cette expression permet de ramener dans le terme $w(o, t)$ l'automorphisme o en tête, avec une puissance égale à 0 ou 1, suivi seulement d'une puissance de t . Pour ce dernier terme, on peut réduire sa puissance en utilisant la formule déjà vue en (8.65).

Il ne reste qu'à montrer que l'on a, pour tout $N_3 \in F_2$

$$o \circ \psi_{N_3} = \psi_{3N} \circ o, \quad (8.96)$$

où $3N \in F_2$ est obtenu à partir de N_3 en permutant les deux termes A_0 et B_0 . Ceci donne la décomposition recherchée. Son unicité est évidente en appliquant d'abord π et concluant dans D_6 à l'unicité de h et k dans les hypothèses faites. L'unicité de N en résulte.

On en déduit un nouveau résultat de suffixation, cette fois pour le groupe projectif unimodulaire.

PROPOSITION 8.11. *Tout élément de $\text{PGL}(2, \mathbb{Z})$ s'écrit sous forme d'un produit de forme $W(\overline{A_0}, \overline{B_0}) \overline{O}^h W_k(\overline{S}, \overline{T})$ où*

$$\begin{aligned} h \in \{0, 1\}, \quad W(\overline{A_0}, \overline{B_0}) \in [\Gamma, \Gamma], \\ W_k(\overline{S}, \overline{T}) \in \{1, \overline{S}, \overline{ST}, \overline{STS}, \overline{STST}, \overline{STSTST}\} \quad (\text{avec } k = 0, 1, \dots, 5). \end{aligned} \quad (8.97)$$

De plus cette décomposition est unique.

On a d'ailleurs quelques égalités complémentaires qui expliquent pourquoi au quotient par $[\Gamma, \Gamma]$ on trouve le groupe D_6 ,

$$SO = OS^3, \quad TO = OT^{-1}. \tag{8.98}$$

La [proposition 8.11](#) permet d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 8.12. *Toute matrice de $GL(2, \mathbb{Z})$ possède une unique décomposition de la forme suivante :*

$$\pm W(A_0, B_0)O^h W_k(S, T). \tag{8.99}$$

Où

$$h \in \{0, 1\}, \quad W(A_0, B_0) \in [SL(2, \mathbb{Z}), SL(2, \mathbb{Z})], \tag{8.100}$$

$$W_k(S, T) \in \{1, S, ST, STS, STST, STSTS\} \quad (\text{avec } k = 0, 1, \dots, 5).$$

De plus, la condition $h = 0$ caractérise les matrices du sous-groupe $SL(2, \mathbb{Z})$.

La démonstration de ce résultat de suffixation est évidente. On a aussi un résultat de préfixation équivalent.

Ces résultats donnent un éclairage particulier au [théorème 4.1](#) et à la [proposition 5.2](#) énoncés auparavant. Ils permettent d'envisager avec [[12](#), page 86] le calcul explicite du groupe des commutateurs de $PGL(2, \mathbb{Z})$:

$$[GL(2, \mathbb{Z}), GL(2, \mathbb{Z})] / \{\pm 1\} \simeq [PGL(2, \mathbb{Z}), PGL(2, \mathbb{Z})] = \langle \overline{r_s}, \overline{r_w} \mid \overline{r_s}^3 = \overline{r_w}^3 = 1 \rangle. \tag{8.101}$$

8.5.3. Troisième question. La troisième question est de savoir si le sous-groupe image $\text{rest } \overline{\varphi}_*(PGL(2, \mathbb{Z}))$ est normal dans $\text{Aut}(F_2)$. Elle est plus délicate. Pour la résoudre, on peut remarquer que si la réponse était positive, on aurait aussi par ce que l'on vient de voir $\text{rest } \overline{\varphi}_*(PSL(2, \mathbb{Z}))$ normal dans $\text{Aut}(F_2)$. Or pour étudier cette dernière question, on peut considérer les six automorphismes $P_0 \circ s \circ P_0^{-1}$, $P_0 \circ st \circ P_0^{-1}$, $U_0 \circ s \circ U_0^{-1}$, $U_0 \circ st \circ U_0^{-1}$, $\sigma_0 \circ s \circ \sigma_0^{-1}$, $\sigma_0 \circ st \circ \sigma_0^{-1}$. Il suffit qu'ils puissent être décomposés comme des mots en s et t pour que l'on soit certain qu'ils font partie de $\text{rest } \overline{\varphi}_*(PSL(2, \mathbb{Z}))$. La conséquence serait alors que ce dernier groupe est normal dans $\text{Aut}(F_2)$.

On calcule explicitement certains de ces automorphismes grâce à l'identification avec les couples de générateurs donnée par la [proposition 7.1](#). On trouve d'abord trois automorphismes d'ordre 2 comme s qui se calculent aisément,

$$P_0 \circ s \circ P_0^{-1} = (A_0^{-1}, B_0^{-1}) = s,$$

$$U_0 \circ s \circ U_0^{-1} = (B_0^{-1} A_0^{-1} B_0, B_0^{-1}) = t \circ s \circ t^{-1}, \tag{8.102}$$

$$\sigma_0 \circ s \circ \sigma_0^{-1} = (A_0^{-1}, B_0^{-1}) = s.$$

On a ensuite trois automorphismes d'ordre 3 comme $s \circ t$, plus durs à décomposer sur s et t pour les deux derniers d'entre eux,

$$P_0 \circ s \circ t \circ P_0^{-1} = (B_0^{-1} A_0^{-1}, A_0) = s \circ t^{-1},$$

$$U_0 \circ s \circ t \circ U_0^{-1} = (B_0^2 A_0 B_0, B_0^{-1} A_0^{-1} B_0^{-1}), \tag{8.103}$$

$$\sigma_0 \circ s \circ t \circ \sigma_0^{-1} = (B_0, B_0^{-1} A_0^{-1}).$$

En réalité, ils ne sont pas décomposables sur s et t . On le montre sur le dernier en remarquant que l'on devrait avoir avec la [proposition 8.11](#)

$$\sigma_0 \circ t \circ \sigma_0^{-1} = \zeta = t^k \circ \psi_N. \quad (8.104)$$

En appliquant π , sachant que π' fournirait un résultat équivalent, ceci donne

$$\pi(\zeta) = y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \pi(t)^k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^k \quad \text{avec } k = 0, 1, \dots, 5. \quad (8.105)$$

Il suffit d'essayer les diverses possibilités pour k pour voir qu'une telle relation est impossible. En particulier, on a

$$\sigma_0 \circ s \circ t \circ \sigma_0^{-1} = s \circ (\sigma \circ t \circ \sigma^{-1}) \notin \text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PSL}(2, \mathbb{Z})). \quad (8.106)$$

De même en appliquant π , on a

$$\pi(U_0 \circ t \circ U_0^{-1}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \notin \{\pi(t)^k \mid k = 0, 1, \dots, 5\}. \quad (8.107)$$

On en déduit que

$$U_0 \circ s \circ t \circ U_0^{-1} \notin \text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PSL}(2, \mathbb{Z})). \quad (8.108)$$

Ceci établit que le sous-groupe $\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PSL}(2, \mathbb{Z}))$ de $\text{Aut}(F_2)$ n'est pas normal dans ce groupe. A fortiori, le sous-groupe $\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PGL}(2, \mathbb{Z}))$ n'est pas normal dans $\text{Aut}(F_2)$.

Il n'en demeure pas moins que le groupe $\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PGL}(2, \mathbb{Z}))$ opère dans le groupe $\text{Aut}(F_2)$. On va maintenant examiner ce que l'on peut dire sur les orbites correspondantes, et ceci va nous ramener directement à l'arbre de Markoff.

9. L'interprétation algébrique de l'arbre de Markoff. On note ici $\overline{\Delta}$ le sous-groupe $\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PGL}(2, \mathbb{Z}))$. Il permet d'introduire deux relations d'équivalence entre les éléments ϕ_1 et ϕ_2 de $\text{Aut}(F_2)$,

$$\begin{aligned} \phi_1 \mathfrak{R}_{\overline{\Delta}} \phi_2 &\iff \phi_1 \circ \phi_2^{-1} \in \overline{\Delta} \iff \phi_2 \in \overline{\Delta} \phi_1, \\ \phi_1 \overline{\Delta} \mathfrak{R} \phi_2 &\iff \phi_1^{-1} \circ \phi_2 \in \overline{\Delta} \iff \phi_2 \in \phi_1 \overline{\Delta}. \end{aligned} \quad (9.1)$$

On définit ainsi un quotient à droite, composé des classes à droite $\overline{\Delta} \phi_1$, où $\phi_1 \in \text{Aut}(F_2)$,

$$\text{Aut}(F_2) / \mathfrak{R}_{\overline{\Delta}} = (\text{Aut}(F_2) / \overline{\Delta})_d. \quad (9.2)$$

On a de même un quotient à gauche, composé des classes à gauche $\phi_1 \overline{\Delta}$, où $\phi_1 \in \text{Aut}(F_2)$,

$$\text{Aut}(F_2) / \overline{\Delta} \mathfrak{R} = (\text{Aut}(F_2) / \overline{\Delta})_g. \quad (9.3)$$

Les deux ensembles que l'on vient de définir sont équipotents par la bijection

$$\overline{\Delta} \phi_1 \in (\text{Aut}(F_2) / \overline{\Delta})_d \longmapsto \phi_1^{-1} \overline{\Delta} \in (\text{Aut}(F_2) / \overline{\Delta})_g. \quad (9.4)$$

Néanmoins, ces deux ensembles sont différents car $\overline{\Delta}$ n'est pas normal dans le groupe $\text{Aut}(F_2)$.

9.1. Construction de l'arbre complet de l'équation de Markoff. Avec ce que l'on a vu avant, l'arbre complet des solutions de l'équation de Markoff est accessible grâce à l'application surjective suivante :

$$\Pi : (A, B) \in \text{Aut}(F_2) \longrightarrow ((\text{tr}(B^{-1})/3), (\text{tr}(A)/3), (\text{tr}(B^{-1}A^{-1})/3)) \in (\mathbb{N} - \{0\})^3. \quad (9.5)$$

Le [théorème 6.5](#) que l'on a démontré s'écrit maintenant

$$\Pi(\phi_1) = \Pi(\phi_2) \iff \exists N \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}) \quad \text{tel que } \phi_1 \circ \phi_2^{-1} = \text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{N}) \in \overline{\Delta}. \quad (9.6)$$

Il peut être traduit par le résultat suivant.

THÉORÈME 9.1. *Le sous-groupe $\overline{\Delta} = \text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PGL}(2, \mathbb{Z}))$ de $\text{Aut}(F_2)$ n'est pas normal dans ce groupe. Le quotient à droite $\text{Aut}(F_2)/\mathfrak{R}_{\overline{\Delta}}$ est équipotent par une bijection $\overline{\Pi}$ à l'ensemble des sommets de l'arbre complet des solutions de l'équation de Markoff. Cette bijection factorise l'application Π du groupe $\text{Aut}(F_2)$ dans cet arbre grâce à la projection canonique p_c du groupe $\text{Aut}(F_2)$ sur le quotient $\text{Aut}(F_2)/\mathfrak{R}_{\overline{\Delta}}$:*

$$\Pi = \overline{\Pi} \circ p_c. \quad (9.7)$$

La question qui se pose alors est de savoir comment se construisent les arêtes de l'arbre complet sur cet ensemble quotient à droite.

9.1.1. De nouveaux automorphismes. Pour construire l'arbre, on a vu que l'on utilise des involutions que l'on a notées $X_\phi : (A, B) \rightarrow (A^{-1}, ABA)$, $Y_\phi : (A, B) \rightarrow (BAB, B^{-1})$, $Z_\phi : (A, B) \rightarrow (A^{-1}, B)$.

Dans une telle écriture, (A, B) désigne un couple de générateurs du groupe F_2 . On peut considérer qu'il s'agit d'un automorphisme écrit dans le système de générateurs de référence (A_0, B_0) sous la forme

$$\phi = (A, B) \in \text{Aut}(F_2). \quad (9.8)$$

Plus précisément, en introduisant les autres transformations involutives,

$$\begin{aligned} X_0 &: (A_0, B_0) \rightarrow (A_0^{-1}, A_0 B_0 A_0), \\ Y_0 &: (A_0, B_0) \rightarrow (B_0 A_0 B_0, B_0^{-1}), \\ Z_0 &: (A_0, B_0) \rightarrow (A_0^{-1}, B_0). \end{aligned} \quad (9.9)$$

On obtient les expressions

$$X_\phi = \phi \circ X_0 \circ \phi^{-1}, \quad Y_\phi = \phi \circ Y_0 \circ \phi^{-1}, \quad Z_\phi = \phi \circ Z_0 \circ \phi^{-1}. \quad (9.10)$$

Comme ces transformations dépendent de ϕ , on les note plus précisément ici

$$\begin{aligned} X_\phi &= X_{(A, B)} = \phi \circ X_0 \circ \phi^{-1}, \\ Y_\phi &= Y_{(A, B)} = \phi \circ Y_0 \circ \phi^{-1}, \\ Z_\phi &= Z_{(A, B)} = \phi \circ Z_0 \circ \phi^{-1}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Ces égalités mettent en avant l'action dans $\text{Aut}(F_2)$ du groupe des automorphismes intérieurs $\text{Int}(\text{Aut}(F_2))$. On a vu avant, avec la [proposition 8.5](#), que ce dernier groupe est isomorphe à $\text{Aut}(F_2)$.

Pour mieux décrire X_ϕ , Y_ϕ et Z_ϕ , on utilise la présentation de $\text{Aut}(F_2)$ construite avec les éléments P_0, U_0, σ_0 . Pour commodité, on utilise au lieu de U_0 l'élément d'ordre 3 suivant :

$$v_0 = U_0 \circ \sigma_0 \circ P_0 = (B_0, B_0^{-1} A_0^{-1}). \quad (9.12)$$

Au moyen de transformations de Tietze [19], on pourrait d'ailleurs écrire une présentation de $\text{Aut}(F_2)$ utilisant les trois générateurs σ_0, P_0, v_0 , mais on n'insiste pas sur ce point. On note comme ci-dessus

$$\begin{aligned} P &= P_\phi = \phi \circ P_0 \circ \phi^{-1} : (A, B) \rightarrow (B, A), \\ v &= v_\phi = \phi \circ v_0 \circ \phi^{-1} : (A, B) \rightarrow (B, B^{-1} A^{-1}), \\ \sigma &= \sigma_\phi = \phi \circ \sigma_0 \circ \phi^{-1} : (A, B) \rightarrow (A^{-1}, B). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Tout automorphisme $\Phi : (A, B) \rightarrow (\Phi(A), \Phi(B))$ permet de définir un chemin sur l'arbre de Markoff :

$$\tilde{\Phi} : \Pi(A, B) = (m, m_1, m_2) \rightarrow \Pi(\Phi(A), \Phi(B)) = (m^\Phi, m_1^\Phi, m_2^\Phi). \quad (9.14)$$

Et les trois automorphismes que l'on vient d'introduire définissent

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} : \Pi(A, B) = (m, m_1, m_2) &\rightarrow \Pi(\sigma(A), \sigma(B)) = (m, m_1, 3mm_1 - m_2), \\ \tilde{P} : \Pi(A, B) = (m, m_1, m_2) &\rightarrow \Pi(P(A), P(B)) = (m_1, m, m_2), \\ \tilde{v} : \Pi(A, B) = (m, m_1, m_2) &\rightarrow \Pi(v(A), v(B)) = (m_2, m, m_1). \end{aligned} \quad (9.15)$$

Les deux transformations \tilde{P} et \tilde{v} engendrent un groupe de permutations de trois éléments, comme le montre le diagramme suivant où l'on voit réapparaître le groupe cyclique C_6 :

$$\begin{array}{ccc} (m, m_1, m_2) & \xrightarrow{\tilde{P}} & (m_1, m, m_2) \\ \tilde{v} \uparrow & & \downarrow \tilde{v} \\ (m_1, m_2, m) & & (m_2, m_1, m) \\ \tilde{v} \uparrow & & \downarrow \tilde{v} \\ (m_2, m, m_1) & \xleftarrow{\tilde{P}} & (m, m_2, m_1) \end{array} \quad (9.16)$$

Ceci permet de calculer

$$\begin{aligned} \tilde{P} \circ \tilde{v} \circ \tilde{v} \circ \tilde{P} \circ \tilde{\sigma} \circ \tilde{v} \circ \tilde{v} &: (m, m_1, m_2) \rightarrow (3m_1m_2 - m, m_1, m_2), \\ \tilde{v} \circ \tilde{v} \circ \tilde{P} \circ \tilde{\sigma} \circ \tilde{v} \circ \tilde{v} \circ \tilde{P} &: (m, m_1, m_2) \rightarrow (m, 3mm_2 - m_1, m_2), \\ \tilde{\sigma} &: (m, m_1, m_2) \rightarrow (m, m_1, 3mm_1 - m_2). \end{aligned} \quad (9.17)$$

Ces transformations conduisent, par des expressions analogues à celles que l'on vient de mettre en évidence, à calculer certains des automorphismes que l'on vient de mentionner. On obtient en effet cette proposition.

PROPOSITION 9.2. *On a les égalités suivantes, définissant des automorphismes involutifs*

$$\begin{aligned} X_\phi &= X_{(A,B)} = \nu \circ \nu \circ P \circ \sigma \circ \nu \circ \nu \circ P : (A, B) \longrightarrow (A^{-1}, ABA), \\ Y_\phi &= Y_{(A,B)} = P \circ \nu \circ \nu \circ P \circ \sigma \circ \nu \circ \nu : (A, B) \longrightarrow (BAB, B^{-1}), \\ Z_\phi &= Z_{(A,B)} = \sigma : (A, B) \longrightarrow (A^{-1}, B). \end{aligned} \quad (9.18)$$

De plus, pour les triplets associés sur l'arbre complet des solutions de l'équation de Markoff,

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_\phi &: (m, m_1, m_2) \longrightarrow (3m_1m_2 - m, m_1, m_2), \\ \widetilde{Y}_\phi &: (m, m_1, m_2) \longrightarrow (m, 3mm_2 - m_1, m_2), \\ \widetilde{Z}_\phi &: (m, m_1, m_2) \longrightarrow (m, m_1, 3mm_1 - m_2). \end{aligned} \quad (9.19)$$

9.1.2. Premier processus de construction des couples de générateurs de F_2 . Partant de la base (A_0, B_0) de F_2 , on applique comme précédemment $X_{(A_0, B_0)}$, $Y_{(A_0, B_0)}$, $Z_{(A_0, B_0)}$. Ceci donne respectivement

$$\begin{aligned} X_0 &= \left(\left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{array} \right] \right), & Y_0 &= \left(\left[\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right] \right), \\ Z_0 &= \left(\left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{array} \right] \right). \end{aligned} \quad (9.20)$$

À partir de ces couples, on applique les transformations involutives X , Y ou Z qui correspondent aux couples obtenus. C'est une façon de procéder qui donne six nouveaux couples. Par exemple, en notant (A_1, B_1) le premier des trois derniers couples cités, on applique les deux transformations suivantes :

$$\begin{aligned} Y_{(A_1, B_1)} &: (A_1, B_1) \longrightarrow (B_1A_1B_1, B_1^{-1}) = \left(\left[\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{array} \right] \right), \\ Z_{(A_1, B_1)} &: (A_1, B_1) \longrightarrow (A_1^{-1}, B_1) = \left(\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{array} \right] \right). \end{aligned} \quad (9.21)$$

Le fait que $X_{(A_1, B_1)}$ ne donne pas de nouveau triplet à partir de (A_1, B_1) , et n'est donc pas appliqué, est général. En effet, il est facile de vérifier le résultat suivant :

PROPOSITION 9.3. *Pour tout automorphisme (A, B) de $\text{Aut}(F_2)$, on a*

$$\begin{aligned} (A, B) &\xrightarrow{X_{(A,B)}} (A^{-1}, ABA) \xrightarrow{X_{(A^{-1}, ABA)}} (A, B), \\ (A, B) &\xrightarrow{Y_{(A,B)}} (BAB, B^{-1}) \xrightarrow{Y_{(BAB, B^{-1})}} (A, B), \\ (A, B) &\xrightarrow{Z_{(A,B)}} (A^{-1}, B) \xrightarrow{Z_{(A^{-1}, B)}} (A, B). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Avec les notations introduites avant, on a sur l'exemple considéré

$$\phi = X_0 = (A_1, B_1). \quad (9.23)$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} Y_{(A_1, B_1)} &= \phi \circ Y_0 \circ \phi^{-1} = X_0 \circ Y_0 \circ X_0, \\ Z_{(A_1, B_1)} &= \phi \circ Z_0 \circ \phi^{-1} = X_0 \circ Z_0 \circ X_0. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Comme on applique ces transformations au terme X_0 , les résultats obtenus sont respectivement

$$(B_1 A_1 B_1, B_1^{-1}) = X_0 \circ Y_0, \quad (A_1^{-1}, B_1) = X_0 \circ Z_0. \quad (9.25)$$

En poursuivant par récurrence, et compte tenu de la [proposition 8.2](#), on fait apparaître ainsi tous les chemins possibles $\text{ch}(X_0, Y_0, Z_0)$. On obtient donc tous les mots réduits [[5](#), page 26] écrits avec ces trois involutions, identifiables à des automorphismes particuliers de $\text{Aut}(F_2)$. Ce procédé construit pas à pas une bijection Π de certains couples de générateurs de F_2 sur l'arbre de Markoff complet tel qu'il a été lui même construit précédemment avec les transformations \widetilde{X}_ϕ , \widetilde{Y}_ϕ , and \widetilde{Z}_ϕ données en ([9.19](#)).

Il en résulte en particulier que tous les mots réduits sont différents, de sorte qu'aucune relation non triviale n'existe entre ces chemins. Ceci permet d'énoncer ce théorème.

THÉORÈME 9.4. *Dans le groupe $\text{Aut}(F_2)$, les chemins $\text{ch}(X_0, Y_0, Z_0)$ constituent pour la composition un sous-groupe propre, le sous-groupe des chemins (ou groupe du triangle), dont une présentation est donnée par*

$$T_3 = \langle X_0, Y_0, Z_0 \mid X_0^2 = Y_0^2 = Z_0^2 = \text{id}_{F_2} \rangle \simeq C_2 * C_2 * C_2. \quad (9.26)$$

Ce groupe ne donne pas tous les systèmes de générateurs de F_2 , mais seulement ceux qui se déduisent de la base (A_0, B_0) par un tel chemin. La restriction de l'application Π à ce groupe, ou respectivement à l'ensemble des systèmes de générateurs associés, est bijective, à valeurs dans l'arbre de Markoff complet.

Pour vérifier que le groupe T_3 est propre dans $\text{Aut}(F_2)$, considérons en effet que l'on a avec un chemin réduit

$$P_0 = \text{ch}(X_0, Y_0, Z_0) \in \text{Aut}(F_2). \quad (9.27)$$

En composant avec la base $\text{id}_{F_2} = (A_0, B_0)$ et examinant le triplet qui en résulte par Π , le chemin ne devrait comprendre aucun terme X_0, Y_0, Z_0 . D'où une contradiction qui complète la démonstration de la [proposition 9.3](#) en montrant que l'on a, d'ailleurs avec une involution,

$$P_0 \notin T_3. \quad (9.28)$$

9.1.3. Second processus de construction et application. Sur la base (A_0, B_0) de F_2 , on applique d'abord $X_{(A_0, B_0)}$, $Y_{(A_0, B_0)}$, $Z_{(A_0, B_0)}$. Ceci donne respectivement

$$\begin{aligned} X_0 &= X_{(A_0, B_0)} = \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right), \\ Y_0 &= Y_{(A_0, B_0)} = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right), \\ Z_0 &= Z_{(A_0, B_0)} = \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (9.29)$$

À partir de ces couples, on applique à nouveau les mêmes transformations involutives. Cette façon de procéder donne encore six nouveaux couples comme les deux suivants obtenus à partir de X_0 :

$$\begin{aligned} Y_0 \circ X_0 &= (B_0^{-1} A_0^{-1} B_0^{-1}, B_0 A_0 B_0 A_0 B_0) = \left(\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} \right), \\ Z_0 \circ X_0 &= (A_0, A_0^{-1} B_0 A_0^{-1}) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (9.30)$$

En poursuivant pas à pas, composant uniquement les involutions X_0, Y_0, Z_0 , on construit tous les chemins possibles $\text{ch}(X_0, Y_0, Z_0)$. On trouve d'ailleurs les mots miroirs de ceux apparaissant dans le processus de construction précédent en suivant un même chemin en X, Y, Z . Ceci se vérifie aisément par récurrence.

Et ce que l'on a décrit n'est encore que l'orbite du couple de générateurs (A_0, B_0) , base de F_2 et automorphisme unité de $\text{Aut}(F_2)$, sous l'action du sous-groupe T_3 . C'est le groupe T_3 lui-même, parcouru autrement.

Si l'on considère alors l'ensemble des images par Π des couples générateurs ainsi construits, on trouve l'arbre complet de toutes les solutions de l'équation de Markoff. Mais l'application Π est plus généralement définie sur $\text{Aut}(F_2)$, ensemble sur lequel elle est surjective par le [théorème 5.4](#). Elle définit une équivalence associée avec

$$\phi_1 \equiv \phi_2 \iff \Pi(\phi_1) = \Pi(\phi_2). \quad (9.31)$$

Pour tout $\phi \in \text{Aut}(F_2)$, la bijectivité de Π sur le groupe T_3 assure l'existence d'un unique chemin $\text{ch}(X_0, Y_0, Z_0)$ tel que

$$\phi \equiv \text{ch}(X_0, Y_0, Z_0). \quad (9.32)$$

Par ailleurs, l'application du [théorème 6.5](#) donne, avec $\bar{N} \in \text{PGL}(2, \mathbb{Z})$

$$\phi = \text{rest } \bar{\varphi}_* (\bar{N}) \circ \text{ch}(X_0, Y_0, Z_0). \quad (9.33)$$

On en déduit que

$$\phi \circ \text{ch}(X_0, Y_0, Z_0)^{-1} = \text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{N}) \in \overline{\Delta}. \quad (9.34)$$

Soit

$$\phi \mathfrak{X}_{\overline{\Delta}} \text{ch}(X_0, Y_0, Z_0). \quad (9.35)$$

Inversement, avec le [théorème 9.1](#), une telle condition donne

$$\phi \equiv \text{ch}(X_0, Y_0, Z_0). \quad (9.36)$$

Le [théorème 9.4](#) énoncé permet alors de conclure le suivant.

THÉORÈME 9.5. *Toute classe d'automorphismes pour la relation $\mathfrak{X}_{\overline{\Delta}}$, élément du quotient à droite $\text{Aut}(F_2)/\mathfrak{X}_{\overline{\Delta}}$, contient un unique chemin réduit $\text{ch}(X_0, Y_0, Z_0)$. De plus, tout élément de cette classe se décompose de façon unique sous la forme suivante, où $\overline{N} \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$,*

$$\phi = \text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{N}) \circ \text{ch}(X_0, Y_0, Z_0). \quad (9.37)$$

Enfin la relation $\mathfrak{X}_{\overline{\Delta}}$ définie sur le groupe $\text{Aut}(F_2)$ n'est autre que l'équivalence associée à la fonction Π .

L'existence du chemin $\text{ch}(X_0, Y_0, Z_0)$ dans une classe quelconque pour $\mathfrak{X}_{\overline{\Delta}}$ a été établie avant. Supposons alors que deux chemins réduits $\text{ch}_1(X_0, Y_0, Z_0)$ et $\text{ch}_2(X_0, Y_0, Z_0)$ soient contenus dans cette même classe, qui est aussi une classe pour la relation \equiv . On trouve par le [théorème 6.5](#) un automorphisme $\text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{N}_0) \in \overline{\Delta}$ vérifiant

$$\text{ch}_1(X_0, Y_0, Z_0) \circ \text{ch}_2(X_0, Y_0, Z_0)^{-1} = \text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{N}_0). \quad (9.38)$$

En réduisant, on met en évidence un chemin réduit dans la classe pour Π de la base $\text{id}_{F_2} = (A_0, B_0)$. Or dans cette classe d'équivalence, la seule possibilité est d'avoir

$$\text{ch}_1(X_0, Y_0, Z_0) \circ \text{ch}_2(X_0, Y_0, Z_0)^{-1} = \text{id}_{F_2}. \quad (9.39)$$

C'est-à-dire

$$\text{ch}_1(X_0, Y_0, Z_0) = \text{ch}_2(X_0, Y_0, Z_0). \quad (9.40)$$

Ceci établit l'unicité énoncée dans le [théorème 9.5](#). La bijectivité de Π sur T_3 avait permis de conclure de même. La décomposition donnée dans ce résultat est une conséquence du [théorème 6.5](#). L'injectivité de $\text{rest } \overline{\varphi}_*$ permet alors de conclure à l'unicité de \overline{N} .

Une conséquence évidente est que l'on a, ceci résultant aussi des propriétés classiques des traces,

$$\Pi(\text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{N}) \circ \text{ch}(X_0, Y_0, Z_0)) = \Pi(\text{ch}(X_0, Y_0, Z_0)). \quad (9.41)$$

L'application Π peut donc être considérée comme un invariant sur chaque classe de $\text{Aut}(F_2)/\mathfrak{X}_{\overline{\Delta}}$, invariant dont les valeurs varient selon l'unique chemin de T_3 contenu dans chaque classe pour l'équivalence $\mathfrak{X}_{\overline{\Delta}}$.

9.2. Non normalité du groupe des chemins dans le groupe $\text{Aut}(F_2)$. Ce qui précède introduit naturellement une application,

$$\begin{aligned} (\text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{N}), \text{ch}(X_0, Y_0, Z_0)) \in \overline{\Delta} \times T_3 &\longrightarrow \text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{N}) \circ \text{ch}(X_0, Y_0, Z_0) \\ &\in \text{Aut}(F_2). \end{aligned} \quad (9.42)$$

Par le [théorème 9.5](#), cette application est bijective. Ceci s'écrit avec les notations habituelles sur les groupes

$$\begin{aligned} \text{Aut}(F_2) &= \overline{\Delta} \cdot T_3 \\ &= \{ \text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{N}) \circ \text{ch}(X_0, Y_0, Z_0) \mid (\text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{N}), \text{ch}(X_0, Y_0, Z_0)) \in \overline{\Delta} \times T_3 \}. \end{aligned} \quad (9.43)$$

Ce théorème donne également

$$\overline{\Delta} \cap T_3 = \{ \text{id}_{F_2} \}. \quad (9.44)$$

Avec [2, chapitre 1, page 62], on envisage de construire une extension $(\text{Aut}(F_2), i_{\overline{\Delta}}, p_{\overline{\Delta}})$ où l'on définit $i_{\overline{\Delta}} : \overline{\Delta} \rightarrow \text{Aut}(F_2)$, injection canonique du sous-groupe $\overline{\Delta}$ dans $\text{Aut}(F_2)$, $p_{\overline{\Delta}} : \text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{N}) \circ \text{ch}(X_0, Y_0, Z_0) \in \text{Aut}(F_2) \rightarrow \text{ch}(X_0, Y_0, Z_0) \in T_3$.

Il est possible de s'assurer que $p_{\overline{\Delta}}$ n'est pas un morphisme de groupes. En effet, si tel était le cas, on pourrait considérer son noyau,

$$\text{Ker}(p_{\overline{\Delta}}) = \overline{\Delta} = \text{Im}(i_{\overline{\Delta}}). \quad (9.45)$$

Il devrait être normal dans le groupe $\text{Aut}(F_2)$, propriété qu'on a démontré auparavant qu'elle n'est pas vérifiée. On ne peut donc pas considérer sous cette forme une extension de groupe.

On peut alors inverser les rôles et envisager de construire une extension $(\text{Aut}(F_2), i_T, p_T)$ où l'on définit $i_T : T_3 \rightarrow \text{Aut}(F_2)$, injection canonique du sous-groupe T_3 dans $\text{Aut}(F_2)$, $p_T : \text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{N}) \circ \text{ch}(X_0, Y_0, Z_0) \in \text{Aut}(F_2) \rightarrow \text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{N}) \in \overline{\Delta}$.

Cette fois également, si p_T était morphisme de groupes, on aurait

$$\text{Ker}(p_T) = T_3 = \text{Im}(i_T). \quad (9.46)$$

Mais il faudrait que T_3 soit un sous-groupe normal de $\text{Aut}(F_2)$. Or cette fois aussi, on ne peut considérer de cette façon une extension de groupe car on a :

PROPOSITION 9.6. *Le groupe des chemins T_3 est un sous-groupe de $\text{Aut}(F_2)$ qui n'est pas normal dans ce dernier groupe.*

En effet, on peut établir que l'on a par exemple

$$\begin{aligned} P_0 \circ Z_0 \circ P_0^{-1} &= \text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{N}) \circ Z_0 = (A_0, B_0^{-1}) \\ &\text{avec } N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = S. \end{aligned} \quad (9.47)$$

Compte tenu de ce qui a été dit avant sur les classes de $\text{Aut}(F_2)/\mathfrak{R}_{\overline{\Delta}}$, ce terme serait un chemin si et seulement s'il était identique à Z_0 . Or son expression montre que ce n'est pas le cas. Ceci établit notre proposition.

Considérons plus généralement un automorphisme s'écrivant

$$(\text{rest } \overline{\varphi}_* (\overline{N}_1) \circ \text{ch}_1 (X_0, Y_0, Z_0)) \circ (\text{rest } \overline{\varphi}_* (\overline{N}_2) \circ \text{ch}_2 (X_0, Y_0, Z_0)). \quad (9.48)$$

Par le [théorème 9.5](#) on peut l'écrire ainsi

$$\text{rest } \overline{\varphi}_* (\overline{N}) \circ \text{ch} (X_0, Y_0, Z_0). \quad (9.49)$$

Supposons que l'application de Π à ces deux termes donne

$$\Pi(\text{ch}_1 (X_0, Y_0, Z_0) \circ \text{ch}_2 (X_0, Y_0, Z_0)) = \Pi(\text{ch} (X_0, Y_0, Z_0)). \quad (9.50)$$

Par l'unicité donnée dans le théorème précédent, on aurait

$$\text{ch}_1 (X_0, Y_0, Z_0) \circ \text{ch}_2 (X_0, Y_0, Z_0) = \text{ch} (X_0, Y_0, Z_0). \quad (9.51)$$

On aurait donc

$$\begin{aligned} p_{T_3} (\text{rest } \overline{\varphi}_* (\overline{N}_1) \circ \text{ch}_1 (X_0, Y_0, Z_0)) \circ p_{T_3} (\text{rest } \overline{\varphi}_* (\overline{N}_2) \circ \text{ch}_2 (X_0, Y_0, Z_0)) \\ = p_{T_3} ((\text{rest } \overline{\varphi}_* (\overline{N}_1) \circ \text{ch}_1 (X_0, Y_0, Z_0)) \circ (\text{rest } \overline{\varphi}_* (\overline{N}_2) \circ \text{ch}_2 (X_0, Y_0, Z_0))). \end{aligned} \quad (9.52)$$

On aurait donc affaire pour p_{T_3} à un morphisme de groupes. Comme on vient de voir que ce n'est pas le cas, le raisonnement que l'on vient de faire ne marche pas. La raison est le mauvais comportement pour la composition de l'application Π qu'il convient donc d'utiliser avec précaution. En réalité, on n'a pas en général d'égalité du genre

$$\begin{aligned} (\text{rest } \overline{\varphi}_* (\overline{N}_1) \circ \text{ch}_1 (X_0, Y_0, Z_0)) \circ (\text{rest } \overline{\varphi}_* (\overline{N}_2) \circ \text{ch}_2 (X_0, Y_0, Z_0)) \\ = (\text{rest } \overline{\varphi}_* (\overline{N}) \circ \text{ch}_1 (X_0, Y_0, Z_0)) \circ \text{ch}_2 (X_0, Y_0, Z_0). \end{aligned} \quad (9.53)$$

9.3. Décomposition ternaire dans $\text{Aut}(F_2)$ et applications. L'idée exploitée maintenant consiste à combiner le [théorème 9.5](#) avec le [théorème 8.10](#), et à en tirer tout un ensemble de résultats.

9.3.1. Le théorème de décomposition ternaire dans $\text{Aut}(F_2)$. On obtient par la combinaison précédente le résultat suivant.

THÉORÈME 9.7. *Tout automorphisme $\phi \in \text{Aut}(F_2)$ se décompose d'une et d'une seule façon sous la forme suivante :*

$$\psi_N \circ o^h \circ t^k \circ \text{ch} (X_0, Y_0, Z_0) \quad (9.54)$$

où $h = 0, 1$; $k = 0, 1, \dots, 5$; $N \in F_2$; $\text{ch}(X_0, Y_0, Z_0) \in T_3$.

Avec pour la détermination pratique du chemin $\text{ch}(X_0, Y_0, Z_0)$

$$\Pi(\psi_N \circ o^h \circ t^k \circ \text{ch} (X_0, Y_0, Z_0)) = \Pi(\text{ch} (X_0, Y_0, Z_0)). \quad (9.55)$$

En particulier, les éléments de $\overline{\Delta} = \text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PGL}(2, \mathbb{Z}))$ sont caractérisés par la condition

$$\text{ch}(X_0, Y_0, Z_0) = \text{id}_{F_2}. \quad (9.56)$$

Ceux de $\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PSL}(2, \mathbb{Z}))$ sont caractérisés par la condition supplémentaire,

$$h = 0. \quad (9.57)$$

Les éléments de $\text{Int}(F_2)$ sont caractérisés par les trois conditions

$$h = 0; \quad k = 0; \quad \text{ch}(X_0, Y_0, Z_0) = \text{id}_{F_2}. \quad (9.58)$$

Enfin les éléments de T_3 sont caractérisés par les conditions

$$\psi_N = \text{id}_{F_2}; \quad h = 0 \quad \text{et} \quad k = 0. \quad (9.59)$$

Il en découle la possibilité de présenter $\text{Aut}(F_2)$ avec les sept générateurs particuliers que sont $\psi_{A_0}, \psi_{B_0}, o, t, X_0, Y_0, Z_0$.

Comme tout composé de deux automorphismes est également décomposable avec notre [théorème 9.5](#), on obtient tout un ensemble de relations permettant de commuter les générateurs entre eux et de simplifier les expressions obtenues

$$\begin{aligned} Z_0 \circ \psi_{A_0} &= \psi_{A_0}^{-1} \circ Z_0, & Z_0 \circ \psi_{B_0} &= \psi_{B_0} \circ Z_0, \\ Y_0 \circ \psi_{A_0} &= \psi_{B_0} \circ \psi_{A_0} \circ \psi_{B_0} \circ Y_0, & Y_0 \circ \psi_{B_0} &= \psi_{B_0}^{-1} \circ Y_0, \\ X_0 \circ \psi_{A_0} &= \psi_{A_0}^{-1} \circ X_0, & X_0 \circ \psi_{B_0} &= \psi_{A_0} \circ \psi_{B_0} \circ \psi_{A_0} \circ X_0, \\ t \circ \psi_{A_0} &= \psi_{B_0}^{-1} \circ t, & t \circ \psi_{B_0} &= \psi_{A_0} \circ \psi_{B_0} \circ t, \\ t^6 &= \psi_{B_0}^{-1} \circ \psi_{A_0}^{-1} \circ \psi_{B_0} \circ \psi_{A_0} = [\psi_{B_0}, \psi_{A_0}], \\ o \circ \psi_{A_0} &= \psi_{B_0} \circ o, & o \circ \psi_{B_0} &= \psi_{A_0} \circ o, \\ o^2 &= \text{id}_{F_2}, \\ Z_0 \circ o &= \psi_{B_0} \circ \psi_{A_0} \circ o \circ t^3, & Y_0 \circ o &= o \circ X_0, & X_0 \circ o &= o \circ Y_0, \\ t \circ o &= o \circ t^{-1}, \\ Z_0 \circ t &= \psi_{B_0}^{-1} \circ \psi_{A_0} \circ \psi_{B_0} \circ t^4 \circ X_0, \\ Y_0 \circ t &= \psi_{B_0} \circ t^2 \circ Z_0, \\ X_0 \circ t &= \psi_{A_0}^{-1} \circ \psi_{B_0}^{-1} \circ \psi_{A_0} \circ \psi_{B_0} \circ t^4 \circ Y_0, \\ o \circ t &= t^{-1} \circ o, \\ Z_0^2 &= Y_0^2 = X_0^2 = \text{id}_{F_2}. \end{aligned} \quad (9.60)$$

Les calculs sont assez délicats à mener pour obtenir certaines formules, mais sans grande difficulté. Ainsi, par simple composition, on obtient

$$Z_0 \circ t = (B_0^{-1}, A_0^{-1} B_0). \quad (9.61)$$

Ceci donne, avec la transformation Π essentielle ici,

$$\Pi(Z_0 \circ t) = (2, 1, 1) = \Pi(X_0) = \Pi(A_0^{-1}, A_0 B_0 A_0). \quad (9.62)$$

D'où l'existence d'une matrice $N \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ vérifiant

$$Z_0 \circ t = \text{rest } \overline{\varphi}_* (\overline{N}) \circ X_0. \quad (9.63)$$

On la calcule en ayant recours aux expressions de A_0 et B_0

$$N = TS^{-1}. \quad (9.64)$$

On doit donc maintenant considérer

$$\text{rest } \overline{\varphi}_* (\overline{TS}^{-1}) = t \circ s = t \circ \psi_{A_0 B_0} \circ t^3 = \psi_{t(A_0 B_0)} \circ t^4. \quad (9.65)$$

Il ne reste qu'à calculer

$$t(A_0 B_0) = B_0^{-1} A_0 B_0. \quad (9.66)$$

Ceci donne

$$Z_0 \circ t = \psi_{B_0}^{-1} \circ \psi_{A_0}^{-1} \circ \psi_{B_0}. \quad (9.67)$$

Avec $Y_0 \circ t$ on trouve de même $N = T^{-1}S^3$, avec $X_0 \circ t$ on a $N = T^{-2}$, avec $Z_0 \circ t$ on obtient $N = I = OS$.

Pour s'assurer que ce qui précède donne bien une présentation de $\text{Aut}(F_2)$, on peut encore utiliser des transformations de Tietze [19]. On se contente de donner ici les formules de passage entre les ensembles de générateurs des deux principales présentations de ce groupe.

PROPOSITION 9.8. *Les formules de passage sont dans un sens,*

$$\begin{aligned} \psi_{A_0} &= P_0 \circ \sigma_0 \circ U_0^{-1} \circ \sigma_0 \circ U_0^{-1} \circ P_0, \\ \psi_{B_0} &= \sigma_0 \circ U_0^{-1} \circ \sigma_0 \circ U_0^{-1}, \quad t = U_0 \circ P_0 \circ \sigma_0, \quad o = P_0, \\ X_0 &= U_0 \circ \sigma_0 \circ P_0 \circ U_0 \circ U_0 \circ \sigma_0 \circ P_0 \circ U_0 \circ \sigma_0, \\ Y_0 &= P_0 \circ U_0 \circ \sigma_0 \circ P_0 \circ U_0 \circ U_0 \circ \sigma_0 \circ P_0 \circ U_0 \circ \sigma_0 \circ P_0, \quad Z_0 = \sigma_0. \end{aligned} \quad (9.68)$$

Et dans l'autre sens,

$$P_0 = o, \quad U_0 = t \circ Z_0 \circ o, \quad \sigma_0 = Z_0. \quad (9.69)$$

La première série de formules a déjà été donnée, une partie résultant des définitions de X_0, Y_0, Z_0 , où l'on a seulement remplacé v_0 par $U_0 \circ \sigma_0 \circ P_0$. Pour la seconde série de formules, elles sont évidentes avec celles qui précèdent.

En particulier, il en résulte un nouveau système de générateurs de $\text{Aut}(F_2)$, plus simple que celui de la présentation classique de Nielsen,

$$o, t, Z_0. \quad (9.70)$$

9.3.2. Décomposition ternaire dans le groupe $GL(2, \mathbb{Z})$. On peut décrire l'action du morphisme d'abélianisation π' sur la présentation à sept générateurs du groupe $\text{Aut}(F_2)$. On a d'abord, en appliquant ce morphisme à la [proposition 7.3](#) une tour de sous groupes,

$$\{\text{id}_{F_2}\} \subset \pi'(\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PSL}(2, \mathbb{Z}))) \subset \pi'(\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PGL}(2, \mathbb{Z}))) \subset GL(2, \mathbb{Z}). \quad (9.71)$$

Par construction, π' transforme les deux automorphismes ψ_{A_0} et ψ_{B_0} en la matrice unité. L'image de $\text{Int}(F_2)$ par π' correspond au premier groupe $\{\text{id}_{F_2}\}$ de cette dernière suite d'inclusions.

Le second groupe $\pi'(\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PSL}(2, \mathbb{Z})))$ est engendré par les éléments $\pi'(t)$ et $\pi'(s) = \pi'(t)^3$. Il possède donc en réalité un unique générateur,

$$\pi'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.72)$$

Par les relations vues avant, on a aussi

$$\pi'(t)^6 = 1. \quad (9.73)$$

On a donc affaire au groupe cyclique à six éléments C_6 comprenant les six matrices suivantes :

$$\pi'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.74)$$

Le troisième groupe $\pi'(\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PGL}(2, \mathbb{Z})))$ est engendré par $\pi'(t)$ et $\pi'(o)$. On sait qu'il s'agit maintenant du groupe diédral D_6 à 12 éléments. On note dans la suite $D_6 = \pi'(\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PGL}(2, \mathbb{Z})))$. On a

$$\pi'(o) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.75)$$

Et par les relations vues avant,

$$\pi'(o)^2 = 1. \quad (9.76)$$

D'autre part,

$$\pi'(o)\pi'(t)\pi'(o) = \pi'(t)^{-1}. \quad (9.77)$$

Ceci se traduit par le fait que le groupe C_6 est normal dans D_6 . Ce dernier groupe comprend les six matrices supplémentaires suivantes :

$$\pi'(o) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (9.78)$$

Par ailleurs, le groupe $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ est engendré par les deux matrices $\pi'(t)$ et $\pi'(o)$, ainsi que celles des involutions X_0, Y_0, Z_0 . Leurs expressions sur la base (A_0, B_0) de F_2 donnent dans la base $(b_0, -a_0)$ du \mathbb{Z} -module \mathbb{Z}^2 ,

$$\begin{aligned} \pi'(X_0)(b_0) &= b_0 - 2(-a_0), & \pi'(X_0)(-a_0) &= -(-a_0), \\ \pi'(X_0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \\ \pi'(Y_0)(b_0) &= -b_0, & \pi'(Y_0)(-a_0) &= -2b_0 + (-a_0), \\ \pi'(Y_0) &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \pi'(Z_0)(b_0) &= b_0, & \pi'(Z_0)(-a_0) &= -(-a_0), \\ \pi'(Z_0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{9.79}$$

On en déduit par exemple que

$$\pi'(X_0)\pi'(o)\pi'(X_0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}. \tag{9.80}$$

Ceci garantit que le groupe $\pi'(\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PGL}(2, \mathbb{Z})))$ n'est pas normal dans le groupe $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$.

On peut d'ailleurs aller plus loin en renouvelant les observations faites avant. Ainsi, on peut considérer le groupe $\pi'(T_3)$ et se demander quelle est sa structure. Clairement, on peut écrire tout élément de ce groupe sous la forme

$$\pi'(\text{ch}(X_0, Y_0, Z_0)) = \text{ch}(\pi'(X_0), \pi'(Y_0), \pi'(Z_0)). \tag{9.81}$$

Si un tel élément vaut la matrice unité, on aurait en revenant à $\text{Aut}(F_2)$ un expression

$$\text{ch}(X_0, Y_0, Z_0) = \psi_N \in \text{Int}(F_2). \tag{9.82}$$

C'est-à-dire avec ce que l'on a vu avant,

$$\text{ch}(X_0, Y_0, Z_0) = \text{id}_{F_2}. \tag{9.83}$$

Il est donc impossible d'avoir, hors le cas du chemin vide,

$$\text{ch}(\pi'(X_0), \pi'(Y_0), \pi'(Z_0)) = 1. \tag{9.84}$$

Ceci signifie que la restriction de π' à T_3 est un isomorphisme de ce groupe sur son image, d'ailleurs engendrée par les trois matrices $\pi'(X_0), \pi'(Y_0), \pi'(Z_0)$. Autrement dit, on a fabriqué une image du groupe T_3 dans le groupe $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$. On peut d'ailleurs,

comme avant, se demander si ce groupe $\pi'(T_3)$ est normal dans le groupe $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$. Et il est clair qu'il n'en est rien en remontant, dans $\text{Aut}(F_2)$ par π' , la relation

$$\pi'(o)\pi'(Z_0)\pi'(o) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -\pi'(Z_0). \quad (9.85)$$

D'autre part, on peut traduire le [théorème 9.7](#) dans $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$. Tout ceci permet d'énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 9.9. *Tout élément $V \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ se décompose d'une et d'une seule façon sous la forme suivante :*

$$\pi'(o)^h \pi'(t)^k \text{ch}(\pi'(X_0), \pi'(Y_0), \pi'(Z_0)), \quad (9.86)$$

où $h = 0, 1$; $k = 0, 1, \dots, 5$; $\text{ch}(\pi'(X_0), \pi'(Y_0), \pi'(Z_0)) \in \pi'(T_3)$.

Les éléments de $\pi'(\overline{\Delta}) = \pi'(\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PGL}(2, \mathbb{Z}))) = D_6$, non normal dans $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$, sont caractérisés par la condition

$$\text{ch}(\pi'(X_0), \pi'(Y_0), \pi'(Z_0)) = 1. \quad (9.87)$$

Ceux de $\text{rest } \overline{\varphi}_*(\text{PSL}(2, \mathbb{Z})) \simeq C_6$, normal dans D_6 mais non dans $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$, sont caractérisés par la condition supplémentaire $h = 0$.

Enfin les éléments de $\pi'(T_3)$, sont caractérisés par les conditions $h = 0$ et $k = 0$.

Le groupe $\pi'(T_3)$ n'est pas normal dans le groupe $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$. Il est isomorphe au groupe des chemins T_3 .

La comparaison des théorèmes [9.7](#) et [9.9](#) montre a posteriori que π' est surjectif, et que son noyau est composé des automorphismes qui s'écrivent ψ_N avec $N \in F_2$. On peut déduire de cette remarque une démonstration de la [proposition 7.4](#). En effet, on peut décomposer $\pi'(P_0)$, $\pi'(U_0)$, $\pi'(\sigma_0)$, en fonction des trois transformations $\pi'(o)$, $\pi'(t)$, $\pi'(Z_0)$, qui engendrent $\pi'(\text{Aut}(F_2)) = \text{GL}(2, \mathbb{Z})$. Ceci conduit à poser

$$\begin{aligned} P_{00} = \pi'(P_0) &= \pi'(o) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ U_{00} = \pi'(U_0) &= \pi'(t)\pi'(Z_0)\pi'(o) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \sigma_{00} = \pi'(\sigma_0) &= \pi'(Z_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9.88)$$

On trouve entre ces expressions les mêmes relations que dans la [proposition 8.1](#) du fait que π' est un morphisme de groupes. La relation complémentaire qui conduit alors à la [proposition 7.4](#) n'est autre qu'une condition qui garantit que l'on a

$$\pi'(\psi_{A_0}^{-1}) = \pi'(\psi_{B_0}^{-1}) = 1. \quad (9.89)$$

Cette condition est issue des expressions données à l'issue de la [propriété 8.1](#).

9.3.3. L'arbre de Markoff construit à partir de $GL(2, \mathbb{Z})$. Il est alors possible de transposer avec le groupe $\pi'(\bar{\Delta}) \simeq D_6$ les relations d'équivalence présentées avant. Elles donnent entre les éléments V_1 et V_2 de $GL(2, \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} V_1 \mathfrak{R}_{D_6} V_2 &\Leftrightarrow V_1 V_2^{-1} \in D_6 \Leftrightarrow V_2 \in D_6 V_1, \\ V_{1D_6} \mathfrak{R} V_2 &\Leftrightarrow V_1^{-1} V_2 \in D_6 \Leftrightarrow V_2 \in V_1 D_6. \end{aligned} \quad (9.90)$$

On définit ainsi un quotient à droite, composé des classes à droite $D_6 V_1$, où $V_1 \in GL(2, \mathbb{Z})$,

$$GL(2, \mathbb{Z}) / \mathfrak{R}_{D_6} = (GL(2, \mathbb{Z}) / D_6)_d. \quad (9.91)$$

On a de même un quotient à gauche, composé des classes à gauche $\phi_1 \bar{\Delta}$, où $\phi_1 \in \text{Aut}(F_2)$,

$$GL(2, \mathbb{Z}) / D_6 \mathfrak{R} = (GL(2, \mathbb{Z}) / D_6)_g. \quad (9.92)$$

Les deux ensembles que l'on vient de définir sont équipotents par la bijection

$$D_6 V_1 \in (GL(2, \mathbb{Z}) / D_6)_d \rightarrow V_1^{-1} D_6 \in (GL(2, \mathbb{Z}) / D_6)_g. \quad (9.93)$$

Néanmoins, ces deux ensembles sont différents car D_6 n'est pas normal dans le groupe $GL(2, \mathbb{Z})$. De plus, le [théorème 9.9](#) permet d'écrire pour tout élément $V \in GL(2, \mathbb{Z})$

$$V = \pi'(o)^h \pi'(t)^k \text{ch}(\pi'(X_0), \pi'(Y_0), \pi'(Z_0)). \quad (9.94)$$

Ceci donne

$$V \text{ch}(\pi'(X_0), \pi'(Y_0), \pi'(Z_0))^{-1} = \pi'(o)^h \pi'(t)^k \in D_6. \quad (9.95)$$

On a donc déterminé un unique élément $\text{ch}(\pi'(X_0), \pi'(Y_0), \pi'(Z_0)) \in \pi'(T_3)$ tel que

$$V \mathfrak{R}_{D_6} \text{ch}(\pi'(X_0), \pi'(Y_0), \pi'(Z_0)). \quad (9.96)$$

En d'autres termes, on obtient une nouvelle interprétation de l'arbre complet qui explique à elle seule l'ubiquité de la théorie de Markoff mentionnée dans l'introduction du présent article.

THÉORÈME 9.10. *L'arbre de Markoff complet est équipotent au quotient (à droite ou à gauche) du groupe $GL(2, \mathbb{Z})$ par son sous-groupe non normal D_6 engendré par les deux matrices,*

$$\pi'(o) = O^{-1}IO = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi'(t) = T^{-1}IO = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.97)$$

Les décompositions données pour $\pi'(o)$ et $\pi'(t)$ se vérifient de façon directe. Elles ont été calculées avec la méthode qui a conduit à la [propriété 4.2](#). On vérifie d'ailleurs que l'on a aussi

$$\pi'(s) = S^{-1}IO = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \pi'(t)^3. \quad (9.98)$$

9.3.4. Application au groupe dérivé de $GL(2, \mathbb{Z})$. Les expressions que l'on vient de donner peuvent être comparées à celles ayant servi, dans ce qui précède, à définir les éléments o, t, s générateurs de $\text{Aut}(F_2)$ à partir de trois générateurs de $GL(2, \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} o &= \text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{O}) = \text{rest } \varphi_*(O) = (B_0, A_0), \\ t &= \text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{T}) = \text{rest } \varphi_*(T) = (B_0^{-1}, A_0 B_0), \\ s &= \text{rest } \overline{\varphi}_*(\overline{S}) = \text{rest } \varphi_*(S) = (A_0^{-1}, B_0^{-1}). \end{aligned} \quad (9.99)$$

Ceci permet de considérer le morphisme de groupes utilisé implicitement auparavant

$$\pi' \circ \text{rest } \varphi_* : GL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow D_6. \quad (9.100)$$

Il est facile d'expliciter les termes suivants grâce aux méthodes présentées avant :

$$\begin{aligned} \pi' \circ \text{rest } \varphi_*(\pi'(o)) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (\pi'(t)^3 \pi'(o)), \\ \pi' \circ \text{rest } \varphi_*(\pi'(t)) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \pi'(t)^2, \\ \pi' \circ \text{rest } \varphi_*(\pi'(Z_0)) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \pi'(o). \end{aligned} \quad (9.101)$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \pi' \circ \text{rest } \varphi_*(\pi'(Y_0)) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \pi'(t)^4 \pi'(o), \\ \pi' \circ \text{rest } \varphi_*(\pi'(X_0)) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \pi'(t)^2 \pi'(o). \end{aligned} \quad (9.102)$$

Il en résulte de façon évidente que $\pi' \circ \text{rest } \varphi_*$ est surjectif à valeurs dans le groupe diédral

$$D_6 = \langle \pi'(t), \pi'(o) \mid \pi'(t)^6 = \pi'(o)^2 = (\pi'(t)\pi'(o))^2 = 1 \rangle. \quad (9.103)$$

On trouve également, et ceci montre que la restriction de $\pi' \circ \text{rest } \varphi_*$ à D_6 n'est pas injective

$$\pi' \circ \text{rest } \varphi_*(\pi'(t)^3) = \pi' \circ \text{rest } \varphi_*(-1) = \pi'(t)^6 = 1. \quad (9.104)$$

Par les mêmes méthodes, on obtient avec les matrices r_s et r_w de [12, page 86] évoquées avant

$$\begin{aligned} r_s A_0 r_s^{-1} &= A_0^{-1} B_0^{-1}, & r_s B_0 r_s^{-1} &= A_0, \\ r_w A_0 r_w^{-1} &= B_0^{-1} A_0^{-1}, & r_w B_0 r_w^{-1} &= A_0. \end{aligned} \quad (9.105)$$

Ceci donne

$$\pi' \circ \text{rest } \varphi_*(r_s) = \pi' \circ \text{rest } \varphi_*(r_w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \pi'(t)^2. \quad (9.106)$$

Il en résulte que

$$\langle r_s, r_w, -1 \mid r_s^3 = r_w^3 = -1, (-1)^2 = 1 \rangle \subset \text{Ker}(\pi' \circ \text{rest } \varphi_*). \quad (9.107)$$

Le premier groupe de cette inclusion est le groupe $[\text{GL}(2, \mathbb{Z}), \text{GL}(2, \mathbb{Z})]$, comme l'indique [12]. Il contient -1 . On a aussi au quotient un morphisme de groupes

$$\text{GL}(2, \mathbb{Z}) / [\text{GL}(2, \mathbb{Z}), \text{GL}(2, \mathbb{Z})] \rightarrow D_6. \quad (9.108)$$

Par la non commutativité du groupe D_6 , ce dernier morphisme n'est pas surjectif. Mais il permet de construire

$$\text{GL}(2, \mathbb{Z}) / [\text{GL}(2, \mathbb{Z}), \text{GL}(2, \mathbb{Z})] \rightarrow D_6 / [D_6, D_6]. \quad (9.109)$$

D'autre part, avec le [théorème 9.10](#), on trouve un autre morphisme de groupes,

$$D_6 / [D_6, D_6] \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{Z}) / [\text{GL}(2, \mathbb{Z}), \text{GL}(2, \mathbb{Z})]. \quad (9.110)$$

En explicitant et comparant ces morphismes, on obtient un isomorphisme,

$$D_6 / [D_6, D_6] \simeq \text{GL}(2, \mathbb{Z}) / [\text{GL}(2, \mathbb{Z}), \text{GL}(2, \mathbb{Z})]. \quad (9.111)$$

Le groupe dérivé $[D_6, D_6]$ de D_6 est cyclique d'ordre 3, car il comprend le terme

$$\left[(\pi'(t)^3 \pi'(o))^{-1}, (\pi'(t)^2 \pi'(o))^{-1} \right] = \pi'(t)^2. \quad (9.112)$$

Et comme le groupe D_6 possède 12 éléments [12, page 6], ceci donne au quotient la proposition suivante :

PROPOSITION 9.11. *Le groupe dérivé de $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ est un produit de groupes cycliques à deux éléments :*

$$\text{GL}(2, \mathbb{Z}) / [\text{GL}(2, \mathbb{Z}), \text{GL}(2, \mathbb{Z})] \simeq D_6 / [D_6, D_6] \simeq C_2 \times C_2. \quad (9.113)$$

On vient donc d'expliciter pour $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ l'équivalent de la [proposition 5.2](#) pour $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$. La dernière proposition s'écrit aussi avec un groupe d'homologie

$$H_1(\text{GL}(2, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \simeq \text{GL}(2, \mathbb{Z}) / [\text{GL}(2, \mathbb{Z}), \text{GL}(2, \mathbb{Z})] \simeq C_2 \times C_2. \quad (9.114)$$

Elle constitue un résultat préalable au résultat connu [34, pages 75 et 218], [36, page 193], [43, page 261], de la K -théorie indiquant que l'on a, avec $\mathrm{GL}(\mathbb{Z})$ limite inductive des groupes $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$,

$$K_1(\mathbb{Z}) \simeq H_1(\mathrm{GL}(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{GL}(\mathbb{Z}) / [\mathrm{GL}(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}(\mathbb{Z})] \simeq C_2. \quad (9.115)$$

Bibliographie

- [1] A. Blanchard, *Les corps non commutatifs*, Collection Sup : Le Mathématicien, vol. 9, Presses Universitaires de France, Vendôme, 1972 (French).
- [2] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique. Algèbre. Chapitres 1-3*, Hermann, Paris, 1970 (French).
- [3] D. A. Buell, *Binary Quadratic Forms. Classical Theory and Modern Computations*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [4] J. W. S. Cassels, *An Introduction to Diophantine Approximation*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, vol. 45, Cambridge University Press, New York, 1957.
- [5] D. E. Cohen, *Combinatorial Group Theory: A Topological Approach*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 14, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [6] M. Cohen, W. Metzler, and A. Zimmermann, *What does a basis of $F(a, b)$ look like?* Math. Ann. **257** (1981), no. 4, 435-445.
- [7] H. Cohn, *Approach to Markoff's minimal forms through modular functions*, Ann. of Math. (2) **61** (1955), no. 1, 1-12.
- [8] ———, *Representation of Markoff's binary quadratic forms by geodesics on a perforated torus*, Acta Arith. **18** (1971), 125-136.
- [9] ———, *Markoff forms and primitive words*, Math. Ann. **196** (1972), 8-22.
- [10] ———, *Markoff geodesics in matrix theory*, Number Theory with an Emphasis on the Markoff Spectrum (Provo, UT, 1991), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 147, Dekker, New York, 1993, pp. 69-82.
- [11] J. H. Conway, *The Sensual (Quadratic) Form*, Carus Mathematical Monographs, vol. 26, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1997.
- [12] H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 14, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [13] D. J. Crisp and W. Moran, *Single self-intersection geodesics and the Markoff spectrum*, Number Theory with an Emphasis on the Markoff Spectrum (Provo, UT, 1991) (A. D. Pollington and W. Moran, eds.), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 147, Dekker, New York, 1993, pp. 83-93.
- [14] T. W. Cusick and M. E. Flahive, *The Markoff and Lagrange Spectra*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 30, American Mathematical Society, Rhode Island, 1989.
- [15] W. Dicks and M. J. Dunwoody, *Groups Acting on Graphs*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 17, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [16] C. K. Gupta, *Around automorphisms of relatively free groups*, Algebra (I. B. S. Passi, ed.), Trends in Mathematics, Birkhäuser, Basel, 1999, pp. 63-74.
- [17] F. Hirzebruch and D. Zagier, *The Atiyah-Singer Theorem and Elementary Number Theory*, Mathematics Lecture Series, vol. 3, Publish or Perish, Massachusetts, 1974.

- [18] J. E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [19] D. L. Johnson, *Presentations of Groups*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, vol. 22, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
- [20] S. Katok, *Coding of closed geodesics after Gauss and Morse*, *Geom. Dedicata* **63** (1996), no. 2, 123-145.
- [21] L. Keen, *On fundamental domains and the Teichmüller modular group*, *Contributions to Analysis (A Collection of Papers Dedicated to Lipman Bers)*, Academic Press, New York, 1974, pp. 185-194.
- [22] J. Lehner, *Discontinuous Groups and Automorphic Functions*, Mathematical Surveys, vol. VIII, American Mathematical Society, Rhode Island, 1964.
- [23] R. C. Lyndon and P. E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, vol. 9, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [24] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, *Combinatorial Group Theory*, 2nd ed., Dover Publications, New York, 1976.
- [25] A. V. Malyshev, *Markov and Lagrange spectra (survey of the literature)*, *J. Soviet Math.* **16** (1981), no. 1, 767-788.
- [26] A. A. Markoff, *Sur les formes quadratiques indéfinies*, *Math. Ann.* **6** (1879), 381-406 (French), *Math. Ann.* **17** (1880), 379-399.
- [27] S. Meskin, *Periodic automorphisms of the two-generator free group*, *Proceedings of the Second International Conference on the Theory of Groups (Australian Nat. Univ., Canberra, 1973)*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 372, Springer, Berlin, 1974, pp. 494-498.
- [28] M. Newman, *Classification of normal subgroups of the modular group*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **126** (1967), 267-277.
- [29] ———, *Integral Matrices*, *Pure and Applied Mathematics*, vol. 45, Academic Press, New York, 1972.
- [30] J. Nielsen, *Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen*, *Math. Ann.* **91** (1924), 169-209 (German).
- [31] R. P. Osborne and H. Zieschang, *Primitives in the free group on two generators*, *Invent. Math.* **63** (1981), no. 1, 17-24.
- [32] S. Perrine, *L'arithmétique sur une surface percée*, *Ann. Télécommun.* **51** (1976), no. 7-8, 407-420 (French).
- [33] H. Poincaré, *Théorie des groupes fuchsien*, *Acta Math.* **1** (1882), 1-62 (French).
- [34] J. Rosenberg, *Algebraic K-Theory and Its Applications*, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 147, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [35] G. Rosenberger, *Fuchssche Gruppen, die freies Produkt zweier zyklischer Gruppen sind, und die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$* , *Math. Ann.* **199** (1972), 213-227 (German).
- [36] J. J. Rotman, *Notes on Homological Algebras*, *Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies*, vol. 26, Van Nostrand Reinhold, New York, 1970.
- [37] A. N. Rudakov, *Markov numbers and exceptional bundles on \mathbb{P}^2* , *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **52** (1988), no. 1, 99-112.
- [38] P. Schmutz, *Systoles of arithmetic surfaces and the Markoff spectrum*, *Math. Ann.* **305** (1996), no. 1, 191-203.
- [39] C. Series, *The geometry of Markoff numbers*, *Math. Intelligencer* **7** (1985), no. 3, 20-29.
- [40] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968 (French).

- [41] ———, *Cours d'Arithmétique* [Course in Arithmetics], Collection SUP : "Le Mathématicien", vol. 2, Presses Universitaires de France, Paris, 1970 (French).
- [42] ———, *Arbres, amalgames, SL_2* , Astérisque, vol. 46, Société Mathématique de France, Paris, 1977 (French).
- [43] Ch. Soulé, *K-theory and the values of zeta functions*, Algebraic K-theory and Its Applications, Proceedings of the Workshop and Symposium (H. Bass, A. O. Kuku, and C. Pedrini, eds.), World Scientific Publishing Co., Singapore, 1999, pp. 255–281.
- [44] K. Takeuchi, *Arithmetic triangle groups*, J. Math. Soc. Japan **29** (1977), no. 1, 91–106.
- [45] E. Toubiana and R. Sá Earp, *Introduction à la Géométrie Hyperbolique et aux Surfaces de Riemann*, Diderot, Paris, 1997 (French).
- [46] M.-F. Vignéras, *Arithmétique des Algèbres de Quaternions* [Arithmetic of Quaternion Algebras], Lecture Notes in Mathematics, vol. 800, Springer, Berlin, 1980 (French).

SERGE PERRINE : 5 RUE DE BON PASTEUR, 57070 METZ, FRANCE

E-mail address: serge.perrine@wanadoo.fr