



*Journ@l Electronique d'Histoire des
Probabilités et de la Statistique*

*Electronic Journ@l for History of
Probability and Statistics*

Vol 2, n°1; Juin/June 2006

www.jehps.net

Quelques échanges¹ ?

JACOB BERNOULLI², GOTTFRIED LEIBNIZ³

Résumé

De 1703 à sa mort en 1705, Jacob Bernoulli, qui tente alors d'achever la rédaction de son *Ars Conjectandi*, échange avec Leibniz plusieurs lettres qui se réfèrent à ce travail. Cet échange est présenté ici en français avec les passages des quelques autres lettres de L'Hôpital, Johann Bernoulli, et Leibniz, qui permettent de resituer les rapports de Jacob Bernoulli et Leibniz au sujet de l'art de conjecturer.

Abstract

From 1703 until his death in 1705, Jacob Bernoulli, who was in the process of writing his book *Ars Conjectandi*, exchanged a number of letters with Leibniz which referred to this work. This rally is shown here in French with passages from other letters from L'Hôpital, Johann Bernoulli, and Leibniz, which allow us to place in context the intercourse between Jacob Bernoulli and Leibniz about the art of conjecturing.

8 décembre 1692 L'Hospital⁴ à Johann Bernoulli⁵ Paris⁶

[...] je vous prie de faire mil compliments de ma part à M^r votre frere [...] j'ai beaucoup d'impatience de voir la suite de seriebus

¹ Comme le mentionne Jeanne Peiffer dans son article « Jacob Bernoulli, maître et rival de son frère Johann », Jacob qui a écrit une *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume*, publiée en 1713 avec son *Ars Conjectandi*, jouait lui même à ce jeu, ancêtre de notre « Tennis ». Les amateurs ne manqueront pas de remarquer que l'actuel « numéro un mondial » de ce sport depuis déjà plusieurs années, Roger Federer, est originaire de Bâle. Lors du colloque des 20-22 octobre 2005, Jacob Bernoulli (Serge Larrivière) et Gottfried Leibniz (Évelyne Barbin) ont échangé quelques balles, arbitrés tour à tour par Guillaume de L'Hospital et Johann Bernoulli (Norbert Meusnier : nmeusnier@univ-paris8.fr).

² Université de Bâle.

³ Conseiller intime de S.A.E de Hanovre, et Président de l'Académie Royale de Prusse.

⁴ Guillaume de L'Hôpital, 1661-1704.

⁵ [Bernoulli, 1955], p.160.

⁶ Les deux premières lettres sont écrites en français de même que celle à Bourguet du 22 mars 1714 ; toutes les autres sont écrites en latin et traduites ici par Norbert Meusnier qui remercie Martine Lelu pour ses précieux conseils de latiniste.

infinitis⁷ [...] je serois bien aise de savoir [...] quels sont ces problemes inouis dont il vous parlait dans sa dernière lettre⁸ [...] demandez lui aussi quelle est cette proposition qui est dans son livre de arte conjecturandi⁹ dont il estimait autant la decouverte que la quadrature du cercle¹⁰ [...]

1^{er} (11) février 1697 Leibniz à Thomas Burnett¹¹ Hanovre

[...] La Philosophie theorique est fondée sur la veritable analyse dont les Mathematiciens donnent des echantillons, mais qu'on doit appliquer aussi à la Metaphysique et à la Théologie naturelle, en donnant de bonnes definitions et des axiomes solides. Mais la Philosophie pratique est fondée sur la veritable Topique ou Dialectique, c'est à dire, sur l'art d'estimer les degrés de probations qui ne se trouve pas encor dans les auteurs Logiciens, mais dont les seuls Jurisconsultes ont donné des echantillons qui ne sont pas à mepriser, et peuvent servir de commencement pour former la science des preuves, propre à verifier les faits historiques, et pour donner le sens des textes. Car ce sont les Jurisconsultes qui s'occupent ordinairement à l'un et à l'autre dans les procès. Ainsi avant qu'on puisse traiter la Théologie par la methode des Etablissements comme je l'appelle, il faut une Metaphysique, ou Théologie naturelle demonstrative, et il faut aussi une Dialectique morale, et une Jurisprudence naturelle, par laquelle on apprenne demonstrativement la maniere d'estimer les degrés des preuves. Car plusieurs argumens probables joints

⁷ Il s'agit des thèses sur les séries infinies publiées en 1713 avec l'Ars Conjectandi.

⁸ Malheureusement nous ne possédons ni la lettre de Jacob à son frère ni celle de Johann à L'Hospital.

⁹ En 1692 Johann Bernoulli connaît les travaux de son frère sur l'art de conjecturer; ils en ont même discutés ensemble et Johann paraît avoir joué un certain rôle dans le développement de ses recherches (voir à ce sujet, ci-après, la lettre de Jacob à Leibniz du 3 octobre 1703 qui situe cette discussion plus de douze ans auparavant, c'est-à-dire avant octobre 1691 - le moment où Johann vient à Paris et rencontre L'Hospital - ; Johann écrit lui aussi le 1er septembre 1708 à Leibniz ([Bernoulli, 1975] p. 395) qu'il a discuté de cela avec son frère avant son départ pour la Hollande - c'est-à-dire avant le 1^{er} septembre 1695 - et que ce dernier a tenu compte de ses remarques dans son travail). Johann semble avoir annoncé à L'Hospital que son frère était en train d'écrire un livre sur ce sujet, un *de arte conjecturandi* ... et L'Hospital en parle comme si ce livre était déjà rédigé; dans l'article 151a ([Bernoulli, 1975] p.188) de son Journal scientifique, Jacob fait allusion à la première et seconde partie d'un Art de conjecturer qui contiennent ou qui contiendraient les éléments de combinatoire utiles pour la démonstration de son théorème. On peut remarquer que le titre en était alors *de arte conjecturandi* et non pas *de arte conjectandi* (ce qui d'ailleurs ne change pas le sens). Chez Jacob Bernoulli l'expression « ars conjecturandi » ne se trouve que dans cet article 151a dans la période précédant 1692, alors qu'elle est reprise par Johann Bernoulli et Leibniz en 1697 ; en 1703 Jacob emploie « ars conjectandi ».

¹⁰ Ceci est d'autant plus étonnant que c'est une expression que Jacob n'utilise que dans son Journal scientifique, toujours dans l'article 151a p. 191. On peut supposer que c'est en ces termes qu'il avait du en parler à son frère, ou qu'il lui avait fait lire l'article 151 a pour avoir son avis. On retrouve cette expression chez Fontenelle en 1705 et Saurin en 1706 ([Bernoulli, 1975] p. 393-394) et elles ne peuvent provenir que de Hermann qui a envoyé un mémoire sur Jacob à Varignon ; elle se retrouve aussi dans un article des Acta Eruditorum écrit à partir d'un mémoire de Hermann ([Bernoulli, 1975] p.394). Hermann la tient directement de Jacob ou bien il l'a lu dans le Journal scientifique comme il en va pour Nicolas Bernoulli qui l'utilise aussi dans une lettre à Montmort du 26 février 1711 ([Bernoulli, 1975] p. 398).

¹¹ [Leibniz, 1890], tome III, p. 193-194. Thomas Burnett (c. 1635-1715).

ensemble font quelques fois une certitude morale, et quelques fois non. Il faut donc une methode certaine pour le pouvoir determiner. On dit souvent avec justice que les raisons ne doivent pas estre comptées, mais pesées ; cependant personne ne nous a donné encor cette balance qui doit servir à peser la force des raisons. C'est un des plus grands defauts de nostre Logique, dont nous nous ressentons mêmes dans les matieres les plus importantes et les plus serieuses de la vie, qui regardent la justice, le repos et le bien de l'Etat, la santé des hommes et même la religion. Il y a presque trente ans que j'ay fait ces remarques publiquement et depuis ce temps j'ay fait quantité de recherches, pour jeter les fondemens de tels ouvrages ; mais mille distractions m'ont empeché de mettre au net ces Elemens Philosophiques, Juridiques et Théologiques que j'avois projetés . Si Dieu me donne encor de la vie et de la santé, j'en feray ma principale affaire. Je ne prouverois pas encor tout ce qu'on peut prouver, mais je prouverois au moins une partie tres importante, pour commencer la methode des Etablissements, et pour donner occasion aux autres d'aller plus loin. [...]

16 février 1697 Johann Bernoulli à Leibniz¹² Groningue

[...] Pour ce qui est précisément du jeu de la Bassette¹³, (j'ignorais) qu'il ait fait l'objet des réflexions d'un mathématicien ; je souhaiterais bien voir cela, car il y a déjà longtemps que mon frère travaille sur un ouvrage qu'il intitulera l'art de conjecturer dans lequel il montrera non seulement la manière de traiter mathématiquement de toutes sortes de jeux mais aussi celle de ramener au calcul les probabilités dans toutes sortes (de domaines) de la vie ; cependant je ne sais s'il n'a pas laissé ce travail inachevé [...]

5 mars 1697 Leibniz à Johann Bernoulli¹⁴ Hanovre

[...] Il me revient aussi à l'esprit ce que vous aviez écrit sur l'Art de conjecturer de Monsieur votre frère ; il n'est pas douteux que cet art ne devra pas être méprisé. D'ailleurs moi aussi j'y ai déjà réfléchi autrefois, en particulier dans la pratique de la jurisprudence et de la politique : je l'appelle la Doctrine des degrés de probabilité. Est-ce que Monsieur votre frère s'occupera aussi de ce que l'on appelle l'art de déchiffrer qui mérite en tout

¹² [Leibniz, 1863], p. 367.

¹³ Voir [Parmentier, 1995] p. 211.

¹⁴ [Leibniz, 1863], p. 377.

cas d'être traité par un mathématicien ? Pour le moment ce qui existe dans ce domaine est de peu d'importance. Je voudrais aussi que quelqu'un se manifeste pour traiter mathématiquement de tous les types de jeux¹⁵.

avril 1703 Leibniz à Jacob Bernoulli¹⁶

Berlin

[...] P.S. J'apprends que vous avez pas mal cultivé la théorie de l'estimation des probabilités¹⁷ (à laquelle j'attache une grande valeur).

Je voudrais bien que quelqu'un traitât mathématiquement des différentes sortes de jeux (dans lesquels on trouve de beaux exemples dans ce domaine). Ce serait à la fois agréable et utile et ne serait pas indigne de vous ou d'un très grand mathématicien¹⁸. Je n'ai eu à ma disposition que certaines de vos thèses ou mémoires sur ce sujet. Mais, je souhaiterais les avoir toutes.

3 octobre 1703 Jacob Bernoulli à Leibniz¹⁹

Bâle

Cher Monsieur, je voudrais bien savoir de qui vous tenez que je travaille sur la théorie de l'estimation des probabilités. Il est vrai qu'il y a des années, je me suis beaucoup intéressé à ce sujet et qu'il me semble difficile que quelqu'un y ait plus réfléchi que moi. Mon projet était en outre de rédiger un traité sur cette matière, mais à plusieurs reprises je l'ai mis de côté durant des années entières; à cause de mon indolence naturelle, très

¹⁵ Ainsi en 1697 Leibniz est-il possible que Leibniz n'ait jamais entendu parler des recherches de Jacob sur l'art de conjecturer.

¹⁶ [Bernoulli, 1993] p.109.

¹⁷ On ne peut qu'être très surpris puisque nous savons que Leibniz l'a appris -au moins- six ans auparavant, en février 1697, et que c'est Johann qui le lui a écrit ; pourquoi n'avait-il pas alors demandé à Jacob qu'elle était la nature de ses travaux puisqu'il semblait y attacher tant d'importance ? En 1697 tout se passe comme s'il ne voulait que « prendre date »... *il y a presque trente ans* écrit-il à Burnett. Entre 1687 (15[25] décembre) date de la première lettre de Jacob Bernoulli à Leibniz et cette lettre de 1703 nous connaissons 5 lettres de Jacob à Leibniz et 5 lettres de Leibniz à Jacob : 1 de 1687, 8 entre 1695 et 1697, et 1 de 1702. À chaque fois, en 1687, 1695 et 1702, c'est Bernoulli qui envoie la première lettre ; aucune de ces lettres ne fait la moindre allusion aux travaux de Bernoulli sur l'Art de conjecturer. Peut-être n'est-il pas inutile de rappeler que pendant l'été 1703 Leibniz entreprend la première rédaction de ses *Nouveaux Essais* qui ne furent publiés qu'en 1765.

¹⁸ C'est peut-être ce que Leibniz considérera en 1714 comme étant ses « exhortations ». Leibniz écrit dans les *Nouveaux essais sur l'entendement humain* : « Il serait bon que celui qui voudrait traiter cette matière poursuivît l'examen des *jeux de hasard* ; et généralement je souhaiterais qu'un habile mathématicien voulût faire un ample ouvrage bien circonstancié et bien raisonné sur toute sorte de jeux, ce qui serait de grand usage pour perfectionner l'art d'inventer, l'esprit humain paraissant mieux dans les jeux que dans les matières les plus sérieuses ». [Leibniz, 1765] p. 413.

¹⁹ [Bernoulli, 1993] p. 116-117.

fortement aggravée par une santé précaire, j'entreprends très difficilement d'écrire et souvent je souhaiterais avoir un secrétaire qui pourrait deviner complètement mes pensées que je lui aurais révélées sans insister et qui pourrait les mettre par écrit. Néanmoins, j'ai maintenant terminé la plus grande partie de mon livre, mais il me manque encore la partie principale dans laquelle je montre en outre comment appliquer les principes de l'art de conjecturer à la vie civile, morale et économique. C'est dans ce but que j'ai résolu un problème particulièrement remarquable dont la difficulté n'est pas négligeable et qui présente une utilité particulièrement grande; il y a déjà plus de douze ans, mon frère en fut d'accord, même si celui-ci, questionné à ce sujet par Monsieur le Marquis de L'Hospital, tout à son penchant à déprécier mes travaux lui dissimula la vérité²⁰. Je vous explique brièvement ce qu'il en est: on sait que la probabilité de n'importe quel résultat dépend du nombre de cas dans lequel il peut arriver ou ne pas arriver; c'est pourquoi nous savons, par exemple, dans quel rapport il est plus probable qu'avec deux dés tombent 7 plutôt que 8: mais nous ne savons pas combien il est plus vraisemblable²¹ qu'un jeune de 20 ans survive à un vieux de 60 ans plutôt que le contraire²². C'est une situation insigne que nous connaissons le nombre des cas dans lesquels peuvent arriver 7 points ou 8 points avec les dés²³; mais les nombres de ceux qui occasionnent la mort du jeune avant celle du vieux ou de celui-ci avant celui-là nous sont inconnus. C'est alors que j'en suis venu à penser que, peut-être, ce qui nous échappe a priori nous pouvons du moins le connaître par le résultat observé dans de nombreux exemples similaires; ici par exemple, après que l'expérience a été faite pour de très nombreux couples de jeunes et de vieux. Car si j'observais qu'il se trouve par exemple que le jeune a survécu mille fois au vieux et que ceci arrive seulement cinq cents fois dans la situation inverse, je pourrais assez sûrement en conclure qu'il est deux fois plus probable que le jeune survive au vieux plutôt que celui-ci à celui-là.

Certes - et c'est admirable - toute personne même très stupide, par je ne sais quel instinct naturel, saurait par elle-même et sans aucune instruction préalable que plus on fait d'observations moins grand est le danger de s'écarter du but²⁴; cependant ce fait même

²⁰ Voir ci-dessus la lettre du 8 décembre 1692 et la note 9.

²¹ Bernoulli semble utiliser le terme « vraisemblable » dans un contexte plutôt « subjectif » et celui de « probable » dans un contexte plutôt « objectif »; avec un « probable » qui a déjà à cette époque un sens quantitatif quand le « vraisemblable » est qualitatif, il paraît indiquer ici la possibilité d'une résorption du qualitatif dans le quantitatif, du vraisemblable au probable.

²² Mot à mot en latin : « celui-ci à celui-là ».

²³ Voir ici la lettre de Leibniz à Bourguet du 22 mars 1714 pour comprendre que même dans cette situation privilégiée le dénombrement ne va pas de soi ! Pour Leibniz, il y aurait 3 cas dans les deux situations...

²⁴ Quelle illusion sur le bon sens « naturel » ! Qui plus est, les discussions et controverses entre tenants de « bonnes mesures » en petit nombre et de nombreuses mesures, existent à cette époque. Derrière cette

de démontrer exactement et géométriquement ce n'est pas à la portée de tout le monde. Mais ceci n'est pas tout ce que je veux: on se demande en plus si le nombre d'observations croissant continuellement il en va de même de la probabilité, de telle sorte qu'étant donnée une probabilité quelconque il me soit plus probable que j'ai trouvé, à la fin, la vraie raison²⁵ entre les nombres des cas plutôt qu'une autre différente de la vraie; ou si le Problème a, pour ainsi dire, son asymptote, c'est-à-dire si j'atteins à la fin un certain degré de probabilité au delà duquel il ne m'est pas possible que me soit plus probable d'avoir découvert la vraie raison? Car s'il en est ainsi il en sera fait de notre entreprise d'explorer les nombres des cas par des expériences; mais s'il en va comme je l'ai dit en premier, nous découvrirons avec certitude leur raison a posteriori aussi bien que si elle nous était connue a priori. Et cela même que j'ai découvert, c'est qu'il en va comme cela; de là, dès lors, je peux déterminer combien il faut faire d'observations pour que ce soit cent fois, mille fois, dix mille fois etc. plus vraisemblable (de telle sorte qu'à la fin il y ait comme une certitude morale) que la raison entre les nombre des cas que j'obtiens de cette façon est légitime et innée; ce qui dans la pratique de la vie civile suffit pour régler nos conjectures dans n'importe quelle matière contingente non moins scientifiquement que dans les jeux de hasard; ce en quoi consiste seulement, je pense, toute la prudence du Politique. Je ne sais, cher monsieur, si vous considérez qu'il se trouve quelque chose de solide dans ces spéculations? Si c'est le cas je vous serai très reconnaissant si vous me procurez de la matière de type juridique dont vous estimez qu'il puisse être profitable de faire usage. Dernièrement, j'ai trouvé dans l'imprimé "Les Extraits Mensuels de Hanovre" une citation d'un certain traité que je ne connais pas du Pensionnaire de Witt²⁶ *von Subtiler des valeurs der Leib=Renten*²⁷. Celui-ci contient peut-être certaines choses ayant à voir avec cela²⁸? S'il en est ainsi je désirerais vivement que quelqu'un m'en fasse une copie [.....]

26 novembre 1703 Leibniz à Jacob Bernoulli²⁹ Hanovre

affirmation de Bernoulli il y a peut-être une référence à la pratique de la moyenne du « l'un portant l'autre ».

²⁵ Le vrai rapport.

²⁶ Johan de Witt (1625-1672) mathématicien et homme d'État hollandais qui dirigea la politique républicaine des États de Hollande de 1653 à 1672 ; se heurtant aux Orangistes après l'invasion de la Hollande par Louis XIV en 1672, il fut mis à mort par la foule avec son frère Cornelis à La Haye.

²⁷ Il s'agit du petit traité sur les rentes viagères rédigé par de Witt en 1671 à l'intention de ses collègues du gouvernement pour leur montrer à quel prix elles devaient être vendues pour remplir les caisses de l'État à un « juste prix ».

²⁸ C'est-à-dire : des choses qui ont à voir avec mes recherches sur la façon d'établir quantitativement les conjectures dans le domaine de la vie civile, soit en matière juridique ou politique.

²⁹ [Bernoulli, 1993] p. 123-124.

L'estimation de la probabilité est très utile; toutefois en matière juridique et politique, et en général, ce n'est pas tant comme le résultat d'un calcul minutieux que par l'énumération soigneuse de toutes les circonstances. Que vous ayez traité de ce sujet, je me souviens l'avoir appris en premier non pas de Monsieur votre frère mais d'une autre personne. Quand nous estimons les probabilités empiriquement par des suites d'expériences, vous cherchez à savoir si cette méthode permet finalement d'obtenir une estimation parfaite. Et vous écrivez que ceci vous l'avez obtenu. Il me semble qu'il y a là une difficulté, parce que les *contingences*³⁰ ou ce qui dépend d'une infinité de circonstances ne peuvent être déterminées par un nombre fini³¹ d'expériences; la nature sans doute a ses habitudes, provenant du retour des causes, mais ce n'est $\omega\sigma\ \epsilon\pi\iota\ \tau\omicron\ \pi\omicron\lambda\upsilon$ ³². C'est pourquoi, ne peut-on pas objecter qu'une nouvelle expérience puisse s'écarter un tant soit peu de la loi de toutes les précédentes, du fait de la variabilité même des choses³³? De nouvelles maladies se répandent souvent sur le genre humain et par conséquent quelque soit le nombre de morts dont vous avez fait l'expérience ce n'est pas pour autant que vous avez établi les limites des choses de la nature au point qu'elle ne puisse en varier dans le futur. Lorsque à partir d'un certain nombre d'observations nous recherchons la ligne d'une comète, nous supposons que celle-ci est du genre des coniques ou d'un autre des plus faciles. Étant donné un nombre quelconque de points, on peut trouver un nombre infini de lignes qui passent par eux. Je le démontre ainsi: je prétends (ce que l'on peut démontrer³⁴) qu'étant donné un nombre quelconque de points il est possible de trouver une certaine ligne régulière qui passe par eux. Supposons qu'on l'ait trouvée et que ce soit A. Prenons maintenant un autre point au milieu des premiers, mais en dehors de cette ligne; alors, par les points donnés initialement et le nouveau point passe une ligne, ce qui peut être obtenu d'après le même postulat. Cette ligne est nécessairement différente de la première mais passe néanmoins par ces mêmes points donnés en premier. Et comme le point peut varier à l'infini, de même des lignes différentes les unes des autres seront possibles à l'infini. Or, à ces points peuvent être comparés les cas observés et à la ligne

³⁰ Voir [Parmentier, 1995] p. 26-33, pour la conception de Leibniz des rapports entre contingence et infini.

³¹ Remarquons que Bernoulli ne prétend pas y arriver en un nombre fini d'expériences. Leibniz poursuit sa propre pensée... pour finalement être d'accord en définitive sur l'aspect « à peu près » de la démarche de Bernoulli.

³² ...« que la plupart du temps » ; expression aristotélicienne...

³³ La remarque de Leibniz est très judicieuse, car la méthode de Bernoulli n'est valable que dans un contexte stationnaire (ce qu'il répond d'ailleurs).

³⁴ Voir le Discours de métaphysique et les remarques de Parmentier mentionnées dans la note 30.

régulière les lois ou les estimations que l'on doit tirer des cas. Cependant quoiqu'on ne puisse pas avoir empiriquement une estimation parfaite, ce n'est pas pour autant qu'une estimation empirique ne serait pas utile et suffisante en pratique. Celui qui rédigeait les extraits mensuels de Hanovre le fit en ma présence. L'opuscule du Pensionnaire de Witt est court; il s'y sert d'estimations connues par la possibilité de cas équivalents et, à partir de là, il montre quelle est la rente viagère suffisante à payer par un Hollandais pour un capital donné. C'est pour cela qu'il l'avait rédigé en néerlandais pour que l'équité fût manifeste aux yeux du public.

20 avril 1704 Jacob Bernoulli à Leibniz³⁵

Bâle

Pour ce qui est de la Doctrine des probabilités en matière juridique, elle a besoin non seulement de l'énumération des circonstances mais aussi du raisonnement et du calcul comme ceux auxquels nous sommes déjà habitués dans les sorts des jeux de hasard que l'on doit supputer, et c'est ce que m'apprennent diverses questions d'assurance, de rente viagère, de contrat de dot, de jouissance anticipée et autres; je montrerai clairement ce qu'il en est le moment venu. En outre votre embarras devant ma façon empirique de déterminer la raison entre les nombres des cas ne pèse pas plus sur ces exemples - dans lesquels d'ailleurs elle ne peut pas reposer sur ces nombres - que sur ceux pour lesquels ils peuvent aussi être connus a priori. Or cela, j'ai soutenu que je pouvais le démontrer; et, il y a plus de douze ans, mon frère a vu la démonstration et il l'a approuvée³⁶. Pour que vous compreniez plus clairement, et c'est ce que je veux, je vous donne un exemple: je suppose que dans une urne une certaine quantité de cailloux ont été dissimulés au regard, des blancs et des noirs, que le nombre des blancs est le double du nombre des noirs mais que vous ne connaissez pas cette raison et qu'on veut la déterminer par des expériences. A cette fin vous prélevez un caillou après l'autre (en remettant tour à tour chacun de ceux qui ont été prélevés avant que vous preniez le suivant, de telle sorte que le nombre de cailloux ne diminue pas dans l'urne) et vous observez si c'est un blanc ou un noir que vous avez pris. Dès lors (ayant pris deux raisons aussi voisines que l'on veut de la raison double, une plus grande, l'autre plus petite, par exemple 201:100 et 199:100) je dis que je détermine scientifiquement le nombre des observations

³⁵ [Bernoulli, 1993] p. 128-129.

³⁶ Voir la note 9. Avec son frère les rapports sont tendus (voir plus loin), mais vis à vis de Leibniz, Jacob peut considérer que c'est un argument d'autorité et de compétence, de poids.

dans le cas où vous entreprenez qu'il vous soit dix fois ou cent fois ou mille fois etc. plus probable que la raison du nombre de fois dans lesquelles vous prélevez un blanc au nombre de fois dans lesquelles vous prélevez un noir soit disposée à tomber entre ces limites de la raison double 201:100 et 199:100 plutôt qu'en dehors; au point que vous pouvez être à la fin moralement certain que la raison saisie par les expériences se rapprochera autant qu'on voudra de la vraie raison double. Si maintenant vous substituez à l'urne le corps humain d'un vieux ou d'un jeune, qui renferme l'aliment des maladies comme l'urne les cailloux, vous pourrez déterminer de la même façon par des observations, combien celui-là est plus proche de la mort que celui-ci. Et il ne sert à rien de dire que le nombre des maladies auxquelles chacun des deux a été exposé, est infini; c'est justement le cas. On sait cependant qu'il y a des degrés dans l'infini et que la raison d'un infini à un autre peut même s'exprimer par un nombre fini précisément ou autant que cela suffit dans la pratique. Si dans le cours du temps les maladies se multipliaient, il faudrait absolument entreprendre de nouvelles observations; et il est certain, j'en ai fait la remarque³⁷, que celui qui voudrait évaluer la limite de la vie des ancêtres antédiluviens sur les observations actuelles de Londres, Paris et ailleurs prises pour ordinaires, celui-là s'écartera considérablement de la vérité. L'exemple de la trajectoire d'une comète que l'on recherche à partir de quelques observations de son lieu est presque *απροσδιονυσον*³⁸, et jamais je n'utiliserais ce thème pour exposer mon propos³⁹; d'ailleurs cette contrainte ne remet pas en cause ce que je fais puisqu'on ne peut nier que cinq points qui sont tous observés comme étant situés sur une parabole je soupçonne alors que l'avenir de la parabole est plus grand que si seulement 4 points eussent été observés. Même si, sans doute, il y a une infinité de lignes qui passent par ces 5 points, cependant outre ces lignes en nombre infini il y en a une infinité d'autres, ou plutôt une infinité d'infinités qui passent seulement par les 4 points précédents, mais pas par le 5^{ème}, et qui tout autant sont exclues par la 5^{ème} observation⁴⁰. Je reconnais néanmoins que toute conjecture qui est extraite d'observations de ce genre sera extrêmement légère et périlleuse⁴¹ sinon que dans ce cas on regarde comme concédé qu'on a recherché une ligne parmi

³⁷ Peut-être veut-il dire : « j'en tiens compte »... car dans l'*Ars Conjectandi* on retrouve la phrase qui suit, mot pour mot, à la fin du chapitre IV de la Quatrième partie où il répond, sans le citer nommément, à Leibniz.

³⁸ Hors de propos.

³⁹ C'est-à-dire, « pour l'établissement de mon théorème »... Effectivement, c'est une « critique » dont il ne tiendra pas compte dans l'*Ars Conjectandi*.

⁴⁰ Bernoulli renverse l'argument de Leibniz pour montrer qu'il est non seulement « hors de propos » mais en outre « faux »... ce qui fait beaucoup !

⁴¹ À proprement parler « glissante » : c'est-à-dire que l'on court le risque de s'éloigner de la bonne voie.

celles du genre des courbes simples⁴²; et assurément, c'est ce que je considère comme tout à fait proche de la vérité puisque nous constatons que la nature suit partout les voies les plus simples. D'après votre description je comprends que le traité de Jan de Witt écrit en néerlandais contient des choses qui concernent avant tout mon but. Aussi je vous demande instamment, cher Monsieur, de m'envoyer en prêt votre exemplaire du livre quand vous pourrez, puisque je me suis soucié en vain de le rechercher partout à Amsterdam⁴³. Quant à moi, je vous le renverrai loyalement à la prochaine foire de Francfort en même temps que les 4ème et 5ème parties de mes propositions sur les *Séries infinies* qui ont été imprimées et discutées très récemment⁴⁴.

2 août 1704 Jacob Bernoulli à Leibniz⁴⁵

Bâle

Je recevrai bientôt de l'abbé Varignon deux exemplaires de l'Histoire de l'Académie des Sciences pour l'année 1701 que je dois vous faire parvenir ainsi qu'à mon frère⁴⁶: je veillerai à y joindre pour vous la quatrième et la cinquième parties de mes Thèses sur les Séries infinies; réciproquement j'attends de vous, pour ces jours de foire, l'écrit du Pensionnaire de Witt, puisse-t-il se faire que vous ayez la possibilité de le joindre à ce que vous avez écrit autrefois au sujet des Conditions⁴⁷. Je voudrais aussi que vous me procuriez d'autres exemples de legs conditionnels⁴⁸, et aussi pour ce qui est des rentes constituées sur plusieurs vies auxquelles vous vous entendez⁴⁹, que vous éclairiez cela par un exemple; car en ce qui concerne les questions juridiques je n'en ai jamais abordé franchement l'étude. Quand bien même ils seraient infinis, avec un nombre fini d'expériences nous pouvons déterminer la raison entre les nombres des maladies, non pas précisément mais autant que

⁴² Il y a accord entre Bernoulli et Leibniz sur l'approximation dans la pratique (voir la lettre précédente) mais une approximation dont la valeur s'appuie sur le principe fondamental de la simplicité maximale des hypothèses (le « rasoir d'Occam ») pour Bernoulli.

⁴³ Il n'y a pas très longtemps que Bernoulli connaît l'existence de ce traité (voir sa lettre du 3 octobre 1703). À qui d'autre qu'à son frère, qui est alors à Groningue, a-t-il pu demander cela ? Il est censé être fâché avec lui, mais nous verrons plus loin qu'il y a néanmoins des échanges entre les deux frères à propos de livres (voir la lettre qui suit). Cependant juste après la mort de Jacob, ou en même temps, en 1705, lorsque Leibniz demande à Johann de rechercher l'ouvrage, ce dernier lui répond qu'il ne l'a pas trouvé, sans faire allusion à une précédente recherche...

⁴⁴ C'est à l'occasion de la soutenance de baccalauréat de Nicolas Bernoulli.

⁴⁵ [Bernoulli, 1993] p. 132-133.

⁴⁶ Voir la note 43.

⁴⁷ Le *De conditionibus* de 1665.

⁴⁸ Ce type de contrat est à rapprocher des « jouissances anticipées » qu'il évoquait dans sa lettre du 20 avril 1704... Bernoulli semble ici répondre à une lettre de Leibniz que nous n'avons pas, se situant entre celle du 20 avril 1704 et celle-ci du 2 août.

⁴⁹ Encore une indication sur le contenu de la lettre perdue de Leibniz, car Leibniz n'a rien publié sur la question (voir [Parmentier, 1995]) et Jacob ne peut que l'avoir appris dans cette lettre.

cela suffit en pratique en s'approchant toujours plus près jusqu'à ce que l'erreur devienne imperceptiblement petite⁵⁰; et c'est d'ailleurs ce qui est bien connu dans la Géométrie elle-même: ainsi, la raison du diamètre à la circonférence, même si elle ne peut être déterminée exactement, sinon par la suite infinie des nombres cycliques de Ludolph, néanmoins Archimède la circonscrit par des limites suffisantes à l'usage et réduites à 7:22 et 71:223. Je montre un exemple de l'Art de conjecturer dans certains jeux de hasard, en particulier dans le jeu de paume dont j'ai amplement traité; mais dans la plupart des jeux de cartes je n'y arrive pas, encore moins dans les jeux de pions, de par l'immense variété des configurations que les lancers répétés des jetons⁵¹ peuvent admettre.

15 octobre 1704 Jacob Bernoulli à Leibniz⁵²

Bâle

Cher Monsieur, comme je comprends de vos dernières lettres que ma réponse à vos lettres précédentes n'est pas parvenue entre vos mains, je vous en envoie une copie. Pour ce qui concerne Monsieur Hermann⁵³, il vous répondra lui-même. J'espérais recevoir de votre part pour la foire votre traité de Monsieur de Witt, mais ce fut en vain. Monsieur Mencke pourra peut-être s'en charger au moment de la foire de Leipzig par l'intermédiaire de marchands.

28 novembre 1704 Leibniz à Jacob Bernoulli⁵⁴ Berlin

La dissertation du Pensionnaire de Witt, ou devrais-je dire l'Opuscule imprimé sur les rentes viagères, un ouvrage assez bref, se trouve sans doute au milieu de mes papiers, mais alors que je

⁵⁰ C'est toute l'ambiguïté, évoquée par Leibniz, de la démarche de Bernoulli : sa démonstration concerne un modèle à causes en nombre fini mais pour Leibniz le contingent renvoie à l'infini. Avec des causes en nombre infini, c'est une analogie qui intervient ; mais surtout, Bernoulli va faire remarquer à Leibniz qu'il ne s'agit pas d'un nombre infini, mais d'un très grand nombre... fini (« immense plutôt qu'infini » écrit-il dans l'*Ars Conjectandi*).

⁵¹ « pions » et « jetons »... de quels jeux s'agit-il ? Là encore, il paraît répondre à des remarques de Leibniz.

⁵² [Bernoulli, 1993] p. 134.

⁵³ Jakob Hermann (1678-1733).

⁵⁴ [Bernoulli, 1993] p. 135-137.

voulais vous l'envoyer, je n'ai pas encore pu le retrouver. Cependant, je vais faire en sorte de tomber dessus, dès qu'il me sera possible de l'arracher à cette maison où il se cache. Du reste, il ne contient rien de bien nouveau pour vous. Ma double dissertation sur les Conditions fut imprimée par l'Académie de Leipzig, si je me souviens bien, en 1665 . Deux ans après, corrigée, elle fut refusée, ainsi que certaines autres de mes petites réflexions juridiques par celle de Nuremberg où j'avais permis qu'elle s'en aille en pérégrinations à Altorf , mais les exemplaires se perdirent et de ce fait c'est avec difficulté que par la suite j'en ai obtenu un en Allemagne, rapporté par hasard par un ami. J'ai l'intention d'en préparer un jour une nouvelle édition.

[...]

Dans certaines choses qui ne sont pas bien liées ensemble (du moins pour ce qui est de notre faculté de les appréhender) il n'est pas certain que nous nous approchions plus près de la vérité moyenne de l'ensemble en augmentant le nombre des données, par exemple l'accroissement des âges inhabituels pour les observations des maladies, même si la prudence commande d'y porter attention, mais dans une série, telle la Ludolphine, on s'approche toujours plus en continuant⁵⁵. Dans les jeux de pure raison (comme ceux d'échecs et d'amoncellement⁵⁶) ou les jeux de semi-hasard comme ceux de cartes que les Espagnols appellent *Hombre*⁵⁷ ou ceux de dés que nous traduisons par *Verkehren*⁵⁸, même s'il n'est pas facile de définir par le calcul *combien* l'espoir de la victoire convient mieux à l'un qu'à l'autre des choix, cependant, la plupart du temps ce qu'on peut définir par la raison c'est *celui des deux* pour lequel cela convient le mieux autant qu'on peut l'apprécier à partir de ce que permettent les données. C'est pourquoi nous voyons des joueurs intelligents décider de ce qui vaut mieux⁵⁹, à peu près comme dans la chose militaire ou en médecine, en se servant d'examens attentifs plus nombreux qu'approfondis, ainsi qu'il en va de l'art⁶⁰.

⁵⁵ « ludolphine » renvoie à Ludolph van Ceulen.

⁵⁶ « de tas, de pions... » ? S'agit-il du « Tric-trac » ? On trouve chez Montmort un « jeu des tas » qui n'est pas un jeu de hasard pur et dans lequel on fait des tas de cartes ; ce jeu est en rapport avec celui de l' « ombre » ou de l' « homme » (voir la note suivante). Ce jeu est peut-être celui auquel fait allusion Leibniz. Voir [Montmort, 1708], p. 281-282.

⁵⁷ Jeu de l' « Hombre » : un jeu de cartes connu en Espagne (« homme » en espagnol signifie « homme ») vers la fin du XVIème siècle.

⁵⁸ ?

⁵⁹ « ce qui vaut le mieux » ; il s'agit d'un comparatif avec deux possibilités qui devient alors un superlatif.

⁶⁰ C'est-à-dire avec la connaissance que procure l'expérience pratique intuitive plus que rationnelle.

28 février 1705
Bâle

Jacob Bernoulli à Leibniz⁶¹

Vous allez recevoir sans délai l'Histoire de l'Académie des Sciences de Paris en même temps que les 4^{ème} et cinquième parties des Propositions sur les Séries, le tout à la fois de Monsieur Varignon lui-même, à moins que par hasard vous ne les ayez déjà reçus. Réciproquement je vous prie instamment de penser à me faire parvenir le traité de Monsieur de Witt si depuis le temps il est tombé entre vos mains; car tout ce qu'il contient ne peut pas ne pas être tout à fait nouveau pour moi; il en va de même pour les vôtres et tout ce qu'il vous est arrivé de publier sera toujours pour moi le bienvenu si vous jugez qu'il convient que je prenne connaissance de certains d'entre eux; je n'en ai aucun sinon l'*Art de la Combinatoire et la Nouvelle Physique des Hypothèses*⁶².

[...]

En ce qui concerne les vraisemblances⁶³ et leur accroissement par l'augmentation du nombre des observations, il en va tout à fait comme je l'ai écrit et je suis certain que vous en apprécierez la démonstration lorsque je l'aurai publiée.

avril 1705 Leibniz à Jacob Bernoulli⁶⁴ Hanovre (?)⁶⁵

Je compte pour rien ceux de mes écrits, dont vous me dites que vous l'avez, sur l'Art de la Combinatoire et la Physique des Hypothèses; en effet il s'agit presque de naïvetés composées pendant la prime jeunesse dont la première aura paru en 1666 et la dernière, je pense, en 1670⁶⁶. Ce sont à vrai dire divers arguments de philosophie et de Mathésis que j'ai extraits de mon journal. Je n'ai pas encore pu assez rechercher dans mes papiers l'écrit du Pensionnaire de Witt; je ne doute cependant pas de pouvoir finir par le retrouver où il aura traîné. Mais vous y trouverez difficilement quelque chose de nouveau puisqu'il s'appuie tout au

⁶¹ [Bernoulli, 1993] p. 138 et 141.

⁶² Il s'agit en fait de deux livres distincts. Voir la lettre suivante.

⁶³ À nouveau les « vraisemblances » quand il s'agit d'estimations a posteriori... Voir la note 21.

⁶⁴ [Bernoulli, 1993] p. 143 et 147.

⁶⁵ Date et lieu d'expédition précis : inconnus.

⁶⁶ Voir la note 62.

long sur ces mêmes fondements qui avaient déjà été utilisés par d'autres savants, en particulier Pascal dans le Triangle Arithmétique et Huygens dans sa dissertation sur le Hasard, à savoir de se servir de la moyenne arithmétique entre des incertains égaux. C'est ce même fondement qu'utilisent les paysans lorsqu'ils estiment les prix des domaines et les curateurs du fisc lorsqu'ils fixent les revenus moyens des provinces du prince quand se présente un fermier⁶⁷.

[...]

Vous recevrez l'opuscule de de Witt dès que j'aurai pu le retrouver⁶⁸.

22 mars 1714 Leibniz à Bourguet⁶⁹

Vienne

[...] L'art de conjecturer est fondée (sic) sur ce qui est plus ou moins facile, ou bien plus ou moins faisable, car le latin *facilis* dérivé a *faciendo* veut dire faisable mot à mot : par exemple avec deux dés, il est aussi faisable de jeter douze points, que d'en jeter onze, car l'un et l'autre ne se peut faire que d'une seule manière ; mais il est trois fois plus faisable d'en jeter sept parce que cela se peut faire en jetant 6 et 1, 5 et 2, et 4 et 3 ; et une combinayson icy est aussi faisable que l'autre⁷⁰. Le Chevalier de Méré (Auteur du Livre des Agremens) fut le premier qui donna occasion à ces méditations, que Messieurs Pascal, Fermat et Hugins pousuivirent. Monsieur le Pensionnaire de Wit et Monsieur Hudde ont aussi travaillé là dessus depuis. Feu Monsieur Bernoulli a cultivé cette matière sur mes exhortations⁷¹. On estime encore les vraisemblances a posteriori, par l'expérience, et on doit y avoir recours au défaut des raisons a priori : par exemple, il est également vraisemblable que l'enfant qui doit naistre soit garçon ou fille, parceque le nombre des garçons et des filles se trouve à peu près égal dans ce Monde⁷².

Bibliographie

⁶⁷ Voir *Les nouveaux essais sur l'entendement humain*, [Leibniz, 1765] p. 412-413.

⁶⁸ Demande faite à Johann Bernoulli... Voir la note 43.

⁶⁹ [Leibniz, 1890], tome III, p. 569-570.

⁷⁰ « facile » : voir la conception de Leibniz chez Parmentier; voir aussi l'exemple pris dans *Les nouveaux essais sur l'entendement humain* avec 7 et 9, [Leibniz, 1765] p.413.

⁷¹ Voir la note 18.

⁷² Le sex ratio, seul exemple qui devient à l'époque un leit-motiv; voir [Meusnier, 1999].

- [Bernoulli, 1975] J. Bernoulli : *Die Werke von Jakob Bernoulli*, Band.3, Wahrscheinlichkeitsrechnung, ed. by B.L. van der Waerden, Birkhäuser, Basel, 1975.
- [Bernoulli, 1993] J. Bernoulli : *Der Briefwechsel von Jakob Bernoulli*, ed. by D. Speiser, Birkhäuser, Basel, 1993.
- [Bernoulli, 1955] J. Bernoulli : *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Band 1, Birkhäuser, Basel, 1955.
- [Leibniz, 1765] G.W. Leibniz : *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, Garnier-Flammarion, Paris, 1966.
- [Leibniz, 1863] G.W. Leibniz : *Mathematische Schriften*, éd. Par C.I. Gerhardt, 1-7, Halle, 1855-1863.
- [Leibniz, 1890] G.W. Leibniz : *Die philosophischen Schriften*, éd. Par C.I. Gerhardt, 1-7, Berlin, 1875-1890.
- [Meusnier, 1987] N. Meusnier : *Jacques Bernoulli et l'Ars Conjectandi*, IREM, Rouen, 1987. Contient une traduction en français de la quatrième Partie de l'*Ars Conjectandi*.
- [Meusnier, 1999] N. Meusnier : *Dr Arbuthnot et Mr Hidden*, Cahiers du C.A.M.S n°162, Série Histoire du Calcul des Probabilités et de la Statistique n° 36, Paris, 1999.
- [Montmort, 1708] Anonyme : *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, Quillaud, Paris, 1708. Réimprimé par Chelsea, New York, 1980.
- [Parmentier, 1995] G.W. Leibniz : *L'estime des apparences. 21 manuscrits de Leibniz sur les probabilités, la théorie des jeux, l'espérance de vie. Texte établi, traduit, introduit et annoté par Marc Parmentier*, Vrin, Paris, 1995.