Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique

Electronic Journ@l for History of Probability and Statistics

Vol 2, n°1; Juin/June 2006

www.jehps.net

L´ARS CONJECTANDI: LA GÉOMÉTRIE DU HASARD VERSUS LE PROBABILISME MORAL

Jesus SANTOS DEL CERRO[1]

Résumé

Le modèle des jeux de hasard s'avère très utile en tant que modèle théorique, mais si l'on souhaite l'appliquer à des questions civiles, morales et économiques il demande l'utilisation d'une notion qui n'est autre que celle de la probabilité basée sur des arguments utilisée par les casuistes et les théologiens moraux. Les premiers apportent l'objet de la géométrie du hasard, tandis que les autres apportent la notion qui sert à évaluer le degré d'approbation de réaliser une action de la vie quotidienne. La fusion d'un nouveau calcul, la géométrie du hasard, et un vieux concept, la probabilité théologique et philosophique, a été consacrée dans l'oeuvre fondamentale de Jacques Bernoulli, l´Ars Conjectandi.

Abstract

The games of chance model is very useful as theoretical model. This model requires the probability based upon arguments approach when is used for analysing civil, moral or economic matters. The probability based upon arguments approach has been defined by casuistry and has been used by moral theology in order to estimate the degree of approbation of a common life action. The combination of a new calculus**,** the geometry of chance, and the theological and philosophical probability has been delimited in Ars Conjectandi, the main book writen by Jacques Bernoulli.

[1] Facultad de Derecho y Ciencias Sociales. Universidad de Castilla-La Mancha. Ronda de Toledo s/n 13071 Ciudad Real. España. jesus.scerro@uclm.es

I. INTRODUCTION

Le principal objectif de ce travail est d'analyser une question qui, peut-être, a été reléguée pendant longtemps, à cause d'une *«légende noire»* dont l'introduction dans la discussion scientifique supposerait un enrichissement et une efficacité pour la compréhension de la création du Calcul des Probabilités moderne. Celle-ci peut se résumer essentiellement à cette phrase écrite par Lorraine Daston: «*la doctrine jésuite du "probabilisme", a été employée par les casuistes des XVIème et XVIIème siècles pour absoudre presque toutes les transgressions, par la justification qu'un théologien quelconque les avait pardonnées»*. Il ne faut pas nier que des abus ont été commis, comme, d'ailleurs, ils ont été commis ou peuvent encore être commis par l'utilisation de n'importe quel outil ou de n'importe quelle théorie scientifique. Cependant, ceux qui pourraient être mis sur le compte du probabilisme, ont dévié l'attention de la contribution conceptuelle que celui-ci a supposé pour la création du Calcul des Probabilités moderne.

Nous tenterons d'analyser, en accordant le mérite qui se doit à la doctrine morale du probabilisme, l'origine même de la création de la théorie moderne de la probabilité que suppose la fusion d'un nouveau calcul, la géométrie du hasard, et un vieux concept, la probabilité théologique et philosophique, consacrée dans l'oeuvre fondamentale de Jacques Bernoulli dont est célébré, en cette année 2005, le troisième centenaire de sa mort .

II. CE QUE REPRÉSENTE, DANS LA LITTERATURE, L'*ARS CONJECTANDI* PAR RAPPORT AU CONCEPT DE PROBABILITÉ

L'idée très significative défendue par Schneider, consistant à penser que la théorie moderne des probabilités n'a pu se développer que lorsque le concept de probabilité utilisé en philosophie et en théologie, principalement par certains docteurs espagnols des XVIème et XVIIème siècles, a été mis en rapport avec le contenu de ce que Pascal a appelé «géométrie du hasard». Cette connexion a été établie par le génie de Jacques Bernoulli dans son célèbre *Ars Conjectandi.*

> «C*ependant la possibilité que ce développement surgisse a pu se présenter seulement après que le concept probabilitas, utilisé en philosophie et en théologie, ne soit mis en rapport avec le calcul des proportions du hasard.»*[2]

Depuis la création de la géométrie du hasard par Pascal et Fermat, principalement, en dehors des contributions de Huygens et Caramuel, il ne s'est produit aucun apport important jusqu'à ce que l'oeuvre posthume de Jacques Bernoulli ne soit publiée en 1713. Montucla s'exprime ainsi à propos de cette oeuvre:

> «*Cependant, Jacques Bernoulli entreprenoit dans le silence un ouvrage bien plus étendu, et approfondissoit bien davantage cette théorie. (...) Dans l'ouvrage intitulé:* Ars Conjectandi*, Bernoulli ne se bornoit pas à quelques questions analogues à celles de Fermat et de Pascal; mais il s´en créoit une foule d´autres de plus en plus difficiles, qu'il analysoit et résolvoit. Il tentoit enfin d'appliquer cette théorie aux événements moraux et politiques.*»[3]

La dernière phrase de la citation précédente de Montucla doit être comprise comme une tentative originale d'application de la nouvelle géométrie du hasard à des événements moraux. Cependant le concept de probabilité a été, par ailleurs, utilisé par les docteurs casuistes et probabilistes espagnols sur des questions de morale. La raison de l'apparition de la doctrine morale probabiliste, parmi les auteurs espagnols, provient du besoin d'appliquer les principes généraux de la conduite morale aux cas singuliers, car ces derniers contenaient des caractéristiques particulières, dont la principale conséquence est que nous n'avons pas la certitude absolue que l'application d'un principe général concret soit licite.

> «*les docteurs espagnols tentèrent de répondre de façon adéquate et sincère à ce problème* [celui du rapport qui existe entre les concepts et les lois universelles et

[2] [SCHNEIDER, 1976] , p. 138.
[3] [MONTUCLA, 1802], p. 391.

la réalité complexe singulière]. *Il s'agit d'établir le rapport correct entre les principes généraux de la conduite morale et les cas singuliers.*»[4]

La probabilité est considérée comme un attribut de l'opinion. Si l'on reprend les mots de Bartolomé de Medina, auteur qui a exposé pour la première fois, de façon explicite, la doctrine du probabilisme moral, une opinion est considérée probable lorsque convergent simultanément en elle deux genres de principes, à savoir:

> «*que des hommes très sages l'ont adoptée et la confirme par de bons arguments, d'où l'on déduit que, selon cette opinion, elle n'a rien d'improbable*»[5]

Gabriel Vázquez interprète et développe la doctrine formulée par Bartolomé de Medina, en introduisant deux concepts, ou plutôt, en définissant et en délimitant deux caractéristiques plus ou moins clairement exposées dans celle-ci.

> «*Donc cette décision, selon ce qui a été expliqué dans le chapitre précédent, doit être comprise dans le sens où, même si l'on considère cette opinion comme la plus probable, et dans le désir qu'elle soit suivie pour des principes intrinsèques, un homme docte, par contre, s'appuyant sur des principes extrinsèques, peut suivre l'opinion contraire, défendue par la majorité, et qu'elle lui serve pour se former un jugement singulier qui lui fasse considérer ainsi son acte licite.*»[6]

Or, Vázquez établit aussi qu'on ne doit pas juger une opinion probable seulement pour des raisons extrinsèques, car il faut que convergent des raisons intrinsèques ou des raisons internes de poids.

> «*ainsi il faut évidemment se demander pour quelle raison on peut considérer une opinion comme probable, pour que nous puissions, en la suivant, aller à l'encontre de notre opinion; et en premier lieu, il faut qu'elle soit suffisamment probable, pour la suivre à l'encontre de la nôtre, et, dans ce but, il faut qu'elle*

[4] [GOMEZ CAMACHO, 1998], p. 62.
[5] [MEDINA, 1578], p. 309.
[6] [VAZQUEZ, 1631], p.294.

soit non seulement l'opinion d'un Docteur, même si elle est unique en son espèce, car si cette opinion d'un seul individu, par ses propres fondements [fondements intrinsèques] *ne me semble pas probable mais contraire, et que je ne l'approuve que par l'autorité qu'il lui est accordée* [fondements extrinsèques] *d'un seul Docteur, il ne me semble pas que l'on doive la tenir pour probable.*»[7]

Jacques Bernoulli est décédé en 1705 avant que son oeuvre principale sur la théorie de la probabilité voit le jour, fait qui se produisit en 1713. Cependant, même avant sa publication, le manuscrit de Jacques Bernoulli avait suscité de grandes expectatives, et on pouvait imaginer ce que l'*Ars Conjectandi* pourrait représenter dans le développement de la nouvelle théorie. Au moment où Fontenelle a écrit l'éloge à Jacques Bernoulli, l'*Ars Conjectandi* n'avait pas encore été publié, et les principales contributions de cet auteur à la théorie de la probabilité étaient méconnues. La partie la plus importante de l'éloge de Fontenelle se limite à d'autres matières des mathématiques comme la théorie des séries, la théorie des courbes, le calcul intégral, etc., ne laissant pas plus d'une page à la théorie de la probabilité où prédominent deux points principaux: 1. La réalisation d'une systématisation et d'un approfondissement du problème des partis, déjà analysés par Pascal, Huygens et Caramuel, bien que Fontenelle ne mentionne pas le cistercien espagnol; 2. Elle fait référence, de façon peu précise, à une application de la probabilité au domaine moral et politique.

«Quelques *grands mathématiciens, et principalement messieurs Pascal et Huygens, ont déjà proposé et résolu des problêmes sur cette matière* [problème des partis]*, mais n'ont fait que l'effleurer; et M. Bernoulli l'embrassoit dans une plus grande étendue, et l'approndissoit beaucoup davantage. Il la portoit même juxqu'aux choses morales et politiques, et c'est-là ce que l'ouvrage doit avoir de plus neuf et de plus surprenant.*»[8]

La réception de l'oeuvre *Ars Conjectandi* dans le monde scientifique a eu une répercussion très forte dans le domaine du Calcul des Probabilités à cause des nouveaux résultats et perspectives qu'elle supposait comme la systématisation et l'enrichissement de ce que l'on connaissait déjà. Ainsi l'explique Gouraud:

---

[7] [VAZQUEZ, 1631], Ibidem, p. 295.
[8] [FONTENELLE, 1994], p. 120.

«cet Ars Conjectandi *qui changeait la face du Calcul des Probabilités et dont l'originalité du génie, captiva, dès qu´il parut, l'attention universelle (...) Un cri unanime s' éleva dans le monde de la science et annonça à la postérité que l'Analyse des hasards allait entrer dans une ère nouvelle et commençait définitivement sa fortune.»*[9]

La notion de probabilité épistémologique que propose Jacques Bernoulli est basée sur l'analyse des arguments, qui selon Shafer, représentait l'élaboration d'une théorie non additive de la probabilité, a été absorbée par la conception aléatoire des jeux de hasard dont la suprématie a représenté la prééminence de la théorie additive de la probabilité. Les successeurs de Bernoulli ont maintenu, consciemment ou inconsciemment, l'identification des concepts de probabilité et de sort, jusqu'au point où le terme probabilité a eu un fort rattachement aux aspects aléatoires, principalement pour ce qui est des jeux de hasard. D'autre part, le développement de l'analyse mathématique a contribué au fait que la théorie aléatoire de la probabilité déplace, jusqu'à presque l'annuler, ce que l'on appelle la probabilité épistémologique.

«*Depuis la mort de Bernoulli, le mot probabilité a conservé son sens large épistémologique dans les langues européennes. Mais le rapport avec les jeux de hasard est rapidement venu dominer la pensée de ceux qui tentèrent de comprendre la probabilité épistémologique numériquement.»*[10]

Cependant, à la mort de Bernoulli, cette conception large de la probabilité, qui incluait non seulement la théorie des jeux de hasard mais aussi la probabilité épistémologique basée sur les arguments, a pratiquement disparu, se réduisant à la probabilité aléatoire. Ceci a pu se faire grâce aux successeurs immédiats de Bernoulli, Montmort et de Moivre qui fixèrent particulièrement leur attention sur le champ restreint de la théorie des jeux de hasard.

«*D'ailleurs, Bernoulli a été succédé par deux mathématiciens, Montmort et de Moivre, qui se sont fort intéressés à la théorie des jeux de hasard et qui n'ont vu,*

[9] [GOURAUD, 1848], pp. 38-39.
[10] [SHAFER, 1978b], p. 341.

dans l'analyse de la probabilité de Bernoulli, qu'une licence pour donner ce nom à leur objet d'étude.»[11]

Un autre auteur, Hailperin, souligne, de son côté, le peu d'intérêt qu'a suscité l'une des parties les plus innovatrices de l'*Ars Conjectandi*. Le passage suivant se réfère concrètement au chapitre 3 de la IV Partie, où l'on parle de l'idée de la probabilité fondée sur des arguments.

«*Cependant, malgré son caractère innovateur, elle a été largement négligée. Par exemple, Todhunter (1865, 70-71) y consacre trois brefs paragraphes ; van der Waerden, dans l'introduction au Volume 3 des oeuvres complètes de Bernoulli, ne le mentionne pas dans son commentaire de* l'Ars Conjectandi, *Maistrov en 1974 cite une phrase de celui-ci. Nous n'avons pas jusqu'à Hacking 1974 et Shafer 1978 une analyse appréciable.*»[12]

Shafer, par ailleurs, précise l'idée précédente, en affirmant que le retard de la publication de l'*Ars Conjectandi* et la diffusion préalable que certaines de ses idées ont connu en dehors du contexte de cette oeuvre, sous forme d'éloges posthumes envers Jacques Bernoulli, ont pu être responsables de la réduction de la conception au sens large de la probabilité numérique consacrée dans l'*Ars Conjectandi.* De Moivre, par exemple, dans son oeuvre *The Doctrine of Chances* publiée en 1718, développe une nouvelle terminologie où prédominent des termes tels que probabilité et la définition classique de probabilité considérée comme ratio ou quotient de cas favorables et de cas possibles, qui n'étaient pas présents dans la terminologie utilisée dans son *De Mensura Sortis* apparu en 1711, deux ans avant la publication de l'*Ars Conjectandi*.

«*Après l'apparition de l'* Ars Conjectandi*, de Moivre a développé une nouvelle terminologie. Il a adopté l'idée de Bernoulli selon laquelle les probabilités sont des nombres compris entre zéro et un, et a pris comme axiome la règle qui exprime que la probabilité d'un événement est le quotient du nombre de cas favorables et du nombre total de cas.»*[13]

[11] [SHAFER, 1978b], Ibidem, p. 341.
[12] [HAILPERIN, 1996], p. 51.
[13] [SHAFER, 1978b], Op. cit. p. 344.

III. LA PREMIÈRE PARTIE DE L'*ARS CONJECTANDI*: LE NOUVEAU CALCUL

Le livre de Bernoulli est divisé en quatre parties. Les deux points que souligne Fontenelle représentent, brièvement, l'objet de deux des quatre parties de l'*Ars Conjectandi*, c'est-à-dire la première et la quatrième respectivement. La seconde est une étude sur la théorie des combinations et des permutations et la troisième constitue l'application des résultats précédents à un ensemble de jeux de hasard.

La première partie de l'*Ars Conjectandi* est composée du petit livre de Huygens *De Ratiociniis in Ludo Aleae* et du commentaire de celui-ci que réalise Jacques Bernoulli. C'est précisément dans les commentaires de Jacques Bernoulli à ce traité, qu'apparaît, pour la première fois, le terme probabilité (probabilitas) dans l'*Ars Conjectandi.*

> «*Ainsi pour calculer les sorts on ne doit tenir aucun compte des jeux passés mais seulement des jeux futurs; vu que pour aucun des jeux suivants il n´y a une* ***probabilité*** *(*probabilitas) *plus grande que la fortune tende a favoriser ceux que´elle favorisa auparavant plutôt que ceux qui furent très infortunés.»*[14]

Dans l'esprit de Bernoulli il y a le désir de systématiser la théorie exposée par Huygens dans son bref traité. Ce même traité contient une proposition, qui ensuite conduira Bernoulli à un quotient qui coïncide avec la définition classique de probabilité. La proposition dont nous parlons est la III et dit ceci:

> «*Si le nombre de cas dans lesquels il m´échoit* ***a*** *est p, que par ailleurs le nombre de cas par lesquels il m´échoit* ***b*** *est q, à supposer que tous les cas aient une inclinaison égale, mon espérance vaudra* $\frac{pa+qb}{p+q}$*.»*[15]

[14] [BERNOULLI, 1713 a], p.24. Note 1: Les citations de la première partie de l' *Ars Conjectandi* feront référence à cette traduction française. Note 2: les caractères gras nous appartiennent.
[15] [HUYGENS, 1657], Ibidem, p.14.

De cette proposition Bernoulli obtient un corollaire qui, bien que simple et immédiat, n'en est pas moins intéressant. Effectivement, le Corollaire 1, que nous transcrivons, s'obtient en faisant **b**=0.

> «*1. De là, il résulte d'abord que s'il m´échoit* ***a*** *dans p cas et rien dans q cas, mon espérance sera* $\frac{pa}{p+q}$*.»*[16]

Dans la recherche d'une proposition générale, de ce corollaire il obtient une valeur de l'espérance coïncidant avec la valeur de la probabilité définie comme quotient de cas favorables et de cas possibles, bien qu'il ne l'associe pas explicitement au vocable probabilité.

> «*Alors, si quelqu'un entreprend de réussir quelque chose la première fois, il est clair qu'il a* ***b*** *ou* ***a-c*** *cas pour le réussir, c'est-à-dire pour obtenir le dépôt –que ce soit désormais 1- et* ***c*** *cas pour obtenir 0; ainsi d´après le Corollaire 1 de la Proposition III son sort est* $\frac{a-c}{a}$*.»*[17]

Ayant considéré préalablement **a** comme tous les cas possibles divisés en deux groupes, qui comprennent chacun **b** et **c** cas, de telle manière que **a**=**b**+**c**, ce qu'il définit est le quotient que nous identifions actuellement avec le concept classique de probabilité, bien que Bernoulli ne l'appelle pas probabilité mais d'abord chance.

> «*On sait que le sort de celui qui l´entreprend* [le dépôt] *au premier coup est* $\frac{a-c}{a}=\frac{b}{a}$*.»*[18]

Dès le moment où Bernoulli définit ce quotient, comme un cas particulier de la définition de l'espérance de Huygens, il l'utilise continuellement, en la dénommant chance et espérance indistinctement. En plus cette nouvelle définition va lui permettre de résoudre les problèmes posés par Huygens de façon plus rapide et plus générale.

[16] [BERNOULLI, 1713a], Ibidem, p.18.
[17] [BERNOULLI, 1713a], Ibidem, p. 60.
[18] [BERNOULLI, 1713a], Ibidem, p. 62.

Effectivement, cet auteur résout non seulement tous les problèmes posés par Huygens, en s'aidant de cette définition de manière beaucoup plus rapide et facile, mais aussi d'autres problèmes qui s'avèrent insolubles ou très compliqués par la méthode du mathématicien hollandais.

IV. LA QUATRIÈME PARTIE DU *ARS CONJECTANDI*: UN VIEUX CONCEPT

La quatrième partie de l'*Ars Conjectandi*, en dehors du célèbre théorème qui porte le nom de son auteur, contient la conjonction systématique définitive de la probabilité philosophique et théologique et de la probabilité aléatoire dérivée de la «géométrie du hasard». Cette partie représente le cadre de référence fondamental de la conceptualisation moderne de la probabilité. En elle fusionnent magistralement le nouveau calcul créé par Pascal et Fermat et les élaborations du probabilisme moral et de la tradition philosophique classique.

Bernoulli, non sans une certaine influence de la *Logique de Port-Royal* et de ses prédéceseurs, établit un cadre conceptuel et systématique de la probabilité. En premier lieu il distingue deux types de certitude: objective et subjective. De la première il dit:

> «*Tout ce qui bénéficie sous le soleil de l'être ou du devenir, passé, présent ou futur, possède toujours en soi et objectivement une certitude totale.*»[19]

De la certitude subjective ou considérée par rapport aux personnes il écrit:

> «*Ce qui, par révélation, raison, sensation, expérience, témoignage de nos propres yeux ou autrement est tellement évident que nous ne pouvons aucunement douter de son existence présente ou future, et jouit d'une certitude totale et absolue.*»[20]

---

[19] [BERNOULLI, 1713b], p. 14. Note: Les citations de la partie IV de l' *Ars Conjectandi* feront référence à cette traduction française.
[20] [BERNOULLI, 1713b], Ibidem, p. 16.

Pour Bernoulli la probabilité est un phénomène subjectif dans le sens où tout ce qui n'a pas une certitude subjective tombe dans le domaine du probable. Selon Bernoulli lui-même:

> «Tout l*e reste* [ou ce qui revient au même, tout ce dont on obtient une certitude subjective absolue] *acquiert dans nos esprits une mesure moins parfaite, plus ou moins grande, selon que les probabilités sont plus ou moins nombreuses qui nous persuade qu'une chose est, sera ou a été.»*[21]

Si nous observons avec précision les facteurs qui permettent d'atteindre la certitude subjective et, à défaut, de ne pas posséder plus d'un certain degré de probabilité, nous pouvons apprécier les dettes continues avec des élaborations théoriques préalables.

Nous analyserons, d'abord, de façon succincte, quelques idées que nous élargirons un peu plus tard. Il faut insister sur le fait que la conception de base bernoullienne de la probabilité est épistémologique et subjective et qu'en plus elle reprend la tradition philosophique et théologique probabiliste précédente, comme nous pouvons le vérifier dans les fondements sur lesquels prend appui la probabilité de cet auteur. Précisément, si nous concevons la probabilité comme quelque chose sur quoi nous n'obtenons pas de certitude subjective absolue, pour Bernoulli, mesurer la probabilité consistera à réaliser une évaluation du nombre et du poids des arguments, en faveur ou contre le phénomène dont on veut calculer la probabilité. En effet:

> «*Les probabilités sont estimées d'après le nombre et aussi le poids des arguments qui de quelque manière prouvent ou révèlent que quelque chose est, sera ou a été.»* [22]

Pour Shafer, Jacques Bernoulli a été le premier auteur qui a contribué substantiellement à établir le rapport de la théorie des jeux de hasard et de la probabilité, concept qui jusqu'à présent avait été réservé à des questions de Théologie morale et philosophiques.

---

[21] [BERNOULLI, 1713b], Ibidem, p. 16.
[22] [BERNOULLI, 1713b], ibidem, p. 22

«*L'idée de calculer des probabilités d'arguments est, à première vue, complètement épistémologique et complètement distinct de la chance ou de la probabilité aléatoire. Mais Bernoulli propose de réaliser de tels calculs en utilisant la méthode de Huygens : il analyse un argument en distinguant des cas qui «sont également possibles ou qui peuvent se présenter avec une égale facilité », et donc de calculer les probabilités proposées par l'argument qui utilise la même formule que Huygens utilise pour calculer des espérances. Il introduit aussi sa loi des grands nombres comme l'un des outils pour déterminer la facilité avec laquelle les différents cas se produisent.*»[23]

Dans son article «*The Bernoulli*» de l'Encyclopedia of Statistical Science, Shafer souligne le rapport entre les termes probabilité et chance, en insistant sur l'origine théologique et philosophique du terme probabilité, dont Jacques Bernoulli s'est inspiré.

«*Au cours de la longue tradition de la pensée philosophique et théologique dont Jacques Bernoulli a été l'héritier, l'idée de probabilité n'a pas été étroitement liée à l'idée de chance. Pascal, Fermat et Huygens n'ont pas même utilisé le mot probabilité dans leurs écrits sur la chance ; la probabilité, comme les scolastiques le savaient, était un attribut de l'opinion, un produit de l'argument ou de l'autorité. La théorie que Jacques a établi dans la IV Partie de l'*Ars Conjectandi *a essayé de remplir ce vide. Ce fut pour tenter d'appliquer à la nouvelle théorie des jeux de hasard la probabilité en maintenant l'idée que la probabilité est basée sur des arguments.*»[24]

Il semble que ce rapport entre les deux concepts a eu du succès auprès de ses lecteurs. Il n'est pas probable, par contre, qu'il prétende parmi les lecteurs de la *Logique* que la théorie relative aux jeux de hasard s'applique à la probabilité épistémologique.

Shafer affirme, d'autre part, que Bernoulli n'a pas inventé le concept de probabilité basé sur des arguments mais que celui-ci était déjà contenu dans le concept philosophique de probabilité. Les auteurs probabilistes, après Bartolomé de Medina, soulignent qu'une

[23] [SHAFER, 1978b], Op. cit., pp. 325-326.
[24] [SHAFER, 1982a], p. 217.

opinion est probable quand elle prend appui sur l'autorité ou sur des arguments ou des raisons de poids tel que nous l'avons déjà expliqué précédemment.

Bernoulli utilise la même distinction conceptuelle des différents types d'arguments qui servent à évaluer la probabilité qui apparaît dans la *Logique de Port-Royal* et qu'avaient auparavant défini de façon implicite, Bartolomé de Medina et, explicitement, Gabriel Vázquez:

> «*Les arguments eux-mêmes peuvent être intrinsèques, c'est-à-dire artificiels et choisis parmi les lieux topiques de la cause , de l'effet, du sujet, de l'adjoint, de l'indice ou de toute autre circonstance qui semble avoir un lien quelconque avec ce qu´il faut prouver, ou bien extrinsèques et hors de l´art, c'est-à-dire issus de l'autorité et du témoignage des hommes.»*[25]

Bernoulli a conscience que pour évaluer la probabilité d'un événement il faut tenir compte aussi bien des arguments en faveur, que des arguments contre, ou plus exactement, et selon notre langage actuel nous dirions, des cas favorables et des cas défavorables.

> «*Il ne faut pas seulement tenir compte de ceux* [arguments] *qui viennent appuyer ce qui est à prouver, mais aussi de tout ce qui peut-être invoqué en sens contraire; en sorte qu´ après avoir été bien mise en balance l´une des deux alternatives l´emporte manifestement.»*[26]

Il est évident que Bernoulli est influencé par la *Logique de Port-Royal* au point qu'il participe à la polémique du probabilisme moral ; c'est du moins ce qu'il nous semble observer dans les mots suivants où il prend parti, aux côtés d'Arnauld et de Nicole, pour le probabilisme défendu par l'espagnol Tirso González.

> «*Dans les affaires incertaines et douteuses il nous faut suspendre nos actions, en attendant que brille une plus grande lumière; mais si l'occasion d´agir ne souffre aucun retard, entre deux solutions il nous faudra toujours choisir celle*

[25] [BERNOULLI, 1713b], Op. cit., p .22.
[26] [BERNOULLI, 1713b], Op. cit., p. 24.

qui semble mieux adaptée, plus sûre, mieux réfléchie et plus probable, même si l´une ni l´autre ne mérite en fait ces adjectifs.»[27]

Nous observons ainsi que Bernoulli reçoit les répercussions de la polémique maintenue à propos du probabilisme moral qui s'est déroulé entre jésuites et jansénistes, et qui inonda et divisa toute la société française, en particulier, et européenne, en général.

Dans la première partie de l'*Ars Conjectandi* nous avons vu comment il définissait la probabilité d'un événement relatif à un jeu de hasard comme le quotient des cas favorables à celui-ci et des cas totaux. Une définition qui se présente, en principe, comme particulière et spécifique, lui donne un caractère de généralité comme nous pouvons l'apprécier dans cette citation:

> *«De ce qui a été dit jusqu'à présent, il est clair que la force de ce qui prouve, qui donne son efficacité à l´argument, dépend d'une multitude de cas où il peut exister ou ne pas exister, révéler ou ne pas révéler, ou même révéler le contraire; et il est maintenant clair que le degré de certitude, ou probabilité, qu´ engendre cet argument, peut être tiré de ces cas grâce à la Doctrine de la première Partie, tout comme on cherche d´habitude les sorts des joueurs dans les jeux de hasard.»*[28]

Malgré ce qui a déjà été dit, Bernoulli n'oublie pas la nature différente que présentent certains types d'événements, plus concrètement, la différence fondamentale qui existe entre événements relatifs aux jeux de hasard et ceux concernant «*l'oeuvre de la nature»* ou «*l'arbitre des hommes»*. Des premiers nous pouvons dire qu'en général, nous connaissons les possibles résultats élémentaires du jeu (comme par exemple dans le cas du lancement d'un dé) et il est raisonnable de supposer que chacun d'entre eux a le même penchant ou facilité de se produire. Sous ce schéma, il est juste de définir *a priori* la valeur de la probabilité de n'importe quel événement associé à ce jeu. Tandis que dans les phénomènes relatifs «*à l'oeuvre de la nature*» ou «*à l'arbitre des hommes*», non seulement on méconnaît la plupart des situations ou des résultats qui peuvent se

[27] [BERNOULLI, 1713b], Op. cit., p. 26.
[28] [BERNOULLI, 1713b], Op. cit., p. 30.

présenter mais il est aussi difficile de supposer que tous auront la même possibilité de se produire, d'où il échappe à notre intelligence la possibilité d'établir une analogie avec le modèle des jeux de hasard. Ceci a pour conséquence qu'on devra recourir à d'autres solutions, de telle sorte que pour ces cas-là, on envisage l'évaluation de leurs probabilités *a posteriori*, c'est-à-dire, en tenant compte de phénomènes similaires dans le passé. Cette classification explicite de la probabilité *a priori et a posteriori* a eu depuis, une importance, une vigueur et une influence considérables.

> «*On en est ainsi venu a ce point que pour former selon les règles des conjectures sur n´importe quelle chose il est seulement requis d´une part que les nombres de cas soient soigneusement déterminés, et d'autre part que soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres. Mais c'est ici enfin que surgit une difficulté, nous semble-t-il: cela peut se voir à peine dans quelques très rares cas et ne se produit presque pas en dehors des jeux de hasard (...). En effet lorsqu´ il s'agit de tous les autres résultats, dépendant pour la plupart soit de l'oeuvre de la nature soit de l'arbitre des hommes, cela n´a pas du tout lieu. (...)*
>
> *Mais à la vérité ici s´offre à nous un autre chemin pour obtenir ce que nous cherchons. Ce qu´il n'est pas donné d'obtenir* a priori *l'est du moins* a posteriori*, c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l´issue de nombreux exemples semblables; car on doit présumer que, par la suite, chaque fait peut arriver ou ne pas arriver dans le même nombre de cas qu´il avait été constaté auparavant, dans un état de choses semblables, qu´il arrivait ou n´arrivait pas.*»[29]

Notons comme fait significatif que, quelques années plus tard, 'sGravesande accepte désormais la distinction précédente et, bien sûr, utilise la justification que fournit le Théorème de Bernoulli. Il n'est pas toujours possible, nous dit cet auteur, de connaître la probabilité en observant la nature des choses, que nous appelons probabilité *a priori*, c'est la raison pour laquelle on utilise une autre méthode pour calculer la probabilité, qui n'est autre que celle de l'observation d'événements, que nous appelons probabilité *a posteriori* ou basée sur l'expérience passée.

«*Quand, pour découvrir ces nombres, on ne fait attention qu'aux idées des choses, on se trouve souvent très embarassé. (...) On se sert, dans ces occasions, d'une autre méthode, pour déterminer la Probabilité, savoir, en examinant les évènemens mêmes.*»[30]

En admettant cette probabilité *a posteriori*, il établit la condition, toujours polémique, selon laquelle de nombreuses observations ont été obtenues au préalable. («*si beaucoup de boules ont été extraites au préalable*»). Sur ce point il utilise comme justification le théorème de Bernoulli que nous venons de citer.

«Car on a *démontré mathématiquement qu'en augmentant le nombre des observations, le danger de se tromper devenoit petit, au point de s´evanouir presque à la fin* [dans le cas de l'urne qu'il pose comme exemple, cela signifie qu'il ne reste presque pas de boules dans l'urne].»[31]

Quant à la question relative au recours à l'expérience dans le calcul de certaines probabilités, Bernoulli lui-même reconnaît explicitement la source où il puise.

«*Cette manière empirique de déterminer par expérience les nombres de cas n'est ni neuve ni insolite. Ce n´en est point une autre que prescrit le Célèbre Auteur de l'Art de penser, Homme d'une grande finesse et d'un grand talent, dans les chapitres 12 et suivants de la dernière Partie et c´est la même que tous observent constamment dans la pratique quotidienne.*»[32]

En ce sens, comme le signale Bernoulli, c'est quelque chose d'évident et même les êtres les plus stupides admettent que plus le nombre d'observations est élevé, «*moindre sera le danger de s'éloigner de l'objectif*». Cependant, Bernoulli va nettement plus loin, et c'est précisément ce qui donne lieu au fameux théorème du même nom. En résumé, et d'après Bernoulli lui-même:

---

[29] [BERNOULLI, 1713b], Op. cit., pp. 40-42.
[30] ['SGRAVESANDE, 1748b], p. 85.
[31] ['SGRAVESANDE, 1748b], ibidem., p. 86.
[32] [BERNOULLI, 1713b], Op. cit., pp. 44.

«Il reste alors à examiner par la suite quelque chose que peut-être personne n´a jusqu'à maintenant rencontré même en y pensant. Il reste assurément à chercher si, en augmentant le nombre des observations, nous augmentons continuellement la probabilité d'atteindre le rapport réel entre les nombres de cas qui font qu'un événement peut arriver et le nombre de ceux qui font qu´il ne peut arriver, de sorte que cette probabilité dépasse enfin un degré quelconque donné de certitude.»[33]

V. CE QUI PRÉCÈDE ET CE QUI SUIT INMÉDIATEMENT L´ARS CONJECTANDI À PROPOS DU CONCEPT DE PROBABILITÉ

Cinq ans après la mort de Jacques Bernoulli, Arbuthnot a publié un petit article où nous avons observé que les termes *chance* et *probabilité* étaient mis en rapport bien qu'avec des sens consciemment différenciés. Trois ans après la publication de ce célèbre article est apparu l'*Ars Conjectandi*; ainsi jusqu'à ce jour on n'avait pas eu connaissance du contenu complet du livre le plus célèbre des Bernoulli ; en effet on n'avait pu connaître que quelques fragments sur certaines des questions traitées et résolues. Il s'avère donc nécessaire d'analyser plus en détail aussi bien les oeuvres qui précèdent la publication de l'*Ars Conjectandi* que celles qui la suit, pour bien prendre conscience de la portée de la répercussion des exposés et des résultats de cette oeuvre. Nous observerons particulièrement dans l'essai d'Arbuthnot la distinction explicite adoptée entre probabilité et chance. Cet auteur essaie de démontrer que le Pouvoir Divin ou la Divine Providence est le responsable en dernier ressort de l'équilibre qui existe entre les naissance d'hommes et de femmes. Arbuthnot assimile la naissance au lancement d'un dé équilibré à deux faces. Raisonnant selon ce qui est connu sous le nom de modèle binomial, il fixe la probabilité des naissances à partir des données dont il dispose, à savoir celles des naissances à Londres durant la période comprise entre 1629 et 1710. Par l'utilisation du modèle binomial dont on a parlé, il conclut que l'équilibre des naissances entre les deux sexes obéit à l'intervention d'un Pouvoir Divin. Cet essai ne passa pas inaperçu et suscita même une certaine polémique où étaient impliqués des

[33] [BERNOULLI, 1713b], Op. cit., pp. 44.

auteurs tels que ‘sGravesande, Nicolas Bernoulli, etc., qui ne manquaient pas de lutter pour leurs idées et de les défendre dans leurs articles.

Pour en revenir à l’idée précédente, nous devons dire qu’Arbuthnot applique le terme *chance* aux événements concernant les jeux de hasard:

> «*son lot est la somme de toutes les chances, celles-ci correspondant au coefficient du terme central ou moyen de la puissance 2 élevé à un exposant égal au nombre de dés»*[34]

Cependant, il accorde au terme probable un sens d’approuvabilité, dans ce cas, par l’intervention de la Nature et, en définitive du Pouvoir Divin. Voici les fragments où l’auteur utilise le terme probable.

> «*Mais il est fortement improbable (si le seul hasard en disposait ainsi) qu’ils atteignent les extrêmes. La cause attribuée à la Nature n’est pas plus probable dans l’égalité des naissances, que celle que nos premiers parents représentent au début le même nombre par sexe (...); il n’est pas probable non plus que vingt femmes soient également fécondées par un homme que par vingt.* [35]

Comme nous l’avons signalé, au moment de la publication de cet article l’oeuvre de Jacques Bernoulli n’avait pas encore paru; d’autre part celui-ci était décédé depuis déjà cinq ans. À partir de cette date (1705) de grandes expectatives étaient apparues sur la nouveauté du contenu de l’*Ars Conjectandi*, et certains membres de la famille Bernoulli avaient échangés avec d’autres scientifiques des informations sur des questions traitées dans cette oeuvre. Ceci peut expliquer que les deux termes (chance et probabilité) soient apparus dans les oeuvres qui précèdent celle de Bernoulli avec des sens parfaitement différenciés, fait qui s’estompera peu à peu à mesure que l’influence de l’*Ars Conjectandi* rapprochera les signifiés des mots *chance* et *probable* jusqu’à ce qu’ils soient définitivement considérés comme des synonymes, comme par exemple dans le célèbre article de Thomas Bayes de 1763.

[34] [ARBUTHNOT, 1710], p. 187.
[35] [ARBUTHNOT, 1710], Ibidem, pp. 188-189.

«*Par chance j'entends la même chose que par probabilité*»[36]

Nous voyons que cinquante ans après la publication de l'*Ars Conjectandi*, Bayes conçoit les termes probabilité et chance comme synonymes. Cependant, ce processus de confluence ou d'approximation des signifiés de ces mots n'a été ni spontané ni immédiat.

Quelques années plus tard, d'après Hald, en 1715, 'sGravesande a écrit sur le même sujet que l'auteur anglais. Par ailleurs, en 1712, comme le déclare Hald dans son livre *A Histoty of Probability and statistics and Their Applications before 1750*, Nicolas Bernoulli, lors de sa visite à la Haye a pris contact avec 'sGravesande. Cet auteur hollandais manifeste dorénavant la grande influence des conceptualisations exposées par Jacques Bernoulli, bien que l'on retrouve aussi des vestiges du caractère épistémologique du concept de probabilité qui procède, à son tour, de la conception reprise, en définitive, de *La Logique de Port-Royal* et des oeuvres des probabilistes espagnols. La première notion de probabilité qu'il utilise a un caractère épistémologique étant donné qu'il considère que la probabilité dépend du degré de connaissances que l'on a sur un certain phénomène, auquel cas la probabilité augmentera à mesure que le degré de connaissance sur le phénomène en question augmente.

> «*On peut voir, par ce que nous venons de dire, que la Probabilité ne regarde pas les choses mêmes, mais sur la connoissance que nous en avons; & qu´on peut la considérer comme une quantité, qui va en croissant, depuis le plus petit degré de connoissance, jusques à la persuation entière.*»[37]

Il distingue trois grandes catégories de la connaissance de ces phénomènes, suivant que l'on dépasse la semi-certitude, suivant que l'on possède la semi-certitude ou suivant que l'on n'atteigne pas la semi-certitude: respectivement probable ou vraisemblable, doute et incertitude.

Il expose aussi que la probabilité, quelquefois, se base sur les choses mêmes et, d'autres fois, sur l'argumentation sur laquelle les affirmations se fondent, manifestant ainsi une

[36] [BAYES, 1763], p. 376.
[37] ['SGRAVESANDE, 1748b], Op. cit., p. 83.

influence évidente de ce que, d'abord, les docteurs espagnols, et ensuite les auteurs de *la Logique de Port-Royal*, ont dénommé les arguments intrinsèques ou internes et extrinsèques ou externes.

Aussi bien dans un cas que dans l'autre, la probabilité va être déterminée par le rapport des cas possibles et des cas favorables.

> «Et l*a Probabilité sera à la Certitude, comme le nombre des cas, dans chacun desquels l'Événement proposé a lieu, au nombre de tous les cas possibles.*»[38]

En outre, Schneider souligne une dynamique dont le résultat a été le rapport établi entre le concept de probabilité philosophico-théologique et la «géométrie du hasard». Le centre principal de cette dynamique a été la discussion concernant le probabilisme entre jansénistes et jésuites. À ce propos, Schneider signale que:

> «*La nécessité d'une telle qualification procède de la dispute sur le probabilisme entre Jansénistes et Jésuites. Cet affrontement a été célèbre dans les lettres provinciales de Pascal à partir de 1656/7.*»[39]

Cependant, selon Gouraud, les efforts et résultats de Pascal et Fermat ainsi que ceux de Huygens n'ont eu de répercussion que plus tard.

> «*Ces circonstances* [Gouraud parle entre autres du silence de leurs fondateurs, le peu d'intérêt qu'ont manifesté Pascal et Fermat pour publier leur correspondance, etc.] *firent qu´il ne se divulgua presque rien du nouveau calcul, et qu´il demeura d´abord à peu près inconnu. (...) L´ insuccès de Huyghens ne fut pas exceptionnel. Des publications beaucoup plus importantes encore que la sienne et qui auraient dû éclairer enfin les géomètres sur l'importance de l'analyse qu'il avait fait connaître, ne furent pas plus heureuses.*»[40]

---

38 ['SGRAVESANDE, 1748b], Op. cit., p. 85.
39 [SCHNEIDER, 1976], Op. cit. p. 138.
40 [GOURAUD, 1848], Op. cit., pp. 12-14.

Après avoir sombré dans l'oubli pendant presque cinquante ans, Jacques Bernoulli a contribué non seulement à faire progresser cette matière mais aussi à systématiser tout ce qu'on en connaissait. C'est du moins ce que pense Gouraud, bien que nous devions signaler que presque 15 ans avant la mort de Bernoulli, celui-ci avait écrit presque toute son oeuvre sur la probabilité, comme le remarque Meusnier:

> «*l'*Ars Conjectandi *aurait pu être publié dès 1689; rien ne manquait, sinon ce qu'il va vainement rechercher pendant 15 ans jusqu'à la fin de sa vie, les applications: "... j'ai déjà terminé la plus grande partie de mon livre- écrit-il à Leibniz le 3 octobre 1703-, mais il me manque encore la partie essentielle dans laquelle je montre comment les bases de l'art de conjecturer peuvent s'appliquer à la vie civile, morale et politique"* »(C'est le but qu'il s'était fixé dans la quatrième Partie)»[41]

Cette oeuvre, publiée au début du XVIIIème siècle, ne va pas seulement avoir un rôle à jouer dans le développement du Calcul des Probabilités à cette époque ; elle est encore actuellement en vigueur. Le développement postérieur du Calcul des Probabilités ne pourrait s'expliquer sans la classification de la probabilité *a priori* et *a posteriori*, sans le Théorème de Bernoulli et, peut-être ce qui est le plus important, sans la nouvelle conceptualisation de la probabilité où se fondent inséparablement la probabilité aléatoire et la notion de probabilité épistémologique propre à la philosophie et à la théologie. D'autre part, certaines des polémiques et des confusions, auxquelles la notion de probabilité a conduit, s'expliquent par son origine particulière.

VI. CONCLUSION

Le modèle des jeux de hasard s'avère très utile en tant que modèle théorique, mais si l'on souhaite l'appliquer à des questions civiles, morales et économiques, il demande l'utilisation d'une notion qui, malgré les abus commis, s'était avérée très efficace par les casuistes et les théologiens moraux, notion qui n'est autre que celle de la probabilité basée sur des arguments. La connaissance des cas où un dé peut tomber et la connaissance de la chance que chacune des faces peut avoir d'apparaître est quelque

[41] [MEUSNIER, 1987], p. 3.

chose qui dépend des jeux de dés, alors que dans le cas des phénomènes concernant «*l'oeuvre de la nature*» ou «*l'arbitre des hommes*», non seulement on ignore généralement les situations ou les résultats qui peuvent se présenter, mais il est aussi difficile d'établir que tous auront la même chance de se produire. Les premiers apportent l'objet de la géométrie du hasard, tandis que les autres apportent la notion qui sert à évaluer le degré d'approuvabilité de réaliser une action de la vie quotidienne, dans ce cas d'un chrétien.

BIBLIOGRAPHIE

[ARBUTHNOT, 1710] ARBUTHNOT, J.: *"An Argument for Divine Providence, taken from the constant Regularity observ´d in the Births of both Sexes."* Philosophical Transactions 27, 186-190.

[BAYES, 1763] BAYES, T.: *"An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances"* Philosophical Transactions 53, 370-418.

[BERNOULLI, 1713a] BERNOULLI, J.: "Ars Conjectandi" Partie I in Meusnier, N.: *Christian Huygens et Jacques Bernoulli: la Première Partie de l´Ars Conjectandi (1657-1713)*. Paris, 1992

[BERNOULLI, 1713b] BERNOULLI, J.: "Ars Conjectandi". Partie IV en Meusnier, N.: *Jacques Bernoulli et l´Ars Conjectandi*. Institut de Recherche sur l´Enseignement des Mathématiques. Université de Rouen Haute Normandie. Rouen, 1987.

[FONTENELLE, 1994] FONTENELLE : *Oeuvres Complètes*. Tomo VI: *Histoire de l´Académie des Sciences*. Fayard. Paris.

[FRANKLIN, 2001] FRANKLIN, J.: *The Science of Conjecture. Evidence and Probability before Pascal*. The Johns Hopkins University Press. London.

[GOMEZ CAMACHO, 1998] GÓMEZ CAMACHO, F.: *Economía y Filosofía Moral: la Formación del Pensamiento Económico europeo en la Escolástica española.* Síntesis. Madrid.

[GOURAUD, 1848] GOURAUD, C.: *Histoire du Calcul des Probabilités depuis ses Origines jusqu´à nos Jours*. Librairie d´Auguste Durand. Paris.

['SGRAVESANDE, 1748a] GRAVESANDE, W. J.: *Introductio ad philosophiam, methaphisicam et logicam continens*. Editio secunda. Baptistae Pasquali, Venecia.

['SGRAVESANDE, 1748b] GRAVESANDE, W. J.: *Oeuvres Philosophiques et Mathématiques*. Marc Michel Rey. Amsterdam. 2^{e} partie.

[HAILPERIN, 1996] HAILPERIN, T.: *Sentential Probability Logic*. Associated University Presses. London.

[HUYGENS, 1657] HUYGENS, C.: *"De Ratiociniis in Ludo Aleae"* en Meusnier, N.: *Christian Huygens et Jacques Bernoulli: la Première Partie de l´Ars Conjectandi (1657-1713)*. Paris, 1992.

[MARTIN-PLIEGO, 1997a] MARTÍN-PLIEGO, F.J.: *"Historia de la Probabilidad en España".* Revista de Historia Económica. Año XV, nº 1, 1997, 161-176.

[MARTIN-PLIEGO, 2002b] MARTÍN-PLIEGO, F.J. (2002): "Los probabilistas españoles de los siglos XVII a XIX" en A.H.E.P.E. (2002): "Historia de la Probabilidad y de la Estadística", pp. 67-80.

[MARTIN-PLIEGO & SANTOS, 2000a] MARTÍN-PLIEGO, F.J., SANTOS DEL CERRO, J.: *"Luca Pacioli: en el Origen del Cálculo de Probabilidades".* Revista de Historia Económica. Año XVIII, nº 2, 2000, 405-417.

[MARTIN-PLIEGO & SANTOS, 2002b] MARTÍN-PLIEGO, F.J., SANTOS DEL CERRO, J.: *"Juan Caramuel y el Cálculo de Probabilidades".* Estadística Española, Vol. 44, Núm. 150, 2002, 161-173.

[MEDINA, 1578] MEDINA, B. DE.: *Expositio in Primam Secundae Angelici Doctoris D. Thomae Aquinatis*. Mathiae Gastii. Salamanca.

[MEUSNIER, 1987] MEUSNIER, N.: *Jacques Bernoulli et l´Ars Conjectandi.* Institut de Recherche sur l´Enseignement des Mathématiques. Université de Rouen. Haute Normandie. Rouen.

[MONTUCLA, 1802] MONTUCLA, J.F.: *Histoire des Mathématiques*. Tomo III. Henri Agasse. Paris. Réimpression Albert Blanchard, Paris, 1968.

[SANTOS, 1999a] SANTOS DEL CERRO, J.: *Historia de la Probabilidad: Aportaciones Españolas a su Proceso de Conceptualización.* Tesis Doctoral leída en la Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales de Toledo.

[SANTOS, 2000b] SANTOS DEL CERRO, J.: *"Una teoría sobre la creación del concepto moderno de probabildad: aportaciones españolas"* Llull. Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas. Vol. 23 nº 47, 431-450.

[SANTOS, 2002c] SANTOS DEL CERRO, J.: "Probabilismo moral y probabilidad" en A.H.E.P.E.: *Historia de la Probabilidad y de la Estadística*, AC, Madrid, 2002, 103-118.

[SCHNEIDER, 1976] SCHNEIDER, I.: *"The Introduction of Probability into Mathematics"*. Historia Mathematica, 3, 135-140.

[SHAFER, 1982a] SHAFER, G.: *"The Bernoulli"*. Encyclopedia of Statistical Sciences. Vol. 1º.

[SHAFER, 1978b] SHAFER,G.: *"Non-Additive Probability in the Work of Bernoulli and Lambert"*. Archive for History of Exact Sciences. Vol. 19, 309-370.

[VAZQUEZ, 1631] VÁZQUEZ, G.: *Commentariourum ac Disputationum in Priman Secundae Sancti Thomae*. Tomus Primus. Lyon.