



*Journ@l Electronique d'Histoire des  
Probabilités et de la Statistique*

*Electronic Journ@l for History of  
Probability and Statistics*

Vol 2, n°1; Juin/June 2006

**www.jehps.net**

## **Jacob Bernoulli, maître et rival de son frère Johann**

Jeanne PEIFFER<sup>1</sup>

### **Résumé**

Dans cet article, nous ferons le portrait de Jacob Bernoulli dans la perspective de son frère Johann. Ne pas dissocier les deux frères est une vieille habitude historiographique (Comte, Mach, Spiess), à laquelle il ne sera donc pas dérogé. Après avoir rappelé ce que l'on sait de la formation des deux frères, nous examinerons leurs premiers travaux communs, notamment ceux concernant le calcul différentiel et intégral de Leibniz. Les rivalités fraternelles auxquelles a abouti cette collaboration ont donné lieu à de nombreux énoncés et jugements dans les correspondances des Bernoulli. A l'aide de ceux-ci nous essayerons de mieux cerner la personnalité du mathématicien Jacob Bernoulli, ses relations avec Johann et ce que la compétition entre eux doit aux pratiques mathématiques de l'époque.

### **Abstract**

In this paper, we brush a portrait of Jacob Bernoulli as seen by his youngest brother Johann. To associate both brothers is a long habit in the historiography (Comte, Mach Spiess), which will not be completely lost here. After having recalled what we know about the training of the two brothers, we will shortly describe the works done in common, especially those concerning the Leibnizian differential and integral calculus. The rivalry between the brothers is at the origin of a number of sentences and judgements in the correspondences of the Bernoulli. They give us an opportunity to better understand the person and mathematician Jacob Bernoulli, his relations with his brother and also what their competition owes to the nature of mathematical practices at that time.

## **I. INTRODUCTION : LES FRÈRES BERNOULLI, UNE CHIMÈRE HISTORIOGRAPHIQUE**

Jacob et Johann Bernoulli forment, en histoire de l'analyse, un attelage. Un attelage en paire qui fait progresser le calcul infinitésimal tel qu'il fut formulé par Gottfried Wilhelm Leibniz. Il est vrai qu'une partie de leur œuvre – celle concernant justement le développement et les

---

<sup>1</sup> Jeanne Peiffer (CNRS), Centre Alexandre Koyré, 27, rue Damesme, F-75013 Paris,  
[peiffer@damesme.cnrs.fr](mailto:peiffer@damesme.cnrs.fr)

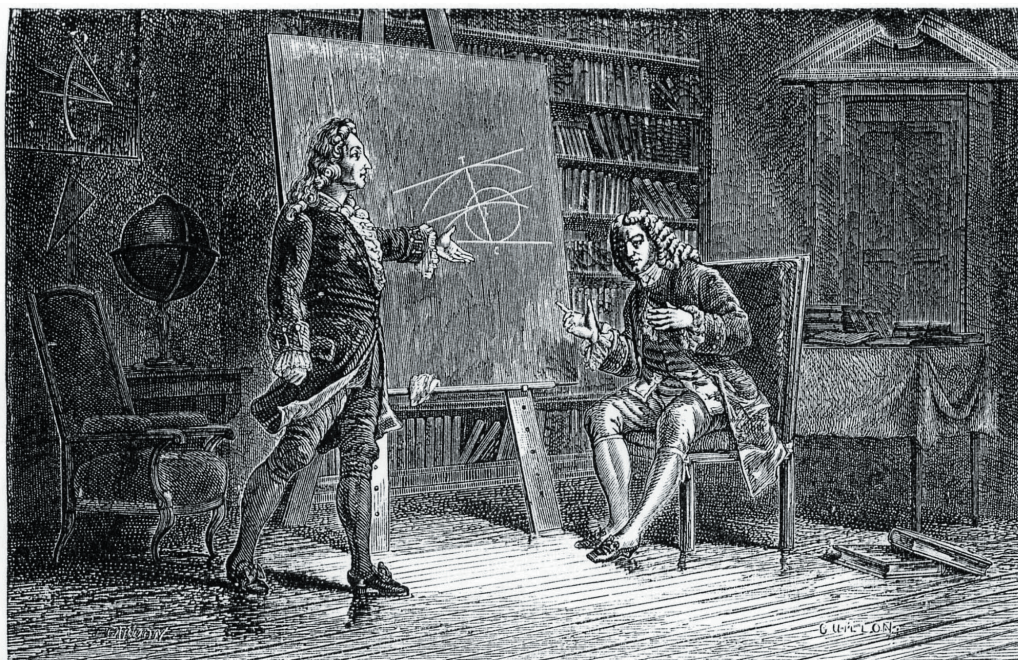
premières applications du calcul leibnizien - incite à les traiter ensemble, puisque c'est dans un effort commun que les deux frères se sont approprié ce calcul, à Bâle vers la fin des années 1680 et au début des années 1690.

« Dans les premiers temps de l'analyse infinitésimale, les géomètres les plus célèbres tels que les deux illustres frères Jean et Jacques Bernoulli, attachèrent, avec raison, bien plus d'importance à étendre, en la développant, l'immortelle découverte de Leibniz, et à en multiplier les applications, qu'à établir rigoureusement les bases logiques sur lesquelles reposaient les procédés de ce nouveau calcul. Ils se contentèrent pendant longtemps de répondre par la solution inespérée des problèmes les plus difficiles à l'opposition prononcée de la plupart des géomètres du second ordre contre les principes de la nouvelle analyse ... ». C'est ainsi qu'Auguste Comte [Comte, 1864, t.I, 6<sup>e</sup> leçon, 178] décrit la contribution des deux frères à l'analyse. Associés, ils sont mis au premier rang des géomètres de l'époque pour avoir étendu le calcul découvert par Leibniz. Certes, ils n'ont pas su en proposer de fondement rigoureux, mais ont dû se contenter d'opposer à la critique la fécondité du nouveau calcul dont les règles permettent de résoudre les problèmes les plus difficiles. Néanmoins, en multipliant les applications du calcul découvert par un autre, ils sortent ensemble du rang des « géomètres de second ordre » dont la plupart étaient dans l'incapacité de saisir la portée du calcul proposé par Leibniz.

S'appuyant sur Comte qu'il cite, Joachim Otto Fleckenstein, grand connaisseur des travaux de la famille Bernoulli, éditeur d'un des volumes des œuvres de Jacob Bernoulli [Jacob Bernoulli, Werke 1] et auteur d'une biographie commune [Fleckenstein, 1949], va plus loin dans la voie ouverte par le philosophe positiviste et met en place ce que j'appelle la chimère « les frères Bernoulli ». Leur contribution est devenue inséparable, indistincte. Cet attelage chimérique, « les frères Bernoulli », a transformé le calcul leibnizien en outil analytique, qui a pu se déployer entre les mains d'Euler à des hauteurs jusque là insoupçonnées. Les frères Bernoulli se hissent ici à grande peine au rang des Leibniz et Euler, à condition qu'on ne sépare pas leur œuvre : « La portée historique des deux frères Bernoulli ... atteint en effet presque celle des actes mémorables des grands classiques des sciences mathématiques, à condition qu'on considère ensemble les réalisations des deux frères »<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>« Die historische Bedeutung der beiden Brüder Bernoulli ... reicht in der Tat fast an die epochemachenden Taten der Klassiker der mathematischen Wissenschaften heran, wenn man die Leistungen der beiden Brüder zusammennimmt » [Fleckenstein, 1949, 2].



Portrait de la chimère « les frères Bernoulli » [Figuier,1870]

Ernst Mach avait déjà exprimé un jugement analogue dans sa *Mécanique* [Mach, 1904, 402-407]. Parlant des deux frères, il écrit : « le génie de l'un et la profondeur de l'autre portèrent les plus beaux fruits par l'impulsion que leurs solutions donnèrent aux idées d'Euler et de Lagrange » [Mach, 1904, 407]. Chacun des deux frères est caractérisé par un trait psychologique différent – le génie *versus* la profondeur – mais leur œuvre commune est féconde par les impulsions qu'elle a pu donner aux générations suivantes. Mach choisit les Bernoulli comme prétexte pour exposer sa conception du génie scientifique, qui, selon lui, aurait deux faces : l'imagination créative et la profondeur critique. Réunies en un seul homme, ces qualités engendrent des scientifiques puissants, « *epochemachend* » dira Fleckenstein, comme Galilée ou Newton. Séparées, lorsqu'elles se rencontrent chez des personnes différentes, elles peuvent se heurter et entrer en lutte ouverte. C'est ce qui s'est produit, en suivant l'analyse de Mach, pour les frères Bernoulli. L'imagination intuitive de l'artiste Johann et l'esprit critique de Jacob sont entrés en conflit et sont à l'origine des regrettables querelles fraternelles, mais l'une et l'autre ont porté ensemble « les plus beaux fruits ». Pour être puissamment génial, les deux frères doivent, sous la plume de Mach, faire corps comme deux faces d'une même médaille et collaborer, alors que chacun des deux frères n'incarne qu'un des deux traits qui façonneraient les génies en science. Les frères pour combler ce qui leur manque sont donc condamnés à ne faire qu'un et en même temps à se combattre.

Or, Jacob et Johann Bernoulli ne forment pas cet assemblage chimérique et monstrueux présenté dans l'historiographie, mais présentent chacun une personnalité distincte et une œuvre qui ne se limite pas aux travaux d'analyse, champ d'exercice de leur féroce compétition. Même si je souhaite, dans cet article, prendre mes distances avec cette construction chimérique dont les hypothèses fondatrices plongent dans le XIX<sup>e</sup> siècle, je ne suis pas en mesure, en ce début de XXI<sup>e</sup> siècle, d'opérer la séparation. Et ce pour la simple raison que mes recherches portent sur Johann Bernoulli et sa contribution au développement de la nouvelle analyse. Je tenterai cependant d'enfoncer un coin et de créer une perspective en adoptant le point de vue de Johann sur son frère. Le portrait de Jacob que je vais ébaucher

dans la suite repose sur les dits de Johann, glânés au fil de ses nombreuses correspondances, sur ses jugements souvent prononcés à l'emporte pièce, sous l'emprise de la colère ou en situation de conflit, larvé ou ouvert, avec son frère. Un tel portrait élaboré du point de vue adverse, ne peut être que partiel, partial et distordu. Il donnera notamment à voir la nature des relations entre Jacob et Johann et ce que leur rivalité doit aux pratiques mathématiques de l'époque.

## II. JACOB BERNOULLI ET SON CADET JOHANN

### 1. Années de formation de Jacob Bernoulli

#### 1.1. Etudes de philosophie et de théologie

Rappelons brièvement ce que nous savons des années de formation de Jacob avant l'obtention, à l'âge de 34 ans, de la chaire de mathématiques dans l'université de sa ville natale, Bâle. Jacob y est né le 27 décembre 1654 (ancien style) dans une famille protestante, faisant négoce d'épices et ayant fui les Pays-bas espagnols suite à l'expédition du duc d'Alba. Suivant le vœu de son père, Nicolas Bernoulli, conseiller d'Etat et magistrat, Jacob fit des études de philosophie puis de théologie, qu'il termina en 1676. Conformément à l'usage de l'époque, il se choisit une devise. Elle évoque Phaëton conduisant le char du Soleil : « *Invito patre sidera verso* » que Fontenelle a traduit par : « Je suis parmi les astres malgré mon père » [Fontenelle, 1707, 139]. Ce choix ne témoigne pas d'une modestie exagérée, mais plutôt d'une orgueilleuse affirmation de supériorité.

Le jeune Jacob sut pleinement profiter de la « culture de la mobilité » (Daniel Roche) promue dans la seconde moitié du XVII<sup>e</sup> siècle par des institutions nouvelles qui favorisèrent la circulation des hommes et des connaissances. Dès août 1676, il se mit en route pour se rendre, à cheval, à Genève où il séjourna pendant vingt mois [Battier, 1705] en prêchant, en instruisant une jeune fille aveugle, Elisabeth von Waldkirch, et en servant d'opposant lors de *disputationes* théologiques [Merian, 1860]. Il témoignera de son expérience d'enseignement des mathématiques aux aveugles dans un article publié dans le *Journal des savants* 1685 [Jacob Bernoulli, Opera I, 209-210]. Cet article serait une réaction au récit de Spon publié dans le même journal en 1680, où celui-ci attribue au père de l'aveugle le procédé d'écriture que Jacob a de fait développé [Jacob Bernoulli, Werke 1, 237]. Jacob y fit la connaissance de Nicolas Fatio de Duillier, l'ami de toujours qui témoigne dans une lettre du 22 juillet 1700 [Jacob Bernoulli, Briefwechsel, 164 et 168] avoir vu jouer Jacob au jeu de paume à Genève, ce jeu sur lequel il a écrit une fameuse lettre à un ami [Meusnier 1987, 97-131]. Jacob poursuivit, en juin 1678, son grand tour en France où il séjournera dans le Limousin (à Nède auprès du marquis de Lostanges, où il réalisa deux cadrans solaires dans la cour du château), puis à Bordeaux et quelques semaines à Paris. Durant ce voyage, il commença en 1677 la rédaction de son journal mathématique, *Meditationes, annotationes, animadversiones theologicae et philosophicae*, qui comporte 236 articles, dont les premiers ont été décrits par Silvia Roero [Jacob Bernoulli, Werke 2, 15] comme de simples exercices. Le journal est un témoignage précieux sur cette période de formation scientifique, qui n'a véritablement débuté que lors de la rencontre de Jacob avec le milieu cartésien, d'abord en France, puis surtout aux Pays-bas (Amsterdam et Leiden) et en Angleterre au cours d'un second voyage (avril 1681-octobre 1682). À Londres, en août 1682, Jacob aurait assisté à une réunion de la *Royal Society* [Merian, 1860]. C'est la philosophie naturelle cartésienne que Jacob s'est d'abord appropriée

avant de s'adonner à la géométrie. En témoignent les deux ouvrages, *Conamen novi systematis cometarum* (1682) et *Dissertatio de gravitate aetheris* (1683), parus à Amsterdam. Selon Joachim Otto Fleckenstein, éditeur du volume d'astronomie et de philosophie naturelle [Jacob Bernoulli, Werke 1], un tiers de ses travaux sont consacrés à la philosophie naturelle et à la logique.

## 1.2. Le choix des mathématiques

De retour à Bâle en 1682, Jacob renonça à une carrière ecclésiastique et décida de se consacrer aux mathématiques. Il proposa à l'université de Bâle des cours publics de physique expérimentale, dont témoigne une brochure imprimée à Bâle en 1686 [Jacob Bernoulli, Opera I, 251-276]. Dès 1682, il fit aussi insérer de brefs articles dans le *Journal des savants* – réactions aux travaux des autres qu'il présente ou critique – d'abord dans le domaine de la philosophie naturelle (machines à respirer sous l'eau, pour élever les eaux, pour peser l'air, centre d'oscillation), puis à partir de 1685 dans celui des mathématiques. Signalons qu'un des premiers problèmes de mathématique qu'il proposa publiquement concerne un jeu de dés<sup>3</sup> dont il donna lui-même la solution dans les *Acta eruditorum* de 1690 et qu'il a inclus dans l'*Ars conjectandi* [Jacob Bernoulli, 1713, Pars 1, Append., probl.1, 49-57].

Silvia Roero a décrit, dans ses introductions aux travaux d'arithmétique, de géométrie synthétique et de géométrie algébrique du jeune Jacob [Jacob Bernoulli, Werke 2], son lent apprentissage des mathématiques, d'abord à travers la lecture de la deuxième édition latine de la *Géométrie* de Descartes [Descartes, 1659-1661], puis celle d'Arnauld et de la *Logique* de Port Royal, de Malebranche et de Prestet. Pendant cinq à six ans, Jacob s'employa à résoudre, à l'aide des méthodes cartésiennes, des problèmes qu'il publia, à partir de 1686, presque exclusivement dans les *Acta eruditorum*. A l'université de Bâle, qu'il prit soin de ne pas négliger, il présenta notamment des thèses de logique publiées sous forme de brochures. Un premier travail commun aux deux frères, Jacob et Johann, y est présenté le 9 septembre 1685 sous le titre de *Parallelismus ratiocinii logici et algebraici* [Jacob Bernoulli, Opera I, 211-224]. Il s'agit d'un *specimen*, d'un exercice de *disputatio*, dont on devait en présenter deux publiquement afin d'être admis aux examens de *magister artium*. Johann, qui devait obtenir ce titre le 8 décembre de la même année, y joua surtout le rôle de répondant et renoncera plus tard à inclure ce travail dans ses *Opera*. On y trouve deux groupes de thèses, dix-sept concernant le parallèle entre raisonnements logique et algébrique annoncé dans le titre, puis vingt-sept thèses mélangées. S'y trouvent juxtaposées des lapalissades comme « *Risibilitas est risibilis proprietas* » (thèse 5) et des jugements abrupts sur des articles parus dans le *Journal des savants*, ainsi : « Les arguments du Professeur Le Montre avancés contre mon système des comètes et insérés dans le journal français des savants pour l'année 1682 ne sont d'aucun prix » (thèse 23) ou « L'abbé Catelan s'est également trompé concernant les oscillations du pendule (thèse 24)<sup>4</sup>. Mais on y trouve aussi des problèmes de probabilités

---

<sup>3</sup> Voici ce problème tel qu'il a été publié dans le *Journal des savants* 1685 (p.314) : « A & B jouent avec un dez, à condition que celui qui jette le premier as aura gagné. A jouë une fois, puis B une fois, après A jouë deux fois de suite, puis B deux fois, puis A 3 fois de suite, & B aussi 3 fois, &c.

Ou bien, A jouë une fois, puis B deux fois de suite, puis A trois Fois de suite, puis B quatre fois, &c. jusqu'à ce que l'un d'eux gagne.

On demande la raison de leur sort ? » [Jacob Bernoulli, Opera I, 207].

<sup>4</sup> « *Rationes Professoris Montræi adversus systema meum Cometicum allatae, & Ephemeridibus Erudit. Gall. anni 1682 insertae, nullius sunt pretii* » [Jacob Bernoulli, Opera

comme celui concernant le contrat de mariage de Titus et de Caia (thèse 21) traité dans l'article 77 des *Meditationes*, inclus dans l'*Ars conjectandi* [Jacob Bernoulli, 1713, 1<sup>e</sup> partie, probl.5] et étudié par Norbert Meusnier [Meusnier, 1987, 134-152]. Ce problème serait-il issu des préoccupations matérielles de Jacob lors de son mariage, en 1684, avec Judith Stupan ?

L'analyse infinitésimale fait son entrée dans le journal à travers des notes de lecture de Wallis et de Barrow. On peut aussi voir Jacob traiter des problèmes de tangente et de rayon de courbure à l'aide des méthodes de Descartes, Hudde et Fermat, qu'il analyse. Les problèmes *de maximis et minimis* résolus par la méthode de Hudde dans les *meditationes* 96bis et 100, que Silvia Roero date de 1686/7, se retrouvent, cette fois traités au moyen du calcul différentiel, dans les *Lectiones calculi differentialis* (1691-1692) de Johann Bernoulli, dont il sera question plus loin. Ces travaux témoignent sans aucun doute des efforts communs des deux frères pour comprendre la méthode leibnizienne. Sur la rencontre avec cette méthode proprement dite, les documents manquent. Dès 1688, Jacob commence à formuler des critiques à l'encontre de la *Géométrie* de Descartes. Elles aboutiront à une nouvelle édition, commentée par Jacob, de la géométrie latine de Descartes [Descartes, 1695]. Dès cette époque, Jacob s'intéresse aussi aux problèmes de classification des courbes, et notamment des courbes du troisième degré.

### 1.3. Démarche cognitive de Jacob Bernoulli

Silvia Roero, s'appuyant sur sa connaissance approfondie des *meditationes* de cette période, a tenté de caractériser le travail mathématique du jeune Jacob, sa façon de procéder et son style. Jacob se confronte, selon elle, à des problèmes particuliers, appartenant souvent au domaine des mathématiques appliquées, dont la résolution le mène à des méthodes générales. Il commence par étudier soigneusement les travaux des autres, qui doivent lui servir de tremplin pour aller plus loin et produire de nouveaux résultats. Jacob lui-même donne à plusieurs reprises voix à la conviction qu'il est nécessaire de fonder ses propres avancées sur la connaissance des travaux antérieurs. Ainsi, il décrit sa démarche dans le mémoire intitulé « *Solutionem tergemini problematis arithmetici, geometrici et astronomici* » [Jacob Bernoulli, Werke 2, 77-120] et présenté le 4 février 1684 pour l'obtention de la chaire de mathématiques à Bâle : « En vérité celui qui embrasse la carrière de mathématicien n'est pas celui qui sait copier les inventions des autres, les retenir et les réciter si l'occasion s'en présente, mais innove celui-là même qui sait inventer ou révolutionner à l'aide de la divine algèbre ce qui a été proposé par d'autres »<sup>5</sup>. Toute son épistémologie, telle qu'il l'exprime par exemple dans les *Acta eruditorum* de 1695, repose sur l'idée que la connaissance se construit par petits pas à partir de ce qui a été précédemment établi : « En effet, de même qu'il n'y a pas de saut dans la nature, il n'y en a pas dans les sciences non plus, mais le savoir croît, à la manière des quantités, par éléments et ne progresse que lentement ; ainsi, pour procéder d'un état au suivant, il suffit d'un saut, pour ainsi dire, infiniment petit ; afin que procédant par ordre et ayant compris ce qui précède, personne ne soit arrêté et ne puisse arriver de ses propres forces à passer à ce qui suit »<sup>6</sup>.

---

I, 223] et « Etiam Abbas Catelanus, circa doctrinam de oscillationibus funependulorum fallitur » [*ibid.*].

<sup>5</sup> « Mathematici namque partibus defungitur, non qui aliorum inventa exscribere, memoria tenere, aut recitare data occasione potest ; sed qui ab aliis proposita, divinae ope Algebrae, invenire et eruere novit ipse ». Je cite d'après Silvia Roero [Jacob Bernoulli, Werke 2, 260].

<sup>6</sup> « Quemadmodum enim in Natura nusquam, ita nec in Scientiis saltus datur, sed omnis nostra cognitione, more quantitatum, crescit per elementa, atque ita pedetentim augetur, ut ab uno

## 2. Johann Bernoulli et ses années d'apprentissage

Johann, le dixième enfant de la fratrie, est né à Bâle le 27 juillet 1667 et est de plus de douze ans le cadet de Jacob. Il avait neuf ans lorsque Jacob partit de la maison et était un jeune adolescent fraîchement inscrit à l'université de Bâle, lorsque Jacob rentra en automne 1682. Ce fut alors le tour de Johann de prendre la route, car son père le destina au commerce et le mit pendant un an (1682-83) en apprentissage à Neuchâtel. En dépit de son absence prolongée de l'université, Johann obtint dès décembre 1685, comme on l'a vu ci-dessus, son *magister artium* avec le professeur de philosophie, Nicolas Eglinger.

Ayant refusé la profession de marchand à laquelle son père l'avait destiné, Johann ne put convaincre celui-ci de le laisser étudier les mathématiques, « qui suscitèrent en [lui] une excitation singulière »<sup>7</sup>, mais il lui fut permis de s'inscrire en médecine. En 1690, il y obtint la licence après une *disputatio* publique présidée par le même Nicolas Eglinger, devenu professeur de médecine. Celle-ci donna lieu à la publication d'une brochure intitulée *De effervescentia et fermentatione* [Johann Bernoulli, Opera I, 1-44] et fut l'objet d'un compte rendu anonyme dans la livraison de février 1691 des *Acta eruditorum*, – de fait rédigé par Leibniz qui y reconnaissait le frère du fameux Bernoulli. C'est ainsi que Johann se fit connaître de la communauté des savants. Quelques mois plus tard, en juin, Johann publia dans les mêmes *Acta* de Leipzig son premier travail mathématique : « *Solutio problematis funicularii* », sur lequel je vais revenir. Johann interrompit ses études universitaires et partit fin décembre 1690 pour Genève, où il séjourna pendant huit mois chez Daniel Leclerc. Il se lia d'amitié avec Jean-Christophe Fatio, frère aîné de Nicolas et ingénieur des fortifications, à qui il enseigna « les mathématiques supérieures ». Puis, il fit son chemin vers Paris où il séjourna de la fin de 1690 à novembre 1691. Il y rencontra, chez le philosophe Nicolas Malebranche, le marquis de l'Hôpital à qui il donna des leçons de calcul différentiel et intégral. Ces leçons constituent le matériau et fondement intellectuel de l'*Analyse des infiniment petits* [L'Hôpital 1696], premier traité de calcul différentiel paru à titre anonyme. Cet épisode a été minutieusement étudié par Otto Spiess qui a pu montrer de façon convaincante, en s'appuyant sur les leçons manuscrites et la correspondance de Johann avec le marquis, ce que ce dernier devait à son jeune interlocuteur [Johann Bernoulli, Briefe 1]. De retour à Bâle, Johann commença un échange épistolaire avec L'Hôpital, Pierre Varignon et, dès la fin de 1693, Gottfried Wilhelm Leibniz. Début 1694, il fut reçu Docteur en médecine avec un travail<sup>8</sup> *De motu musculorum*, dans lequel il appliqua le calcul différentiel à la contraction musculaire et qui fut autant un travail de mathématique que de médecine. Une semaine plus tard, le 26 mars 1694, il épousa la fille, Dorothea Falkner, d'un des premiers magistrats de la République bâloise, après avoir accepté un emploi d'arpenteur.

---

ejus gradu ad gradum proxime sequentem non nisi saltus, ut sic dicam, requiratur infinite parvus ; ut nemo tam sit hebes, qui si modo ordine incedere velit, ac praecedentia intellexerit, non proprio Marte pergere & ad sequentia transire possit » [Jacob Bernoulli, Opera 1, 662].

<sup>7</sup> « darzu ich eine sonderbahre lust bey mir verspühret » [Bernoulli, Gedenkbuch, 1922, 83].

<sup>8</sup>Pour une édition moderne et commentée, voir *Dissertations on the mechanics of effervescence and fermentation and On the mechanics of the movement of the muscles by Johann Bernoulli*, ed. and translated by Paul Maquet assisted by August Ziggelaar, with an introduction by Troels Kardel, Transactions of the American Philosophical Society, vol.87, Pt.3, Philadelphia 1997.

### III. D'UNE « LOUABLE ÉMULATION » À UNE « AVEUGLE ENVIE »

« J'oubliais de vous dire que le mot d'émulation dans notre langue ne signifie point jalousie comme vous le pensez ; mais une noble ardeur d'excéler en quelque chose, & d'y surpasser tous ceux qui s'en mêlent, sans chagrin, cependant que les autres y réuissent, comme l'excite la jalousie »  
(Pierre Varignon à Johann Bernoulli, [Johann Bernoulli, Briefe 2, 156])

#### 1. Jacob Bernoulli, maître de son frère Johann

C'est à partir de la moitié des années 1680 que les deux frères, tous deux actifs à l'université de Bâle, Jacob comme *magister artium* animant un cours de physique expérimentale et Johann en tant qu'étudiant en médecine, ont commencé à travailler ensemble. Les thèses de 1685 signées par les deux frères et dont il a été question plus haut, en témoignent. Bien que nous disposions de rares informations sur cette période, la plupart des historiens<sup>9</sup> admettent que Jacob a guidé son jeune frère, âgé alors de 20 ans, dans son apprentissage des mathématiques. Dans son autobiographie<sup>10</sup> en français, Johann prétend : « ce fut pendant ce temps là, qu'à l'imitation et l'inclination de feu mon frère Jacques, ..., je commençai à m'appliquer à l'étude des Mathématiques », puis poursuit un peu plus loin : « en moins de deux ans non seulement je m'étais rendu familier presque tous les anciens auteurs qui ont écrit sur les Mathématiques, mais aussi les modernes, comme la géométrie de Descartes et son Algèbre avec ses Commentaires » [Wolf, 1859, 72]. Johann se présente ici comme autodidacte ayant suivi l'exemple de son frère aîné, alors que Jacob a toujours considéré son frère comme son élève. Citons, pour exemple, une lettre à Leibniz du 4 mars 1696, où il indique clairement que Johann a appris les principes de la science [mathématique] de lui<sup>11</sup>.

Vers 1687, alors que Jacob venait d'obtenir la chaire de mathématiques de Bâle<sup>12</sup>, les deux frères découvrirent dans les *Acta eruditorum* de 1684 la « *nova methodus* », c'est-à-dire l'algorithme du calcul différentiel de Leibniz. L'article est obscur, l'exposé succinct et défiguré par de nombreuses erreurs de typographie, mais pour Johann en suivant son autobiographie : « c'en était assez pour nous, pour en approfondir en peu de jours tout le secret » [Wolf, 1859, 72].

Ce que nous savons de manière positive, c'est que Jacob adressa, le 15 décembre 1687, une lettre à Leibniz [Jacob Bernoulli, Briefwechsel, 47-51], le priant de lui fournir des

---

<sup>9</sup> Voir [Fleckenstein, 1958] pour exemple.

<sup>10</sup> Nous disposons de deux autobiographies de Johann Bernoulli, l'une en langue allemande [Bernoulli, Gedenkbuch 1922, 81-103] et l'autre rédigée en français et publiée par Rudolf Wolf [Wolf, 1859, 71-104].

<sup>11</sup> Parlant de son frère et de l'application des mathématiques à la médecine, Jacob écrit : « illum stimulavi, ut principia Scientiae, quam a me didicerat, huc applicaret » [Jacob Bernoulli, Briefwechsel, 77].

<sup>12</sup> Il fut appelé à occuper la chaire le 15 février 1687. Il l'inaugura le 11 mars avec une dissertation sur l'origine et le progrès des mathématiques [Merian, 1860].



explications supplémentaires. Il n'y mentionne pas son frère. Ce que l'on sait moins, c'est que le prétexte lui en fut fourni par un artisan de Bâle, qui l'avait consulté sur la meilleure forme à donner au fléau des balances. Cet exemple montre que Jacob, qui s'était acquis peut-être par son *Collegium experimentale* une solide réputation de bon mécanicien, était assez fortement inséré dans la vie bâloise pour qu'un artisan vienne le consulter. La question de celui-ci débouche sur un problème d'élasticité que Leibniz venait de traiter partiellement dans les *Acta* de 1684. Alors que Leibniz avait examiné le cas d'une poutre fléchissant sous l'action de son propre poids, Jacob n'arrivait pas à mettre en équation le cas d'une poutre déformée par un poids suspendu à son extrémité libre. Il supposa, dans la lettre à Leibniz, qu'il y faut quelque géométrie supérieure : « *sublimior quaedam Geometria* ». Notons que la courbe élastique devait constituer une préoccupation majeure des recherches ultérieures de Jacob.

Comme l'on sait, cette lettre ne parvint à Leibniz que trois ans plus tard. Ce délai avait suffi aux frères Bernoulli pour s'approprier les idées de Leibniz telles qu'il les avait exposées dans les *Acta* de 1684 et 1686. Jacob, dans un article de mai 1690, avait réussi à résoudre le problème de la *curva aequabilis descensus*, ou courbe isochrone, que Leibniz avait proposé dans les *Nouvelles de la République des lettres* de septembre 1687 : « Trouver une ligne de descente, dans laquelle le corps pesant descende uniformément, & approche également de l'horison en temps égaux ». La parabole semi-cubique possède cette propriété, comme Huygens, puis Leibniz l'avaient montré sans recourir à la nouvelle analyse. Jacob put en donner une solution fondée sur le calcul différentiel. Dans ce même mémoire, Jacob introduisit le terme « intégrale », que Johann a toujours revendiqué pour lui, et formula, à la fin du mémoire, le problème de la chaînette. Galilée avait déjà considéré cette courbe « formée par une chaîne ou une corde attachée par ses deux extrémités à deux points fixes » et avait suggéré que c'était une parabole. C'est de fait une courbe transcendante. Les deux frères s'acharnèrent sur le problème, dès qu'ils surent que Leibniz l'avait résolu. Johann réussit à en donner une solution en ramenant le problème à la rectification de la parabole et à la quadrature de l'hyperbole [Johann Bernoulli, *Opera* I, 48-51]. Cet exploit, rendu public dans les *Acta eruditorum* de juin 1691, le propulsa d'un coup au premier rang des géomètres en Europe, au côté de son frère, de Leibniz et de Huygens.

Voici comment Johann décrit plus d'un quart de siècle après, le 29 septembre 1718, sa découverte à Pierre Rémond de Montmort : « Les efforts de mon frere furent sans succès, ..., pour moi, je fus plus heureux, car je trouvai l'adresse (je le dis sans me vanter, pourquoi cacherois-je la vérité ?) de le résoudre pleinement et de le réduire à la rectification de la parabole. Il est vrai que cela me couta des meditations qui me derobèrent le repos d'une nuit entiere ; c'etoit beaucoup pour ce tems là et pour le peu d'age et d'exercice que j'avois, mais le lendemain, tout rempli de joie, je courus ches mon frere, qui luttoit encore miserablement avec ce noeud Gordien sans rien avancer, soupçonnant toujours comme Galilée que la chainette etoit une parabole ; cessés ! cessés ! lui disje ne vous tourmentés plus à chercher l'identité entre la chainette et la parabole, là où il n'y en a point. Celle-ci aide bien à construire l'autre, mais ce sont deux courbes aussi differentes que peuvent l'etre une courbe algebrique et une transcendante, j'ai développé tout le mystere ; ayant dit cela je lui montrai ma solution et decouvris la methode qui m'y avoit conduit » [29.9.1718, UB Basel, LIa 665]. Ce témoignage, vif et touchant, oppose, comme on verra Johann le faire à l'excès, sa propre adresse au lent labeur de Jacob. Mais la spontanéité naïve avec laquelle Johann dit s'être précipité chez son frère, au sortir de ses veilles sur lesquelles Jacob ironisera d'ailleurs plus tard, pour lui communiquer sa solution manifeste une entente confiante entre les deux frères.

## 2. Des travaux étroitement intriqués

Le 21 décembre 1690, Johann quitta Bâle pour ce qu'il était convenu d'appeler sa « *peregrinatio academica* ». Séparés, les deux frères échangèrent une vingtaine de lettres dont seuls quatre brouillons de Johann ont été conservés. Otto Spiess, l'éditeur du volume 1 de la correspondance de Johann Bernoulli, a reconstitué le contenu des autres lettres en s'appuyant sur les *Meditationes* et les mémoires publiés. Cette correspondance, quelque lacunaire qu'elle soit, offre quelques indices ténus de la collaboration entre les deux frères au moment où Johann prit son essor et essaya de voler de ses propres ailes.

En partant, Johann laissa entre les mains de Jacob un article sur la caustique que ce dernier devait envoyer à Leipzig pour qu'il paraisse dans les *Acta eruditorum*. Mais, Jacob y entrevit une possibilité de généralisation et ajouta un paragraphe<sup>13</sup> de son crû où il parle de lui-même à la troisième personne. Publié dans la livraison de janvier 1692, l'article fut suivi en mars d'un travail additionnel de Jacob [Jacob Bernoulli, Werke 5, 350] sur le cercle osculateur et la nature du contact.

De même, Jacob fit suivre son mémoire de mai 1692 sur les cycloïdes d'une addition parue en juin, dont le contenu est dit être tiré d'une lettre de son frère reçue après l'envoi du mémoire à Leipzig. On peut donc faire le constat que l'émulation qui régnait entre les frères profitait à tous deux et était à l'origine de nombreux résultats provenant de l'un et de l'autre. Ils s'attaquaient à peu près simultanément aux mêmes problèmes, souvent posés par Jacob, mais ils ne cosignaient pas d'article. Leurs résultats publiés sont toujours clairement assignés à l'un d'entre eux. C'est cependant l'aîné qui servait systématiquement d'intermédiaire auprès des *Acta* de Leipzig, parfois sans dûment informer son cadet.

Ainsi, Jacob exposa à Johann ses recherches sur le centre d'oscillation<sup>14</sup> après les avoir envoyées à Leipzig. Johann réagit, le 17 juin 1691, comme suit : « Quant à nos affaires Mathématiques, ie suis bien fâché de ce que Vous n'avez pas differé encore pour quelque temps Vos inventions touchant le centre d'oscillations, car i'ay trouvé avant avoir reçûe Vôtre lettre une belle methode pour chercher ce centre qui ce me semble est plus generale que la Vôtre laquelle ne peut s'accommoder ni pour les corps ni pour les plans faisans leurs vibrations autour de l'axe quand il est perpendiculair à ces plans ; vous croirez peutêtre, que ce sont Vos intentions dont i'aye recueilli quelque chose pour ne pas paroître comme si cette recherche surpassoit ma portée ; mais bien loin de là, ie vous assure et ie prens Mr. Fatio à témoins, qu'étant à Duillier j'ay déjà trouvé cette methode dont je vous parle ; ... » [Johann Bernoulli, Briefe 1, 109]. On voit que le climat de confiance est toujours intact en cet été 1691 : Johann, qui paraît déjà très sûr de lui et de ses compétences, attend de son frère Jacob qu'il fasse publier leurs résultats ensemble. Mais sa réaction est aussi révélatrice du problème qui deviendra très vite le sien : comment acquérir son indépendance ? Comment se faire un nom ? De fait, la solution, fautive, que proposait Johann pour trouver le centre d'oscillation, repose sur un principe qui est identique à celui utilisé par Huygens en 1673, ce que Jacob lui fit remarquer. La réponse de Johann en date du 29 septembre 1691 est symptomatique : « cela se peut, mais ie vous assure, que ie n'ay iamais lû ni le traité de Mr. Huygens ni la

---

<sup>13</sup> Le paragraphe en question commence ainsi : « Caeterum animadvertit Clarissimus Frater, methodum hanc posse generalem effeci » [Jacob Bernoulli, Opera I, 471]. Notons que ce mémoire de Johann a été publié, avec d'autres, dans les *Opera* de Jacob.

<sup>14</sup> Ces recherches seront publiées dans les *Acta eruditorum* de juillet 1691 [Jacob Bernoulli, Opera I, 460-465].

contestation entre Vous, cet Auteur et Catelan, de sorte que ie puis dire que ie n'ay pas merit  moins de louange (  ce que Vous soutintes une fois dans une dispute publique) que si ie l'eusse trouvé le premier » [Johann Bernoulli, Briefe 1, 115]. Si les mathématiques ne retiennent que le nom de celui qui a trouvé le premier, quelle reconnaissance peut-il alors y avoir pour le second inventeur ? Ne fait-il que « *ova post prandium apponere* »<sup>15</sup>, selon l'expression consacrée de l'époque ? Cette question, qui tarauda alors le plus jeune des Bernoulli, avait manifestement été discutée publiquement par les deux frères. C'est cette recherche d'indépendance, vitale pour Johann, qui va causer les premières dissensions publiques.

### 3. Le problème de la courbure de la voile enflée par le vent, révélateur des racines du conflit

L'histoire de la voilière<sup>16</sup> est bien connue dans la littérature. Elle me servira ici de prétexte pour examiner les jugements formulés par Johann sur son frère et pour les confronter aux énoncés de Jacob. Les deux frères abordèrent le problème de la nature de la courbe que forme une voile enflée par le vent (*velaria*) dès janvier 1691. Dans une lettre non conservée, Jacob envoya à son frère l'équation différentielle de la courbe sous la forme  $d^2x : dx = dy^3 : \int dy^3$  et lui demanda « d'en tirer une équation littérale ou algébrique, qui exprimât la nature de la courbe, ou du moins d'en déterminer les points par quelque construction » [Johann Bernoulli, Briefe 1, 100]. Selon Jacob, Johann aurait proposé plusieurs hypothèses qu'il a toutes rejetées. D'abord Johann crut pouvoir identifier le profil de la voile à une courbe funiculaire pour laquelle le poids de  $ds$  est proportionnel à  $dx$ , et donc<sup>17</sup>   une parabole. Fin avril, Johann imagina que la voile prend la forme qu'elle aurait si elle était remplie d'un liquide et essaya d'en calculer la courbure.

Jacob considéra plusieurs cas et semble avoir eu une compréhension plus profonde de la manière dont le vent peut agir sur la voile<sup>18</sup>. Johann s'obstina à ne pas vouloir comprendre cette distinction entre différents cas et écrit, le 17 juin 1691, à Jacob : « ce qui m'etonne le plus est que vous dites que la voiliere est partie une peripherie du cercle, partie une autre courbe, ie ne saurois jamais comprendre, comment une même cause peut produire deux courbes differentes. Vous faites comme les Anciens, qui ont cru que le jet d'un boulet de canon fasse trois lignes, lis s dans Sventer et vous le verrez ; ... » [Johann Bernoulli, Briefe 1, 111]. Le 29 septembre, il se moqua ouvertement de son frère : « Hélas ! que je suis malheureux de ne pouvoir point comprendre votre voiliere bicourbe, aussitôt que ie veux regarder une de ses courbures, voicy l'autre qu'elle me montre, enfin si elle [n'est] pas chimere, du moins sera [-t-] elle le veritable Protheus » [Johann Bernoulli, Briefe 1, 115]. Johann accuse ici son frère peu aimablement de suivre les méthodes anciennes et se réfère à Daniel Schwenter, professeur de mathématiques à Altdorf, auteur entre autres d'un *Deliciae*

---

<sup>15</sup> C'est-à-dire « servir des œufs après le petit déjeuner » (voir par exemple [Leibniz, Math. Schriften 2, 270]).

<sup>16</sup> On peut la suivre sous la plume d'Otto Spiess dans [Johann Bernoulli, Briefe 1]. Voir aussi [Hofmann, 1956] et la thèse de Sybille Ohly sous la direction de H. N. Jahnke [Ohly 2001].

<sup>17</sup> Selon un théorème connu des deux frères et publié dans « Specimen alterum calculi differentialis » [Jacob Bernoulli, Opera I, 442-453].

<sup>18</sup> Voir la brève histoire de la voilière que Jacob a publiée en 1695 dans les *Acta eruditorum* [Jacob Bernoulli, Opera I, 652-655].

*physico-mathematicae* (1651), où il est rapporté que les anciens considéraient la courbe balistique comme composée de lignes droite et courbe. Puis, en recourant à l'image de Protée, dieu marin, doté du pouvoir de divination, mais se dérochant aux consultations par mille métamorphoses, Johann se moque d'une courbe versatile et insaisissable, qui prend tantôt une forme, tantôt l'autre.

Alors que Johann était en route pour Paris, Jacob trouva le résultat remarquable que la courbe est une chaînette. Il communiqua fin 1691 ce résultat à Johann sous la forme suivante : « *Sumptibus aequalibus curvae portiunculis, Cubi ex primis differentiis ordinatarum sunt proportionales secundis differentiis abscissarum* », c'est-à-dire  $adsddx = dy^3$  (\*). Il ne dit mot sur sa méthode et n'indiqua pas la courbe qui satisfait l'équation (\*). Johann découvrit immédiatement que c'est une chaînette et répondit par retour du courrier que « *curvam huius aequationis eandem esse cum catenaria* », tout en soupçonnant Jacob de ne pas connaître la nature de la courbe. Il s'en fit l'écho dans un article du *Journal des savants*, du 28 avril 1692 (p.189), où il parle de Jacob en ces termes : « il me pousse encore d'achever la solution qu'il avoit commencée, & conduite jusqu'à cette équation [l'équation (\*)] ; ce qu'il tenoit apparemment pour desespéré » [Johann Bernoulli, Opera I, 60]. Malheureusement pour lui, Jacob avait fait parvenir sa solution dès le 9 mars 1692 à Mencke qui l'inséra dans les *Acta eruditorum* du mois de mai 1692 [Jacob Bernoulli, Opera I, 481-490]. Désormais le climat entre Jacob et Johann se détériorera progressivement. Jacob prendra de plus en plus ses distances. En 1693, il parle encore sur un ton très neutre de la courbe de la voilière que son frère a trouvée dès qu'il avait deviné l'astuce qui avait conduit Jacob à son équation<sup>19</sup>, mais il revendique tout de même clairement pour lui la priorité de la découverte et la méthode que son frère cadet a suivie.

### 3.1. Priorités à assurer

Choqué sans doute par l'accusation injuste faite publiquement par Johann dans le *Journal des savants*, Jacob entreprit de faire le bilan de ses inventions et de s'assurer la priorité de celles qu'il avait communiquées sans arrière-pensées à Johann. Il a exprimé cette intention plus tard dans une lettre du 15 novembre 1702 à Leibniz, où il dit avoir voulu écrire, dans une de ses premières lettres qu'il lui a adressée, l'histoire de leur vie, à Johann et à lui, et de leurs achèvements respectifs en mathématiques, faits depuis la prime adolescence par chacun d'eux. Il s'y arrote le mérite d'avoir « pénétré le premier le mystère de son calcul » et de l'avoir fait partager à Johann<sup>20</sup>.

Toujours est-il qu'en juin 1694, Jacob publia son « *theorema aureum* », ou théorème d'or, expression qui figure pour la première fois dans sa *Méditation CXCII*, datée de printemps 1692. Elle traduit l'importance que Jacob accordait à ce théorème dont il était très fier et dont il vante sur un ton emphatique la nouveauté et l'utilité [Jacob Bernoulli, Opera I, 577]. Il s'agit de la formule du rayon de courbure que Jacob note  $z = ds^3/dxddy$  et qui a servi de carte

---

<sup>19</sup> « Quippe nec Frater meus, qui dum adhuc Parisiis versaretur Problema plene absolvit, detecto quod me ad aequationem  $adsddx = dy^3$ , [suppositis elementis curvae  $ds$  aequalibus] perduxerat artificio » [Jacob Bernoulli, Opera I, 562].

<sup>20</sup> « Animus fuerat olim, quam primum ad Te darem literas, in mei justificationem perscribi Tibi historiolum vitae et profectuum nostrorum, quos ambo a prima adolescentia in Mathesi fecimus (ubi inter alia vidisses, non ipsum, sed me calculi Tui mysteria primum penetrasse ipsique impertivisse ...) sed mutavi sententiam, quia video nil profutura » [Jacob Bernoulli, Briefwechsel, 101].

de visite à Johann lors de ses voyages – ce que Jacob ne manqua pas de souligner<sup>21</sup> dans les *Acta*. Ce beau résultat appartient bien à Jacob, et à lui seul, car on peut suivre, dans les *Meditationes*, le chemin parcouru pour parvenir à la fameuse formule<sup>22</sup>. Jacob traduit aussi la formule en coordonnées polaires et qualifie le résultat d'« inconnu même de mon frère ». Notons que le marquis de l'Hôpital a inclus le théorème d'or dans son *Analyse des infiniment petits* [L'Hôpital, 1696, 77] sans en référer le moins du monde à Jacob Bernoulli, ni d'ailleurs à Johann.

### 3.2. Des premières « picoteries » à la rupture

Le ton change brutalement dans un article du même mois de juin 1694 sur l'isochrone paracentrique, c'est-à-dire la courbe le long de laquelle un grave approche, en des temps égaux, également d'un point donné [Jacob Bernoulli, Opera I, 601]. Jacob y reproche à la méthode inverse des tangentes de Johann, telle qu'il l'a communiquée à L'Hôpital, d'être inefficace, de manquer de généralité et de consister tout juste en une astuce particulière que lui, Jacob, n'ose même pas appeler une méthode<sup>23</sup>. Johann en fut extrêmement meurtri et, dès qu'il en avait pris connaissance, laissa éclater sa colère dans une lettre à L'Hôpital du 12 janvier 1695: « c'est un misanthrope general qui n'épargne pas même son frere, ..., il crève de rage, de haine, d'envie et de jalousie contre moy, il m'en veut du mal à cause que vous m'en voulez du bien, il me persecuta dés le moment que vous m'avez fait l'honneur d'une pension, il croit que cela fait tort à sa vaine reputation, ne pouvant pas souffrir que moy qui suis le cadet soit aussy bien estimé que luy qui est l'ainé, enfin ce seroit avec le plus grand plaisir de me voir dans l'état le plus miserable et reduit à l'extrémité. Quelle indignité à un frere ! quel execrable orgueil ! » [Johann Bernoulli, Briefe 1, 255]. Il ajoute un peu plus loin : « n'ayez pas peur, que je fasse part à mon frere de ce que nous nous ecrivons, car il y a plus de 6 mois que je ne luy ay parlé mot ». Dès l'été 1694, juste après le mariage de Johann auquel Jacob a assisté, la rupture semble consommée<sup>24</sup>. Johann insinue ci-dessus que c'est la reconnaissance, aussi sous forme sonnante et trébuchante, obtenue de la part de L'Hôpital qui a amené cette rupture. Les raisons en sont sans aucun doute plus complexes.

Après le départ de Johann pour Groningue, Jacob se chargea encore de transmettre à son frère et à L'Hôpital des livres qui transitaient par Bâle, dont les *Acta eruditorum*. Cela provoqua de la part de Johann une réaction vive qui s'exprime dans une lettre du 21 avril 1696 à L'Hôpital : « d'où vient cette nouvelle courtoisie de mon frere le professeur ? qu'il est si prompt à écrire, à servir, à vous envoyer les actes ? en un mot à vous faire la cour, qui d'ailleurs est si stoïque, si misanthrope, si vilain que de ne pas donner une seule reponse à la lettre que Mr. Leibnits luy a ecrite il y a plusieurs années, et dont Mr. Leibnits s'est plaint à moy deja souventefois. Vous ne sçauriés croire combien ce frere qui n'est pas digne de porter le nom de frere me hait, combien il me persecute et tache de m'abimer, depuis que j'ay l'honneur d'être bien regardé auprès de vous ; il en a donné nouvellement un bel échantillon dans les actes du dernier décembre, où il me dechire miserablement et vomit contre moy des

---

<sup>21</sup> « eam mox nonnullis inter peregrinandum communicavit *Frater* » [Jacob Bernoulli, Werke 5, 114].

<sup>22</sup> Martin Mattmüller l'a étudié de manière minutieuse [Jacob Bernoulli, Werke 5, 331 et sq.].

<sup>23</sup> « At statim sensi, illas non continere nisi artificia quaedam particularia, quae methodum appellare non ausim » [Jacob Bernoulli, Opera I, 607].

<sup>24</sup> Voir la contribution de Fritz Nagel dans ce numéro. Voir aussi ce que Johann écrit à Leibniz le 12 février 1695 [Leibniz, Math. Schriften 3, 163].

calomnies et faussetés épouvantables, et meme tout ce qui y paroît être de plus doux et à mon avantage, est rempli de poison caché ... » [Johann Bernoulli, Briefe 1, 317].

Johann fait ici allusion à la « *brevis historiola* », ou brève histoire de l'invention de la courbe enflée par le vent, publiée dans les *Acta eruditorum* de décembre 1695. En effet, toujours animé par la volonté de clarifier la situation et d'attribuer à chacun ce qui lui revient, Jacob est amené à reconstituer, à partir de la correspondance avec son frère, le récit<sup>25</sup> circonstancié et détaillé de l'identification de la voilière avec la chaînette. Il n'y est pas tendre avec son cadet et met en scène l'incompréhension dont celui-ci aurait fait preuve des phénomènes de mécanique sous-jacents à l'action du fluide. C'est Jacob qui lui a expliqué la manière dont s'exerce la pression d'un fluide. Revenant sur l'isochrone paracentrique, il reproche à Johann de ne rien apporter de nouveau par rapport à ce que Jacob en a donné. A la fin de l'article, il expose sa conception du travail de recherche et revient sur le thème, débattu sans aucun doute entre les deux frères, de deux personnes appliquées à la même recherche. Elles suivent habituellement « des voies différentes non également adaptées à la nature de la chose », ce que ceux qui les suivent ne peuvent prévoir au départ. Jacob les compare à deux personnes qui parcourent des terres inconnues et dont chacune rentre chargée de nouvelles dépouilles. Et pourtant aucune des deux ne peut emporter autant que produit la terre de l'autre<sup>26</sup>. Même si deux personnes s'attaquent simultanément à des problèmes, comme c'était le cas pour les frères Bernoulli depuis une dizaine d'années, et même si elles arrivent toutes deux au bon résultat, chacune par la voie qu'elle aura choisi de suivre, l'une ne pourra emporter toute la gloire au détriment de l'autre. Telle semble être la philosophie de Jacob ! Cependant, en ce qui concerne la courbe d'une voile enflée par le vent, il insinue avoir tracé lui-même la voie que Johann empruntera après lui. Toute originalité semble ici être déniée au cadet.

Johann tentera de prendre publiquement sa revanche dès qu'il sera l'égal de son frère au plan professionnel, c'est-à-dire dès qu'il aura le titre de professeur et occupera la chaire de mathématiques à l'université de Groningue.

#### 4. Deux conceptions de la communication mathématique

A plusieurs reprises, Johann Bernoulli reprocha à son frère une culture du secret. Après s'être soulagé le cœur auprès de L'Hôpital début 1695, Johann se plaignit avec plus de mesure à son ami Leibniz des piques hostiles de son frère. Dans une lettre du 12 février, il oppose son propre caractère à celui de Jacob, « qui s'efforce avec le plus grand zèle à tout cacher et à dissimuler par ses anagrammes (*logogriphis*), dont j'ignore quelle petite vaine gloire et

---

<sup>25</sup> C'est ce qu'il est convenu d'appeler dans la littérature de langue allemande, le « *Velaria-Bericht* » paru dans Jacob Bernoulli, *Explicationes, annotationes et additiones ad ea quae in Actis ... de curva elastica, isochrona paracentrica et velaria ... leguntur, Acta eruditorum* de décembre 1695, 546-547 [Jacob Bernoulli, *Opera* I, 652-655].

<sup>26</sup> « *etiamsi duo eidem quaerendae rei mentem applicent, fieri plerunque solet, ut diversas vias ineant, naturae rei non aequae accomodas, quas tamen quo ducant initio praevidere non possunt ; similes duobus, qui pari quidem sagacitate Terras incognitas lustrant, amboque novis spoliis onusti domum redeunt ; sed neuter, quae alterius tantum Terra tulit, asportare potest* » [Jacob Bernoulli, *Opera* I, 663].

admiration il en tire. C'est pourquoi il me persécute ardemment (ce qu'il a honte de dire) de sa haine clandestine, ...<sup>27</sup>.

Lorsqu'en 1718, en pleine querelle sur la priorité de la découverte du calcul infinitésimal, Montmort désireux d'écrire une histoire de la géométrie, pousse Johann à revenir sur les débuts du calcul différentiel et intégral, celui-ci écrit : « Vous avoués ingenuement que nous avons, Mr. Leibnits et moi, revelé de bonne heure à Mr. le M. de l'Hopital nos secrets, qui apparemment, ajoutés Vous, en seroient encore pour tous les Geometres d'aujourd'hui, si nous avions voulu les cacher à l'imitation de Mr. Newton ; que sçait on ce qui seroit arrivé si j'avois voulu suivre l'humeur bizarre de mon frère, qui au commencement etoit pour le moins aussi mysterieux que Mr. Newton ; je pourrois vous montrer quelques unes de ses lettres qu'il m'a ecrites lorsque j'étois à Paris, dans lesquelles il m'a grondé souvent de ce que j'étois si facile à communiquer nos secrets, et m'exhortois à les tenir cachés » [15.6.1719, UB Basel, LIa 665]. Il réagit ainsi, flatté, à une intervention de Montmort auprès des Anglais et de Brook Taylor en particulier. En effet, Montmort attribue pleinement à Leibniz et aux frères Bernoulli le mérite d'avoir fait connaître les nouvelles méthodes analytiques : « ce sont eux et eux seuls qui nous ont appris les regles de differentier et d'integrer, ... il suffit pour s'en convaincre d'ouvrir les journaux de Leipsic, ..., personne hors M. de l'Hopital, qu'on peut joindre en partie à ces Messieurs, quoiqu'il ait été disciple de Mr. Jean Bernoulli, n'a pas paru avec eux sur la Scene jusqu'en 1700 ou environ » [UB Basel, LIa 665]. Johann s'empresse de revendiquer pour lui cette culture de la communication ouverte que ne partageait certainement pas Newton, ni Jacob selon lui.

Il est certain que Jacob, même s'il est l'auteur de très nombreux articles publiés presque exclusivement dans les *Acta eruditorum*, n'a pas su établir un réseau de communication épistolaire aussi étendu et régulier que celui de Johann. Ce dernier le dit pas « prompt à écrire » [Johann Bernoulli, Briefe 1, 317]. Une partie de ses correspondances, dont l'inventaire a été établi dans *Der Briefwechsel von Jacob Bernoulli*, maigre volume d'à peine 300 pages, n'ont pas été conservées. Puis, Jacob a souvent négligé ses correspondants, s'excusant souvent par des raisons de santé auxquelles « s'ajoute une lenteur innée à écrire et une paresse peu ordinaire »<sup>28</sup>. Ainsi, par deux fois, Jacob interrompit l'échange épistolaire avec Leibniz, entre 1690 et 1695, puis de nouveau entre 1697 et 1702 lorsqu'il soupçonna son correspondant de partialité dans les démêlés avec son frère.

Jacob n'avait pas la spontanéité avec laquelle Johann communiquait ses découvertes et résultats, dont ceux de son frère d'ailleurs. Plus réfléchi, il prenait son temps. Conscient aussi de l'originalité de ses démarches dans un champ qui venait de s'ouvrir, il chercha sans doute à protéger sa propriété intellectuelle, à ne pas diffuser trop largement ses résultats non publiés (sauf à son frère lorsqu'ils « marchaient *passibus aequis* »<sup>29</sup> et à ses disciples) et à s'assurer la priorité de ses découvertes. Mais il était loin de tenir cachés ses secrets à l'instar d'un Newton. Moins impulsif et communicatif que son frère, Jacob a communiqué ses résultats

---

<sup>27</sup> « Hac autem in parte frater meus omnino est contrariae naturae, quippe qui omnia summo studio celare et logogrphis suis involvere conatur, ex quo nescio quam vanam gloriolam et sui admirationem captat, meque propterea (quod pudet dicere) clandestino odio fervide prosequitur, ... [Leibniz, Math. Schriften 2, 163].

<sup>28</sup> « Cui si adjungas nativum meum ad scribendum lentorem ac segnitiem non mediocrem » [Jacob Bernoulli, Briefwechsel, 68].

<sup>29</sup> L'expression est de Montmort dans une lettre à Johann Bernoulli du 28 octobre 1718 [28.10.1718, UB Basel, LIa 665].

dans de nombreux articles rédigés soigneusement en Latin, comme en témoignent ses deux volumes d'*Opera*.

## IV. JOUTES PUBLIQUES 1696-1700

Les rivalités fraternelles vont s'exprimer publiquement à l'occasion de défis mathématiques assortis de délais de résolution et pourvus de prix. L'escalade du conflit entre les frères, dès que tous deux seront bien établis professionnellement, sera rapide, violente et irréversible. Les *Streitschriften* – c'est-à-dire les écrits que les deux frères ont rédigés à l'occasion des controverses qui les opposèrent - ont été réunis dans un volume des œuvres des Bernoulli [Jacob & Johann Bernoulli, *Streitschriften*] et sont donc d'accès facile. Je vais m'attacher ici, comme dans ce qui précède, à glâner dans les énoncés outragés prononcés à l'occasion de ce conflit ce qui permet de mieux cerner la personnalité, notamment scientifique, de Jacob Bernoulli.

### 1. Le défi de la brachystochrone

C'est Johann qui ouvrit les hostilités par une première escarmouche - Jacob parlera de « *velitatiuncula* » dans une lettre publique à son frère [Jacob & Johann Bernoulli, *Streitschriften*, 471] - en proposant dans le mois de juin des *Acta eruditorum* 1696 (p.269) un problème nouveau que les mathématiciens sont invités à résoudre : « Deux points A et B étant donnés dans un plan vertical, déterminer la courbe AMB le long de laquelle un mobile M, abandonné en A, descend sous l'action de sa propre pesanteur et parvient à l'autre point B dans le moins de temps possible ».

Convaincu de la grande portée du problème, Johann assura à celui-ci une vaste publicité, l'assortit d'un délai dans lequel les plus grands mathématiciens de l'univers sont invités à donner leur solution et alla même jusqu'à imprimer à Groningue une affiche qui parvint le 27 janvier 1697 à Jacob. En posant ce problème difficile, Johann souhaite montrer la supériorité des méthodes leibniziennes, mais il provoqua aussi directement son frère en le comptant « parmi ceux qui s'enorgueillissent d'avoir pénétré les mystères les plus profonds de la géométrie grâce à des méthodes particulières et d'avoir élargi son étendue par des théorèmes d'or qu'ils croient inconnus de tous, alors qu'ils ont été publiés bien avant par d'autres »<sup>30</sup>. Jacob ne s'y trompa pas, car il écrit à Leibniz : « A cette heure me tombe entre les mains quelque programme imprimé par lequel mon frère appelle par des mots pleins de jactance et de fiel pour la troisième fois déjà tous les géomètres de l'univers, et à ce qu'il semble moi en particulier, à résoudre son problème »<sup>31</sup>. En dépit de cette publicité très bien orchestrée, les candidats à la résolution furent peu nombreux. Leibniz annonça que seuls Jacob, L'Hôpital,

---

<sup>30</sup> « ... etiam inter illos ipsos qui per singulares quas tantopere commendant methodos, interioris Geometriae latibula non solum intime penetrasse, sed etiam ejus pomoeria Theorematis suis aureis, nemini ut putabant cognitis, ab aliis tamen jam longe prius editis mirum in modum extendisse gloriantur » [Jacob & Johann Bernoulli, *Streitschriften*, 259-262, 261 pour la citation].

<sup>31</sup> Hac ipsa hora incidit mihii n manus ingens aliquod Programma typis excusum, quo frater jam tertium omnes totius orbis Geometras, & ut videtur me in specie, verbis jactantia & felle plenis, ad solutionem sui Problematis provocat » [Jacob Bernoulli, *Briefwechsel*, 94].



Newton et Hudde, s'il se remettait à ces études, seraient capables d'en venir à bout. C'était faire beaucoup d'honneur à L'Hôpital qui a dû tricher pour se maintenir sur la liste [Peiffer, 1989].

Le problème ne peut se résoudre par les méthodes *de maximis et minimis* habituelles. En effet, ce qui est cherché c'est une courbe, parmi une infinité d'autres ayant mêmes extrémités, le long de laquelle le temps de chute d'un mobile lâché sans vitesse initiale à une extrémité est le plus court. Or, ce temps à minimiser s'exprime par une intégrale qui ne contient pas  $y$ , si l'équation de la courbe cherchée est  $y = f(x)$ , mais la dérivée  $y'$ . Cette situation, qui relève de ce que nous nommons calcul des variations, était totalement inédite à l'époque. La courbe cherchée est un arc de cycloïde renversé ayant sa base horizontale, son origine au point donné le plus élevé et dont le diamètre du cercle générateur est tel qu'elle passe par le second point donné. Leibniz, Newton, Jacob et Johann Bernoulli ont chacun donné une solution publiées ensemble, avec une introduction de Leibniz, dans la livraison de mai 1697 des *Acta eruditorum*.

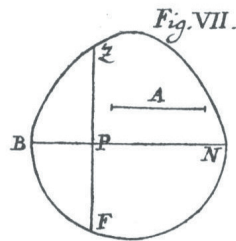
Johann utilise très astucieusement une analogie avec l'optique qui lui permet d'écrire presque immédiatement l'équation de la courbe. Il identifie la brachystochrone à la courbe qu'épouserait un rayon lumineux se propageant dans un milieu dont la densité est inversement proportionnelle à la vitesse qu'acquiert un corps pesant tombant sous l'action de son propre poids. La courbe le long de laquelle le rayon lumineux se propage dans le temps le plus bref doit obéir, en chacun de ses points, au principe de Fermat. En traduisant analytiquement ce principe, Johann peut écrire l'équation différentielle de la courbe, dans laquelle il reconnaît une cycloïde. Il s'agit d'une méthode *ad hoc*, élégante, mais pas généralisable du tout. Elle relève du trait de génie, Jacob dirait de l'astuce qui ne mérite pas le nom de méthode.

Jacob procède de manière plus systématique, en démontrant d'abord que les propriétés extrémales se conservent dans chacune des parties de la courbe. Puis il considère, pour un élément de la courbe, une courbe de comparaison et égale le temps de chute sur chacune des deux courbes sensées être brachystochrones. Sa méthode est généralisable et s'applique à toute une classe de problèmes (variationnels), mais elle est plus longue à mettre en œuvre, les calculs sont prolixes et fastidieux, toutes choses qui reviennent sans cesse sous la plume de Johann parlant de Jacob. En voici un exemple datant de 1697 : « Cependant voici comme la Fortune se joie des hommes ; cette inconstante ne lui ayant montré qu'un chemin très-rude & très épineux, m'a été si favorable qu'elle m'a mené par une voye douce, très-courte & très aisée, par laquelle j'ai même plus trouvé que je ne cherchois » [Jacob & Johann Bernoulli, *Streitschriften*, 289] .

## 2. Le problème des isopérimètres

Jacob formule, à la suite de sa réponse au défi de Johann sur la brachystochrone, quelques problèmes encore plus difficiles auxquels ses spéculations l'ont conduit [Jacob & Johann Bernoulli, *Streitschriften*, 275], dont un problème d'isopérimètres : « D'entre toutes les courbes isopérimètres constituées sur un axe déterminé BN, on demande celle comme BFN, qui ne comprenne pas elle-même le plus grand espace ; mais qui fasse qu'un autre compris par la courbe BZN soit le plus grand après avoir prolongé l'appliquée FP de sorte que PZ soit en raison quelconque multipliée ou soumultipliée de l'appliquée PF ou de l'arc BF, c'est-à-dire que PZ soit la tantième proportionnelle que l'on voudra d'une donnée A & de l'appliquée PF ou

de l'arc BF »<sup>32</sup>. Il adresse ce défi directement à son frère à qui un inconnu offrira cinquante écus d'argent s'il propose une solution dans un délai de trois mois. Johann, en dépit de ses fanfaronnades – il prétend en avoir trouvé la solution en trois minutes –, n'a pas su résoudre correctement ce problème. Une longue et pénible controverse publique s'en est suivie, impliquant les journaux savants de France et de Hollande, ainsi que l'Académie royale des sciences<sup>33</sup>.



*Figure des isopérimètres [Jacob & Johann Bernoulli, Streitschriften, 275]*

Dans l'affrontement, deux caractères différents se révèlent. Face à l'ironie subtile et blessante de Jacob, Johann ne sait se défendre que par des attaques franches et frontales. Johann se vante toujours de résoudre les problèmes en très peu de temps, mais agit dans la précipitation et commet des erreurs que Jacob se fait un malin plaisir de relever. Ainsi, dans un bref avis publié dans le *Journal des savants* du 26 mai 1698 (p.240), il prie son frère d'un ton moqueur « de repasser tout de nouveau sur sa dernière [solution], d'en examiner attentivement tous les points, & de nous dire ensuite si tout va bien ; lui déclarant qu'après que j'aurai donné la mienne, les prétextes de précipitation ne seront plus écoulez » [Jacob & Johann Bernoulli, Streitschriften, 354].

N'ignorant pas l'attrait de Johann pour l'argent, qu'il partage, Jacob n'hésita pas à mettre en jeu une certaine somme qu'il n'aura cependant pas à payer. Dans une lettre à Pierre Varignon insérée dans le même *Journal des savants*, Jacob exerce sa perfidie sur un ton professoral qui met Johann en rage : « Lors que je proposai dans les Journaux de Leipsic à mon frere quelques problèmes de Geometrie, ce fut principalement dans la vuë & dans l'esperance qu'il nous en doneroit un jour la solution. Car outre que je considerois que nous pouvons avoir bone part à la gloire de ceux qui se rendent habiles dans une science, dont il n'y a pas long-temps que nous leur avons doné les premieres ouvertures ; j'avois encore des raisons particulieres pour souhaiter qu'il y pût réussir & gagner le petit prix qui y a été joint par un de mes amis. Ce que je dis, M. pour vous faire comprendre le plaisir que j'ai eu à lire la solution de mes problèmes dans le cahier du Journal que vous avez eu la bonté de m'envoyer, & plus encore à y remarquer d'abord quelque conformité avec la mienne, laquelle me faisoit croire qu'il s'en étoit acquité en habile home. Mais que ce plaisir a duré peu ! Il a été bien-tôt suivi du chagrin de voir mon atente frustrée, ... » [Jacob & Johann Bernoulli, Streitschriften, 356]. Comme les deux frères se connaissent intimement, ils prévoient les réactions l'un de l'autre. Jacob va même jusqu'à deviner les méthodes que son frère aurait employées. La réponse de celui-ci est cinglante et sans mesure, car il reproche à Jacob « une imagination plus forte & plus vive que celle de ces prétendus sorciers qui croient se trouver corporelement au

<sup>32</sup> Dans la traduction de Johann parue dans le *Journal des savants* du 2 décembre 1697, 458-465. Voir [Jacob & Johann, Streitschriften, 309].

<sup>33</sup> Pour l'histoire complète de la controverse, et notamment ses enjeux mathématiques, voir par exemple l'introduction de Goldstine à [Jacob & Johann Bernoulli, Streitschriften, 1-113].

Sabat »<sup>34</sup>. La différence de style est frappante. Alors que l'aîné distille un poison subtil dans un discours maîtrisé, le cadet vomit des injures excessives.

Jacob, qui poursuit la querelle, après l'admission des deux frères à l'Académie royale des sciences à la condition expresse qu'ils cessent leurs querelles, laisse entendre à Varignon qu'il est soutenu à Bâle où l'on juge Johann ingrat. Le 25 juin 1700, Varignon cite un extrait de lettre où Jacob écrit : « Mais ici, où l'on en juge par rapport à ce que j'ay fait à son égard, on trouve la piece tout à fait abominable, & qui ne pouvoit nullement demeurer sans replique. Qu'en puis-je donc, si j'ay été forcé & comme tiré par les cheveux à faire ce que j'ay fait ? Ne vous en prenez pas, je vous prie, à moy ; mais prenez vous en plus tost à vous même, & à la trop bonne opinion que vous avez de l'habileté de mon frere, qui vous avoit fait publier toutes ses pieces, &c. » [Johann Bernoulli, Briefe 2, 250]. Ce n'est pas faux ! Varignon s'est laissé instrumentaliser par Johann Bernoulli. Mais je ne crois pas que Jacob avait besoin d'être poussé par son entourage pour répliquer aux attaques massives de Johann. De fait, il n'hésita pas à solliciter Nicolas Fatio pour qu'il monte les Anglais contre son frère. Le fait d'être entouré par sa famille et ses disciples, Jacob Hermann en particulier, dont Johann<sup>35</sup> dira encore en 1718 l'attachement à Jacob, a certainement donné de l'assurance à ce dernier qui a pu se sentir soutenu dans son combat. Par rapport à ce même problème des isopérimètres, Nicolaus Bernoulli, lui aussi élève de son oncle Jacob, critiquera prudemment la solution de son autre oncle, Johann, et avouera le 20 avril 1745 à Euler ses regrets que « Jacob ait été injustement vilipendé par son frère » [Euler, Briefwechsel 2, 617 et 621].

Alors que Jacob jouissait du soutien de sa famille et de ses disciples à Bâle, le cadet était exilé en Hollande, certes professeur à l'université de Groningue, mais loin des siens et luttant pour une juste reconnaissance. Ainsi, il écrit le 24 décembre 1697 à Pierre Varignon : « car si mon frere est jaloux, je ne le suis pourtant pas ; ... Vous avez raison de croire que l'aigreur qu'il fait sentir en toute occasion contre moy ne vient pas seulement d'emulation, c'est assez que je vous dise qu'elle vient principalement de ses trois belles qualités d'*ambition*, d'*envie* et d'*avarice*. Si je luy donne quelques fois des coups de lame, c'est pour luy montrer que je ne suis pas ni insensible à ses traitements, ni si poltron à me laisser mettre le pied sur la gorge ; je subsiste sans luy, je ne suis point de sa dependance, aussy n'ay je rien de luy dont je luy puisse être redevable ». On ne peut exprimer plus clairement une indépendance enfin acquise !

Quelles conclusions tirer de notre lecture de cette lamentable querelle ? D'une part, le frère aîné, lent, réfléchi et proposant des méthodes abouties et générales, de l'autre une tête brûlée qui se précipite sur tout nouveau problème, raisonne vite et fonde ses solutions sur quelques artifice, analogie ou intuition géniale. Dans le contexte des défis et joutes fraternels situés dans le champ de l'analyse leibnizienne, les frères ont agi conformément à cette caractérisation. Mais qu'en serait-il si l'on étudiait le style de l'*Ars conjectandi* ou les mémoires tardifs de Johann sur la mécanique ? Les conclusions ne seraient pas forcément les mêmes.

---

<sup>34</sup> Extrait d'une lettre de M. Bernoulli..., paru dans le *Journal des savants* du 8 décembre 1698, p.477-480 [Jacob & Johann Bernoulli, Streitschriften, 376].

<sup>35</sup> Dans une lettre de Johann Bernoulli à P. Rémond de Montmort : « ... Mr. Herman prend à tache, comme de raison, d'exalter en toute occasion la gloire de son premier maitre » [29.9.1718, UB Basel, LIa 665].

### 3. La pratique des défis

Dans la configuration décrite, la compétition violente qui s'est fait jour entre les deux frères était sans doute inévitable. Jacob considérait Johann comme un élève qui doit gratitude et respect à son maître. Johann, pour voler de ses propres ailes et déployer tout son talent, avait besoin de s'émanciper de son frère. Mais leur rivalité a été exacerbée par les pratiques mathématiques de ce tournant de siècle, où il s'agit d'imposer la nouvelle analyse leibnizienne et d'en montrer la supériorité. Leibniz, en 1706, le confirme dans les *Nouvelles de la République des lettres* : « Feu Mr. Bernoulli voiant qu'un nouveau champ etoit ouvert, il me pria de penser, si par la meme analyse on ne pourroit arriver à des problemes plus difficiles, maniés inutilement par d'autres, et particulièrement à la courbe qu'une chaine doit former, supposé qu'elle soit parfaitement flexible partout... »<sup>36</sup>. Les défis se sont alors multipliés, où seuls les plus aguerris aux nouvelles méthodes sont capables de s'imposer. Cette pratique fait émerger un premier cercle d'excellence, une élite restreinte à laquelle il faut appartenir coûte que coûte. Il ne s'agit pas seulement de faire progresser un domaine en résolvant des problèmes, mais de les résoudre dans les délais imposés afin de démontrer sa supériorité.

Concernant cette pratique des défis, nous disposons d'un témoignage significatif de la part de Nicolas Fatio, dont Jacob voulait utiliser les contacts avec les Anglais pour polémiquer contre Johann. Fatio exprime à plusieurs reprises son refus « à proposer des problemes au public, [et] à faire marcher les autres sur ses propres pas sans qu'il y ait d'autre gloire à attendre pour ceux-là que d'avoir pu suivre ceux ci » [Jacob Bernoulli, Briefwechsel, 164]. Certes, comme la communauté mathématique dans son ensemble, Fatio avait été écarté d'emblée du premier cercle de ceux capables de résoudre le problème de la brachystochrone, mais son témoignage est d'autant plus intéressant. Ainsi, en date du 22 mars 1701, il écrit à Jacob : « Il est vrai quand j'ai vû, dans ma retraite, qu'il s'elevoit une espece de Tyrannie et d'autorité souveraine parmi les Mathématiciens, qu'on publioit des programmes, qu'on interrompoit et qu'on inquietoit tout le monde, que quelques uns des arrêts de ce nouveau Tribunal commençoient par un PLACUIT, qu'on proposoit des problemes, qu'on limitoit des Jours et qu'on ajoutoit quelquesfois par grace de nouveaux termes pour le Temps de leur Solution qu'enfin on prononçoit que tels et tels seulement les avoient resolus et qu'on avoit bien prévû que tels et tels seuls les pourroient resoudre ; Il est vrai dis je qu'alors j'ai crû devoir sortir du Silence ; et tout homme de coeur s'opposera ouvertement à des manieres si hautaines et ne manquera pas de les condanner. Mais Mr Leibnitz dit que c'est ma cause seule que j'ai defendue, sous ombre de defendre celle du Public. Il ne veut pas s'apercevoir qu'elles sont si confondues qu'il lui est encore plus impossible qu'à moi meme d'en etablir la Separation » [Jacob Bernoulli, Briefwechsel, 183]. Quand la reconnaissance, que chacun peut légitimement attendre pour son travail, n'est obtenue qu'en se plaçant sur le terrain de l'autre et y acquérant le premier rang, on ne peut s'étonner que la compétition soit impitoyable, surtout quand deux frères élevés ensemble et collaborant dans le champ mathématique sont en jeu. De telles pratiques n'exacerbent non seulement la concurrence, mais marginalisent des savants poursuivant leurs recherches tranquillement dans le domaine de leur choix. A fortiori elles excluent tout public élargi, qui ne peut que passivement compter les points sans être admis à concourir ou à participer de quelque façon que ce soit.

---

<sup>36</sup> Cité par Johann Bernoulli dans la même lettre à Montmort du 29 septembre 1718.

## 4. Solide inimitié

Les deux frères ne se sont plus jamais réconciliés. En 1705, sous la pression de sa belle-famille, Johann retourna dans sa patrie, Bâle, alors que Jacob s’y mourait. Il reçut la nouvelle du décès de son frère en route et prit sa succession dans la chaire de mathématiques, comme Jacob l’avait prévu dans une lettre prémonitoire écrite le 3 juin 1705 à Leibniz : « Si la rumeur dit vrai, mon frère revient certainement à Bâle, non pour occuper la chaire de Grec ..., mais plutôt la mienne (qu’il juge peut être pas vainement pouvoir occuper sous peu), puisque la vie est en train de complètement m’abandonner »<sup>37</sup>. Jacob mourut le 16 août 1705 des complications de la goutte.

Après la disparition de Jacob, les relations familiales semblent très tendues, puisque la famille de Jacob empêcha Johann d’avoir accès au *Nachlass* de son frère, dont l’*Ars conjectandi*. La correspondance, encore inédite, de Johann avec Montmort [UB Basel, LIa 665] donne quelques indications sur le climat qui régnait alors entre les deux familles. Johann soupçonne Jacob d’avoir laissé des instructions pour le tenir éloigné de ses papiers : « je n’ai jamais rien vû de ses papiers et des manuscrits laissés apres sa mort ; Je crois que se voyant mourir, il a pris les precautions en ordonnant que rien de ses ecrits ne me seroit communiqué, quand il seroit mort » [29.9.1718, UB Basel, LIa 665]. Dans un premier temps, seul Jacob Hermann a pu classer, lire et même emporter des manuscrits. C’est aussi lui qui a composé le mémoire<sup>38</sup> qui a servi à Fontenelle pour son éloge de Jacob Bernoulli [Fontenelle 1707]. Plus tard, le fils de Jacob a donné une partie des manuscrits à Nicolaus. Voici ce qu’en dit Johann dans une lettre à Montmort : « d’abord après la mort de mon frere, Mr. Herman eut autant de fois qu’il vouloit un libre acces dans sa bibliotheque, d’où il prit des ecrits du defunt, tout ce qui l’accommodoit, en sorte que pas un billet des papiers de mon frere a pû echapper des mains de Mr. herman, et qu’il ne tenoit qu’a lui de le copier ou de le garder, selon qu’il le trouvoit à propos : Il est vrai que du depuis le fils du defunt a donné à mon Neveu de Padoüe une bonne partie des manuscrits de feu son Pere » [29.9.1718, UB Basel, LIa 665]. C’est Nicolaus qui les transmettra à Gabriel Cramer pour l’édition des deux volumes d’*Opera* parus en 1744 chez Marc-Michel Bousquet à Genève.

## CONCLUSION

Prolixe, ambitieux, avare, secret, misanthrope, envieux, orgueilleux, à l’imagination trop forte, ... La liste des épithètes que Johann colle à son frère Jacob est édifiante. Sans vouloir soulever la question si elle permet de saisir une réalité qui de toute façon nous échappe, elle doit nous dire quelque chose des relations entre les deux frères, de la férocité de la compétition qui les oppose. Celle-ci s’exprime sur un mode qui a partie liée aux mathématiques. Ce que Johann formule explicitement en 1687 : « Il faut que mon frere soit boursoufflé d’une terrible suffisance, puisqu’il croit que je ne pourray pas resoudre ce qu’il a resolu ; mais si j’étois d’humeur de luy rendre la pareille, je luy proposerois des questions si subtiles et si peu communes, qu’il y crouperoit toute sa vie sans en pouvoir venir à bout, que j’ay pourtant le bonheur de resoudre fort facilement » [Johann Bernoulli, Briefe 2, 120].

---

<sup>37</sup> « Si rumor vera narrat, redibit certe frater meus Basileam, non tamen Graecam (...) sed meam potius stationem (quam brevi cum vita me derelicturum, forte non vane, existimat) occupaturus » [Jacob Bernoulli, Briefwechsel, 150].

<sup>38</sup> Voir [Johann Bernoulli, Briefwechsel 2, 178].

Trouver le résultat, être parmi les premiers à y parvenir ou du moins l'élaborer indépendamment : telle pourrait être l'ambition d'un mathématicien du tournant du siècle engagé dans le développement de la nouvelle analyse. Lorsque deux frères s'affrontent, dont l'un est de surcroît le maître de l'autre, la compétition en est exacerbée et se charge d'accents intimes et familiers tels que ceux que reflète la liste ci-dessus. L'aîné, Jacob, a du mal à admettre que celui à qui il a tout appris prend son envol et risque à tout moment de le dépasser. Le cadet, Johann, cherche à acquérir un peu d'indépendance en prouvant qu'il est capable de résoudre vite et astucieusement les problèmes les plus difficiles. C'est l'aspect que Johann retient encore, en 1719, lorsqu'il se ressouvient auprès de Montmort de la controverse avec son frère : « étant autrefois en dispute avec mon frere, au sujet du probleme des Isoperimetres, laquelle duroit assez longtemps, avec beaucoup de chaleur de part et d'autre, sur ce qu'il m'avoit reproché d'avoir appris de lui les premiers commencements de la Geometrie, je lui retorquai ce reproche en le faisant souvenir, qu'il m'etoit redevable d'autres choses de plus grande importance, entre autre de la premiere theorie des chainettes ; etc. » [29.9.1718, UB Basel, LIa 665].

Jacob, le plus réfléchi des deux, a de fait problématisé la situation de deux savants travaillant sur un même sujet. On en trouve quelques traces dans son œuvre. Sa réflexion est intimement liée à sa conviction qu'en sciences, les avancées se construisent sur un socle de connaissances déjà acquises et qu'elles se font par petits pas accumulés. Même si deux personnes différentes s'engagent sur un problème, elles suivent souvent des voies originales. Redécouvrir un résultat déjà inventé – dédaigneusement décrit dans les lettres de l'époque par la métaphore « *ova post prandium apponere* » - est digne d'éloge si la recherche se fait en toute indépendance. En aucun cas, l'une peut s'attirer toute la reconnaissance au détriment de l'autre. Cette vision a fini par triompher : les deux frères se partagent conjointement la gloire d'avoir développé le calcul infinitésimal découvert par Leibniz, mais au prix d'un assemblage monstrueux qui permet à peine de distinguer l'un de l'autre, alors que Johann a lutté de longues années pour se libérer du carcan de son frère aîné et maître. Si Jacob a généreusement partagé son savoir mathématique avec son cadet, il n'est pas sûr qu'il ait fait preuve de la même générosité lorsqu'il s'est agi de partager les fruits de la reconnaissance et de la gloire. Son humour, attesté notamment dans ses lettres à Nicolas Fatio, s'est transformé en ironie mordante, sa connaissance intime de Johann a été mise au service de l'humiliation, et sa grande capacité critique employée à freiner le dynamisme de Johann. En vain !

## Bibliographie

### Manuscrits

[UB Basel, LIa 665] Correspondance de Johann Bernoulli avec Pierre Rémond de Montmort (1703-1719), Universitätsbibliothek Basel, Handschrift LIa 665

### Imprimés

[Battier, 1705] J.J. Battier, Vita Jacobi Bernoullii, Basel 1705 = [Jacob Bernoulli, Opera I, 7-34]

[Bernoulli, Gedenkbuch, 1922] Gedenkbuch der Familie Bernoulli zum 300. Jahrestage ihrer Aufnahme in das Basler Bürgerrecht, Basel 1922

[Jacob Bernoulli, 1713] Jacob Bernoulli : De arte conjectandi, Basel 1713

[Jacob Bernoulli, Briefwechsel] Der Briefwechsel von Jacob Bernoulli, bearbeitet und kommentiert von André Weil, mit Beiträgen von Clifford Truesdell und Fritz Nagel, Basel : Birkhäuser Verlag, 1993

[Jacob Bernoulli, Opera] Jacobi Bernoulli, Basileensis, Opera, t.I –II, Genevae, 1744

[Jacob Bernoulli, Werke] Die Werke von Jacob Bernoulli, 1-5, Basel 1969-1999

[Jacob Bernoulli, 1700] *Jacobi Bernoulli Prof. Basil. & design. Acad. Rect. Ad Fratrem suum Johannem Bernoulli Professoreum Groningantum Epistola*, Basel 1700. Cette lettre publique n'a pas été incluse dans les *Opera* de Jacob, mais a été republiée dans [Jacob & Johann Bernoulli, Streitschriften, 471-484]

[Johann Bernoulli, Briefe] Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, 1-3, Basel 1955-1992

[Johann Bernoulli, Opera] Johannis Bernoulli, ..., Opera omnia, t.I-IV, Lausannae & Genevae, 1742

[Jacob & Johann Bernoulli, Streitschriften] Die Streitschriften von Jacob und Johann Bernoulli. Variationsrechnung, bearbeitet und kommentiert von Herman H. Goldstine, mit historischen Anmerkungen von Patricia Radelet-de Grave, Basel : Birkhäuser Verlag, 1991.

[Nicolaus Bernoulli, 1709] Nicolaus Bernoulli : De usu artis conjectandi in jure, Basileae, 1709

[Comte, 1864] A. Comte : Cours de philosophie positive, 2<sup>e</sup> éd. par E. Littré, Paris 1864

[Descartes, 1659-1661] Geometria, a Renato Des Cartes Anno 1637 Gallice edita ; postea ... in Latinam linguam versa, & Commentariis illustrata, Opera atque studio Francisci a Schooten, Amstelaedami, 1659-1661

[Descartes, 1695] Renati des Cartes Geometria ... Ex Revisione, & cum Notis tumultuariis Viri Cl. Jac. Bernoulli, Francfurti ad Moenum, 1695`

[Euler, Briefwechsel 2] L. Euler : Briefwechsel, Opera omnia, series quarta A, vol.II, hrsg. von E.A. Fellmann et G.K. Mikhajlov, Basel 1998

[Figuier, 1870] L. Figuiet : Vie des savants illustres du XVIII<sup>e</sup> siècle, Paris 1870

[Fleckenstein, 1949] J.O. Fleckenstein : Johann und Jakob Bernoulli, Basel 1949

[Fleckenstein, 1958] J.O. Fleckenstein : L'école mathématique bâloise des Bernoulli à l'aube du XVIII<sup>e</sup> siècle, Conférence faite au Palais de la Découverte le 3 mai 1958, Université de Paris

[Fontenelle, 1707] B. le Bovier de Fontenelle : Eloge de M. Bernoulli, Mémoires de l'Académie royale des sciences pour l'année 1706, Paris 1707, Partie Histoire, p.139-150

[Hofmann, 1956] J.E. Hofmann : Über Jacob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik = Monographies de l'Enseignement mathématique 3, Genève 1956

[Leibniz, Math. Schriften] G. W. Leibniz : Mathematische Schriften 2-3, hrsg. von C.I. Gerhardt, Hildesheim-New York : Georg Olms Verlag, 1971 (Reprint de l'éd. originale, Halle 1855)

[L'Hôpital, 1696] G.F.A. de l'Hôpital : Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes, Paris 1696

[Mach, 1904] E. Mach : Mécanique. Exposé historique et critique de son développement, Paris 1904

[Merian, 1860] P. Merian : Die Mathematiker Bernoulli. Jubelschrift zur vierten Säcularfeier der Universität Basel, Basel 1860

[Meusnier, 1987] N. Meusnier : Jacques Bernoulli & l'ars conjectandi. Documents pour l'étude de l'émergence d'une mathématisation de la stochastique, brochure de l'IREM de Rouen, 1987

[Meusnier, 1992] N. Meusnier : L'usage de l'art de conjecturer en droit. Traduction française avec des notes, Centre d'analyse et de mathématiques sociales, Paris, 1992

[Montmort, 1708] P. Rémond de Montmort : Essay d'analyse sur les jeux de hazard, Paris, 1708

[Ohly, 2001] S. Ohly : Johann Bernoullis mechanische Arbeiten 1690-1713, Dissertation der Universität Bielefeld unter der Leitung von Hans Niels Jahnke, 2001.

[Peiffer, 1988] J. Peiffer : L'école mathématique bâloise des Bernoulli, Préfaces 9, 101-115

[Peiffer, 1989] J. Peiffer : Le problème de la brachystochrone à travers les relations de Jean I Bernoulli avec L'Hôpital et Varignon, Studia Leibnitiana Sonderheft 17 : Der Ausbau des Calculus durch Leibniz und die Brüder Bernoulli (Symposium der Leibniz-Gesellschaft und der Bernoulli-Edition der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, 15. bis 17. Juni 1987), hrsg. von Heinz-Jürgen Heß und Fritz Nagel, Stuttgart 1989, 59-81

[Peiffer, 1991] J. Peiffer : Le problème de la brachystochrone, un défi pour les méthodes infinitistes de la fin du XVIIème siècle", Sciences et techniques en perspective, Nantes 1991, 54-81

[Wolf, 1859] R. Wolf : Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz, 2. Cyclus, Zürich 1859

## **ANNEXE**

### **L'Ars conjectandi dans les correspondances des Bernoulli Quelques extraits**



**Pierre Rémond de Montmort - Johann I Bernoulli**

[Ms UB Basel L I a 665]

Montmort, le 15 septembre 1709 :

[Il vient de recevoir la dissertation de Nicolas I Bernoulli et en dit :] « le seul défaut de cet ouvrage c'est d'être trop court, et je ne me console de sa brièveté que par l'espérance que nous avons de voir bientôt le grand ouvrage de feu Monsieur votre frère. je ne peux m'empêcher de vous prier une seconde fois au nom de tous les Geometres de nous en procurer l'édition. ce soin convient à un frère et cet honneur n'est dû qu'au 1<sup>er</sup> Geometre de l'Europe. Vous m'avez fait l'honneur de m'écrire que vous vous en chargeriez volontiers, mais que les héritiers de M. votre frère n'étoient pas disposés à vous confier le manuscrit. je ne peux comprendre quel peut être le sujet d'une méfiance si préjudiciable aux Geometres, et je sçai certainement que vous êtes le seul dont l'ouvrage de M. votre frère puisse recevoir sa dernière perfection... »

Bernoulli, le 17 mars 1710,

[Il envoie ses remarques sur le livre de Montmort, qui seront publiées dans la 2<sup>e</sup> édition de 1713] « Il seroit à souhaiter que vous voulussiez prendre la peine d'étendre votre livre et d'en faire un ouvrage plus ample et plus riche, la matière ne vous manqueroit pas, sur tout si vous vouliez entrer dans la morale et la politique, comme mon frère avoit commencé de faire dans son ouvrage, qui selon toutes les apparences ne paroitra jamais, tandis que ses héritiers persistent à ne me point prier de me charger du soin de le faire imprimer, et moy à ne leur point montrer d'empressement de leur demander le manuscrit, à eux qui ont tant de méfiance de moy, craignant peu être que je ne m'attribuasse la gloire d'en être Auteur ; sottise peur ! comme si je n'avois pas assez de matière de mon propre fond, si je voulusse me repaître de cette vaine gloire »

Montmort, le 15 novembre 1710 :

« que je suis fâché, Mr., que vous n'avez point entre les mains l'ouvrage de M. votre frère. quel dommage que les savantes veilles soient inutiles au public. Si ceux qui l'ont entre les mains vouloient me le confier, je me chargerois de le faire imprimer à mes dépens, ainsi que j'en ai déjà fait imprimer plusieurs pour le bien du public et l'avancement des sciences. Si l'on vouloit même en tirer du profit, je pourrois composer là-dessus ; car je vous avoue que j'ay une extrême avidité pour les belles choses. Si vous voulez bien vous charger, Monsieur, de faire cette proposition et qu'elle soit refusée, pourrois je au moins espérer que vous voulussiez me faire le plaisir de faire un extrait de toutes les propositions de ce manuscrit, surtout de la 4<sup>ème</sup> partie. Je serois ravi de voir les vûes qu'a eu M. votre frère, et ajoutant les siennes à celles que j'ay déjà, je tacherois de mettre en état d'en profiter pour une deuxième édition de mon livre ».

Montmort, le 5 mars 1713 :

« Mr. votre neveu m'a appris que le livre de feu Mr. votre frère paroistroit bientôt. on feroit bien plaisir aux Geometres si l'on donnoit en même temps ce qui se trouvera de plus complet dans ses manuscrits ».

**Nicolaus I Bernoulli - Abraham de Moivre**

Nicolaus I Bernoulli à De Moivre, le 30 décembre 1713 :

« Le Livre de feu mon oncle intitulé *Ars Conjectandi* est sorti de presse , je prendrai des mesures pour vous en envoyer bientôt un exemplaire, comme aussi à Mr. Newton et à Mr. Halley » [Ms UB Basel L I a 24, 27v].

De Moivre à Nicolaus I Bernoulli, le 3 mars 1714

« il est temps que je vous parle du livre de Monsieur votre Oncle de *Arte conjectandi*, il y en a icy quatre exemplaires dont j'en ay acheté un, je vous suis obligé de celui que vous voulez m'envoyer, et je le recevray avec plaisir, c'est un Ouvrage qui soutient parfaitement bien la reputation de son Auteur, je l'ay lu avec beaucoup d'avidité, et j'en ay été charmé. il a bien senti que la simple methode des Equations auroit été defectueuse s'il n'y eut ajouté la Doctrine des combinaisons qu'il employe avec beaucoup d'art, il a fort bien demelé les Propositions d'Huygens qui pouvoient être prises dans un double sens, et je le loue de les avoir resolues dans ce double sens, cela servira a nous mettre d'accord Monsieur de Montmaur et moy dans deux ou trois endroits, ou nous les avons pris dans un sens different, je croy pourtant avoir attrapé le sens naturel, et il me semble vous avoir ouy dire que Monsieur votre Oncle et vous etiez de mon opinion. Le Probleme des experiences est d'une beauté infinie, et le Probleme de la Poule est parfaitement bien traité. je souhaiterois de toute mon ame qu'il eut achevé luy même ce qu'il avoit si bien commencé, je crois que c'est vous Monsieur qu'il faut que je remercie de la mention honorable qui est faite de moy dans la preface, je voudrois avoir l'habileté suffisante pour poursuivre cette matiere, mais outre que l'habileté me manque, il me manque encore une chose essentielle, c'est le temps que je suis obligé de donner presque tout entier à mes Ecoliers. Si vous, Monsieur, ou Monsieur de Montmaur vouliez travailler à cette matiere, le Public vous en sauroit bon gré, mais les essays que vous avez donnez sur cette matiere semblent être un gage de ce que vous ferez dans la suite, je vous y exhorte tres sincerement, et je vous reponds du succes » [Ms UB Basel L I a 22, 180a].

### **Johann I Bernoulli - John Arnold<sup>39</sup>**

Bernoulli, le 18 juillet 1713 :

« Quant aux nouvelles de la Republique des Lettres, le traité de *arte conjectandi* de feu mon Frere n'est pas encore sorti de la presse ; c'est que le libraire veut joindre ses dissertations de *seriebus*, dont il n'a pas encore fait tailler les figures » [Ms UB Basel L I a 673,1].

Bernoulli, le 28 septembre 1713 :

« le traité de feu mon Frere de *arte conjectandi* a enfin été publié ; j'apprens que Mrs. Thurneysen en ont déjà envoyé un bon nombre d'exemplaires en France, si bien que vous l'aurez peutetre vû plutôt que moy » [Ms UB Basel L I a 673,3].

### **Johann I Bernoulli – Abraham de Moivre<sup>40</sup>**

---

<sup>39</sup> John Arnold est un Anglais résidant à Paris.

Johann I Bernoulli à De Moivre, le 23 novembre 1712 :

« Mon neveu qui a eu l'occasion d'approfondir cette matiere [celle traitée dans l'ouvrage de Montmort], ayant été obligé d'écrire une dissertation inaugurale, vos aura dit qu'on a commencé à imprimer l'ouvrage posthume de feu mon frere, qu'il a intitulé « Ars conjectandi », quoiqu'il soit très imparfait, et à peine achevé jusqu'à la moitié, le principal et le plus crieux qui devoit rouler sur la morale, n'ayant pu être exécuté à cause de la mort de l'auteur : comme les héritiers de feu mon frere le font imprimer sans me consulter là-dessus, je n'ai pas voulu m'y ingérer, ni offrir mes soins qu'il soit exactement imprimé ; cependant celui qui a entrepris la correction, n'entend pas la matiere, c'est un aveugle à discerner les contours, c'est un ἀγεωμετρητο<sup>?</sup> ; je vous le dis afin que vous ne vous scandaliez pas, quand vous verrez paroître un monstre qui portera le nom de feu mon frere ; c'est dommage que ce livre ne soit pas parvenu à sa perfection. On me dit (car je n'ai pas lû le manuscrit) qu'il devoit contenir quelque chose d'extraordinaire ; effectivement le projet que mon frere m'en fit voir, il y a bien 20 ans, promettoit bien des curiosités sur l'art de conjecturer : on en verra peut-être quelques traits dans ce qui paroitra, pourvû que l'impression ne soit pas trop défigurée par un nombre innombrable de fautes qui s'y glisseront par l'ignorance du correcteur » [Wollenschläger 1933, 275-276].

De Moivre, le 17 décembre 1712 :

« P.S. Je serai bien aise de voir le traité de M. votre frere « De arte conjectandi » quand il paroitra ; c'est dommage que ceux qui ont soin de l'impression n'entendent pas la matiere ; mais j'espere que les lecteurs sont equitables » [Wollenschläger 1933, 280].

Johann I Bernoulli, le 18 février 1713 :

« Je ne sçai jusqu'où on en est venu avec l'impression du livre estropié de mon frere « De arte conjectandi » ; l'imprimeur aussi bien celui qui en a le soin me le cachent soigneusement si bien, que jusqu'aujourd'hui je n'en ai encore vû une seule feuille» [Wollenschläger 1933, 286].

Johann I Bernoulli, le 20 mars 1714 :

« Le livre posthume de feu mon frere « De arte conjectandi » est devenu publié depuis près d'un an : Vous en devez avoir reçu un exemplaire par le soin de mon neveu qui en a envoyé plusieurs en Angleterre ; c'est lui qui a fait la préface après son retour de son voyage, et qui a changé et corrigé plusieurs fautes qui y seroient encore, s'il étoit arrivé ici un peu plus tard » [Wollenschläger 1933, 288].

---

<sup>40</sup> Cette correspondance a été publiée par Karl Wollenschläger in *Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel* XLIII, 1931-32, Basel 1933, 151-317

## Johann I Bernoulli – Pierre Varignon

Varignon, le 20 janvier 1714 :

« Je souhaite fort de la voir [la réponse de Leibniz au *Commercium epistolicum*], aussi bien que le livre *De arte conjectandi* de feu M. votre Frere, pour en profiter. J'appris à mon retour de la Campagne qu'il en étoit venu ici un exemplaire pour Essay au libraire, pour qui M. König en doit faire venir, & qu'il fut acheté aussi tost par M. Nicole pour M. de Montmort, qui est (je croy) le seul qui l'ait en ce pays-ci » [Ms UB Basel L I a 670, 114\*].

Johann I Bernoulli, le 10 février 1714 :

« Le Balot de livres, où se trouve votre exemplaire de *Arte conjectandi*, est enfin parti il y a quelque temps, sans cela nous l'aurions retiré pour vous l'envoyer aussy par cette commodité [la commodité étant un Polonais qui allait à Paris en qualité de comptable] » [Ms UB Basel L I a 669, 45].

Varignon, le 25 mars 1714 :

« J'ay enfin reçu le traité de *Arte conjectandi* de feu Monsieur votre Frere, dans lequel j'ay desja vu de fort belles choses, telles que je les attendois de sa grande habileté : je vous en rend tres humbles graces : j'en remercie aussi Monsieur son fils, votre Neveu, par une lettre que je joins à celle-ci dans un paquet que j'envoie à M. votre autre Neveu, son cousin, Jurisconsulte & Mathematicien » [Ms UB Basel L I a 670, 115\*].