Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique

Electronic Journ@l for History of Probability and Statistics

Vol 7, n°1; Juin/June 2011

www.jehps.net

PRINCIPES MATHÉMATIQUES

DE THÉOLOGIE CHRÉTIENNE

John CRAIG

traduction française par Jean-Yves Guillaumin[1]
édition par Thierry Martin[2]

---

[1] Institut des sciences et techniques de l'Antiquité, Université de Franche-Comté
[2] Logiques de l'agir, Université de Franche-Comté

PREAMBULE

Il n'existait jusqu'à ce jour aucune traduction française des *Theologiae Christianae Principia Mathematica* de John Craig, dont l'édition latine originale fut publiée à Londres en 1699. Les deux premiers chapitres du texte furent partiellement traduits en anglais sous le titre « Craig's Rules of Historical Evidence » dans *History and Theory : Studies in the Philosophy of History* (Beiheft 4), 1964, pp. 1-31.

Nous publions ici la traduction française de l'ensemble du texte, traduction due à Jean-Yves Guillaumin. Certes, les chapitres 3 à 6, omis de la traduction anglaise, ne traitent pas de la probabilité des témoignages. Ils font cependant pleinement partie du texte de Craig ; on peut même dire qu'ils en sont l'aboutissement.

Nous avons pris le parti de respecter, autant que possible, le symbolisme du texte original, écrivant par exemple v.V :: AB × AC.EF × AC, et non $\frac{v}{V} = \frac{AB \times AC}{EF \times AC}$. Une exception toutefois, nous avons  transcrit l'expression par la formule $r > 1$.

Nous donnons à la suite la reproduction de l'édition originale que la Bibliothèque nationale de France nous a autorisé à reproduire.

Notre but n'est pas ici de fournir une analyse du texte de Craig, mais seulement d'en livrer les versions latine et française à titre de document d'accompagnement de ce volume du *Jehps*. Nous nous permettons cependant de renvoyer le lecteur désirant disposer d'une étude permettant d'en comprendre la portée et la place dans l'histoire du calcul des probabilités, aux textes de Stephen Stigler, « John Craig and the Probability of History: From the Death of Christ to the Birth of Laplace » (*Journal of the American Statistical Association*, vol. 81, n° 396, déc. 1986, pp. 879-887), de Richard Nash, *John Craige's Mathematical Principles of Christian Theology* (Carbondale : Southern Illinois University Press, 1991), ainsi qu'à ceux de Jean-Pierre Clero, « La réflexion mathématique et philosophique du témoignage chez Locke, Craig et Hume » (*Dix-huitième siècle*, 2007/1, n° 39, p. 39-61) ou « La révolution des témoignages dans le calcul des probabilités » (*Journal électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique/ Electronic Journal for History of Probability and Statistics*, vol. 2, n° 1b, nov. 2006).

Thierry MARTIN

PRINCIPES MATHÉMATIQUES DE THÉOLOGIE CHRÉTIENNE

John CRAIG

AU RÉVÉREND

PÈRE EN CHRIST

ET

SEIGNEUR

MONSEIGNEUR GILBERT

par la Providence Divine Évêque

de SALISBURY,

et CHANCELIER

du Très Noble Ordre de la Jarretière,

ce Traité Théologique

est présenté très humblement par

John CRAIG

[page V]

PRÉFACE AU LECTEUR

Je sais combien est difficile autant qu'inhabituelle la tâche dont je me charge quand j'entreprends de ramener aux lois de la géométrie des choses si éloignées de nos sens ; mais, en réfléchissant sérieusement à l'importance des progrès dans les sciences de la nature qu'ont pu amener et démontrer à partir de la géométrie les mathématiciens tant anciens que modernes, j'ai été conduit à former l'espoir que cette science pourrait avoir aussi quelque utilité en théologie ; car il semble tout à fait absurde que l'utilité d'une science si divine ne puisse s'étendre au-delà des étroites limites de la vie d'ici-bas ; puisque c'est par des règles géométriques que sont établies toutes les œuvres de la nature, qui pourrait douter que ces règles nous conduisent à la connaissance du très sage Créateur de la nature ? Il est tout à fait certain que plus parfaite est notre connaissance d'une réalisation, mieux nous pouvons donner de la puissance et de la sagesse de son auteur une définition et un jugement. À la question de savoir quelle est l'occupation de Dieu, le divin Platon, ce grand philosophe, a très bien répondu que « Dieu fait de la géométrie » ; et c'est pourquoi il excluait à bon droit de son école philosophique tous ceux qui étaient ignorants de la géométrie. Car vaine est la philosophie qui ne nous conduit pas à la connaissance de la nature et de son Créateur ; [p. VI] et la connaissance de l'une et de l'autre reste tout à fait étroite si nous espérons la tirer d'ailleurs que de la géométrie. Bien plus, si manifeste est l'utilité de cette science très noble, qu'elle est remarquablement utile pour établir la probabilité de la religion révélée elle-même, c'est-à-dire de la foi ; c'est ce que tu découvriras, je pense, lecteur bienveillant, pour ta pleine satisfaction, dans ce traité que je publie aujourd'hui. Tu n'y verras traités que les principes généraux de la religion, ceux principalement que j'estime utiles pour fonder la vérité de la sainte doctrine du Christ et notre espérance de la vie future. Et cela me paraît d'autant plus indispensable que sont maintenant plus fortes les attaques portées par les athées et les déistes contre la vérité de notre religion. Je ne m'occupe pas ici de rechercher quelles sont les causes principales de la diffusion de cet athéisme ; je me propose seulement d'apporter quelque remède — si je le peux — contre les ravages de cette maladie.

Il y aura, je n'en doute pas, des gens qui, conduits par un zèle plus grand que leur jugement, condamneront absolument mon entreprise ; et qui concluront à la légère que je ruine la religion plutôt que je ne la renforce. Ces gens, prenant ensemble tous les dogmes de la religion comme des vérités très assurées, penseront que j'ai pris sur moi une chose indigne du christianisme, en entreprenant seulement d'en prouver la probabilité. Je n'ai qu'une chose à leur dire : prisonniers de leurs préjugés, ils n'ont pas jusque-là examiné avec assez de soin les fondements de la religion qu'ils professent, ni compris comme il faut la nature de la foi qui est si fortement louée dans les saintes Écritures. Qu'est-ce, en effet, que la foi, sinon cette persuasion de l'esprit par laquelle, grâce à des moyens déduits de la probabilité, nous croyons en la véracité de certaines propositions ? [p. VII] Si la persuasion naît de la certitude, alors ce n'est pas la foi, mais la science qui est produite dans l'esprit. De même en effet que la probabilité engendre la foi, de même elle détruit la science ; et inversement, la certitude engendre la science et, en même temps, détruit la foi. C'est pourquoi la science supprime toute possibilité de doute ; tandis que la foi laisse toujours quelque hésitation dans l'esprit ; et si la foi est distinguée par de si grandes louanges et a de si grandes récompenses liées à elle, c'est parce que les hommes, nonobstant tous les embarras qui pèsent sur eux, progressent sur le droit chemin de la vertu et de la piété et cherchent de toutes leurs forces à offrir à leur Créateur tout-puissant ce qu'ils croient lui devoir être agréable ; ils montrent[3] qu'ils sont tellement prêts à se plier à tous les ordres divins qu'ils ne veulent pas même rejeter ce qui provient de Lui seulement de façon probable.

Or donc, je ne prévois que deux objections de quelque importance, dont voici la première : je n'aurais pas défini avec exactitude le moment où la probabilité de l'histoire du Christ doit s'évanouir, pour n'avoir pas pris en compte de nouveaux degrés de probabilité qui doivent surgir de l'accomplissement de certaines prophéties, et pour avoir pris cette probabilité toujours décroissante en une certaine proportion. Mais la réponse est facile : je n'avais à considérer l'histoire du Christ Sauveur que telle qu'elle a été transmise jusqu'à présent à travers un certain nombre de siècles ; si je prenais en compte dans mon calcul ces prophéties promises à l'accomplissement, je postulerais avec impudence ce qui est l'objet de la recherche. Ensuite, ce nouveau degré de probabilité qui devrait naître de l'accomplissement des prophéties ne sera pas d'une grande importance, excepté pour les hommes du siècle dans lequel la réalisation répond à la prédiction ; en tout cas il ne sera pas si important qu'il puisse causer le bouleversement et moins encore la ruine de notre calcul. [p. VIII] La seconde objection paraît plus importante. C'est que notre calcul semble faire chanceler l'autorité de Moïse et de tous les autres écrivains de l'Ancien Testament. Eh bien, je l'avoue ; et, si la venue du Christ ne leur avait pas ajouté une nouvelle probabilité, c'en serait fait depuis un certain nombre de siècles de leur autorité. Le Fils de l'Homme est venu dans le but d'accomplir la Loi et les prophètes ; pour restaurer leur autorité qui, pour ainsi dire, était en train de s'évanouir. C'est pourquoi le calcul que j'ai entrepris consolide les fondements du christianisme et, en même temps, ruine complètement le judaïsme.

---

[3] On traduit ici *ostendunt*, non pas *offendunt* du texte imprimé.

[p. 9]

Principes mathématiques de théologie chrétienne

DEFINITIONS

1. Le bonheur est la sensation agréable de l'esprit que produisent en nous les objets qui conviennent à la nature humaine.

2. L'intensité du bonheur est sa grandeur, qui doit être déterminée d'après la grandeur de cette sensation agréable de l'esprit.

3. La durée du bonheur est la quantité du temps pendant lequel cette sensation agréable de l'esprit se maintient sensiblement en nous.

4. Le bonheur égal est celui qui maintient des degrés d'intensité identiques pendant tous les moments de sa durée, pris un par un.

5. Le bonheur qui croît uniformément est celui dont les degrés d'intensité croissent uniformément pendant tous les moments de sa durée, pris un par un.

6. La probabilité est l'apparence d'accord ou de désaccord entre deux idées, à travers des arguments dont la conclusion n'est pas assurée ou du moins n'est pas perçue comme assurée.

7. La probabilité naturelle est celle qui se déduit d'arguments conformes à notre observation ou à notre expérience.

8. La probabilité historique est celle qui se déduit des témoignages d'autres personnes qui affirment leur observation ou leur expérience.

[p. 10]

9. La suspicion de la probabilité historique est le mouvement de l'esprit en direction des parties contradictoires de l'histoire.

10. La promptitude de suspicion est la faculté grâce à laquelle l'esprit est poussé en direction des parties contradictoires de l'histoire à un certain moment du temps comme pendant un certain espace de temps.

Scolie. Par « espace », j'entends ici le degré d'assentiment que l'esprit accorde aux arguments contradictoires de l'histoire. Je conçois naturellement l'esprit comme une chose mobile, et les arguments comme les forces motrices qui le poussent dans telle ou telle direction.

AXIOMES

1. Tout homme s'efforce de produire[4] du bonheur dans son esprit, de l'augmenter ou de se maintenir dans son état de bonheur.

2. Les efforts des sages sont en proportion directe de la véritable valeur de leurs espérances. Quiconque met son soin à suivre ce calcul de l'effort est le plus sage ; celui qui y met moins d'exactitude est réputé moins sage.

3. Les efforts des non sages sont en proportion inverse de la véritable valeur de leurs espérances.

Cet axiome ne doit pas être compris en rigueur mathématique. Ce que je veux ici indiquer, c'est seulement que ces gens consacrent de plus grands efforts à obtenir une espérance dont la vraie valeur est a qu'à obtenir une autre espérance dont la vraie valeur est na, étant posé que n est plus grand que l'unité.

HYPOTHESE

Tous les hommes ont un droit égal à être crus, à moins que le contraire ne soit établi par ailleurs. La justesse de cette hypothèse est fondée sur le fait que toutes les choses de la même nature sont pourvues des mêmes qualités naturelles, que ces qualités concernent l'âme ou le corps. Et c'est en harmonie avec la pratique commune des hommes, qui, dans le jugement de n'importe quelle affaire de cette vie, reçoivent comme témoin n'importe quel homme, à moins qu'il ait de quelque manière perdu ce droit naturel qui est le sien.

[p. 11]

CHAPITRE I

La probabilité historique transmise oralement

Il y a trois sources principales à la diminution de la probabilité historique : le nombre des témoins par l'intermédiaire desquels se fait successivement la transmission de l'histoire ; la distance de l'endroit auquel est rapporté le sujet (mais cela ne concerne que les histoires dont le sujet principal est durable ; s'il est passager, la probabilité n'est nullement diminuée par l'éloignement du lieu) ; troisièmement, l'espace de temps à travers lequel l'histoire est transmise. Quant à la proportion selon laquelle la probabilité diminue dans chaque cas, on la montrera dans les propositions suivantes. Pour les autres causes de diminution de la probabilité historique, je ne les considère pas ici ; d'un côté, parce qu'elles sont vraiment infimes, par ailleurs et surtout, parce qu'elles ne sauraient détruire la force des conclusions principales et qu'elles peuvent être, d'après les principes ici posés, ramenées au calcul.

---

[4] « Produire » plutôt que « prolonger » de la traduction anglaise, « to prolong », parce que le même verbe latin *producere* est ensuite employé de façon non ambiguë (ch. I, Prop. II. Theor. II), avec le sens de « produire ».

Proposition I. *Théorème* I.

Toute histoire non contradictoire confirmée par le témoignage d'un premier témoin possède un certain degré de probabilité.

Car une grande probabilité est composée de nombreux témoignages de premiers témoins, comme un grand nombre est composé de nombreuses unités. Il peut certes se faire qu'un tel degré de probabilité soit si réduit que notre esprit puisse à peine percevoir sa force, de même que dans le mouvement des corps, le degré de vitesse est parfois si réduit que notre œil ne peut distinguer le mouvement. Mais le degré de vitesse, dans ce cas, aussi bien que le degré de probabilité dont nous parlions, est d'une grandeur déterminée, et, répété un grand nombre de fois, produit une probabilité perceptible.

Proposition II. *Théorème* II.

La probabilité historique s'accroît en proportion du nombre de témoins qui racontent l'événement.

Car un seul témoin produit un seul degré de probabilité (d'après la prop. I). Deux témoins en produisent donc deux ; trois témoins produisent trois degrés de probabilité ; etc. Ce qu'il fallait démontrer.

[p. 12]

Corollaire. Soit une histoire quelconque H, rapportée à un homme quelconque A par un nombre $n + m$ de témoins premiers dont un certain nombre, par exemple n, vont raconter la même histoire à un deuxième homme, B. La probabilité de A sera à la probabilité de B comme est $n + m$ à n. Ainsi, par exemple, si l'on a $n = 4$ et $m = 8$, la probabilité de A sera triple de la probabilité de B.

Proposition III. *Théorème* III.

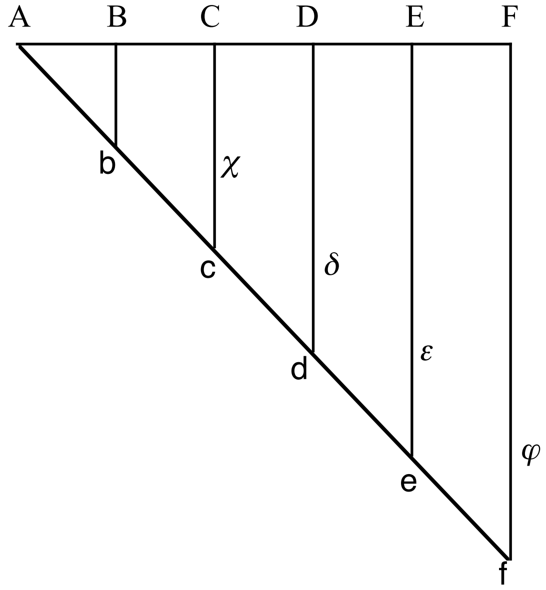
Les soupçons de la probabilité historique, quand elle est transmise par une suite de témoins uniques, toutes autres choses étant égales, s'accroissent en proportion du nombre de témoins par l'intermédiaire desquels l'histoire est transmise.

Soit s la somme totale de la suspicion que nous avons sur la véracité et sur les autres qualités du témoin parfait : alors, si un seul témoin donne s, deux témoins donneront 2s, trois témoins 3s ; et de façon générale, un nombre n de témoins donnera ns soupçons. Car s est de la même quantité dans chacun des témoins (par hypothèse).

Corollaire. Soit M le nombre de témoins par l'intermédiaire desquels une histoire est successivement transmise : $(M - 1)s$ sera la somme du soupçon transmise au dernier témoin ; car il a les suspicions de tous les témoins, sauf une, qui naîtra de la propre relation qu'il fera, et que donc il ne se transmet pas à lui-même.

Proposition IV. *Lemme* I.

Les vitesses de suspicion produites en des temps égaux s'accroissent en progression arithmétique.



Soit, dans la figure suivante, AF le temps pendant lequel est transmise une histoire ; qu'on le suppose divisé en parties égales les plus petites possible AB, BC, CD, DE, EF. Et soit la ligne Bb, perpendiculaire à AF, la vitesse produite par le segment de temps AB ; je dis qu'à la fin du deuxième segment de temps, BC, la vitesse de suspicion sera Cc = 2Bb ; et qu'à la fin du troisième segment de temps, CD, la vitesse de suspicion sera Dd = 3Bb ; et ainsi de suite.

[p. 13]

Car l'histoire transmise pendant l'intervalle de temps BC aurait une suspicion Cx (= Bb), même avec la cessation de toute cause de suspicion ; donc, quand on voit agir pendant la période BC la même cause de suspicion que pendant AB, la vitesse Cx augmentera d'une quantité xc = Bb, parce que les temps sont égaux et que la cause de la suspicion est supposée être une force uniforme. En conséquence, la vitesse de suspicion, à la fin du deuxième segment de temps, BC, est Cc = Cx + xc = 2Bb. De la même façon, si à l'instant C cessait toute cause de suspicion, l'histoire continuerait avec la suspicion conçue en C, c'est-à-dire que, portée jusqu'à D, sa vitesse serait Dd = Cc = 2Bb. Donc, quand agit pendant le temps CD la même cause uniforme de suspicion qui agissait pendant le laps de temps égal AB, la vitesse de suspicion Dδ augmentera de la quantité δd = Bb ; et ainsi, à l'instant D, la vitesse de suspicion sera Dd = Dδ + δd = 3Bb. De la même façon, si au moment D toute cause de suspicion venait à cesser, l'histoire continuerait avec la suspicion conçue en D, c'est-à-dire que, parvenue en E, sa vitesse serait Eε = Dδ = 3Bb. Donc, si pendant le laps de temps DE s'exerce la même cause uniforme de suspicion qui agissait pendant le laps de temps égal AB, la vitesse Eε s'augmentera de la quantité εe = Bb ; et ainsi, la vitesse de suspicion, en E, sera Eε + εe = 4Bb. Enfin, si la cause de suspicion cessait en E, l'histoire continuerait avec la vitesse de suspicion conçue en E, c'est-à-dire que, parvenue en F, elle aurait une vitesse Fϕ = Eε = 4Bb ; donc, si pendant la dernière période EF s'exerce la cause de suspicion identique et toujours uniforme qui agissait pendant la première période AB, égale aux suivantes, la vitesse de la suspicion Eϕ s'augmentera de la quantité ϕf = Bb, et ainsi, la vitesse totale en F sera Ff = Fϕ + ϕf = 5Bb. D'où il est assuré que, dans les périodes égales AB, BC, CD, etc., les vitesses de suspicion Bb, 2Bb, 3Bb sont en progression arithmétique simple. Ce qu'il fallait démontrer.

Proposition **V.** *Théorème* **IV.**

Les suspicions de probabilité historique transmises sur une période de temps quelconque, toutes choses étant par ailleurs égales, s'accroissent en raison double des durées prises depuis le début de l'histoire.

Par les extrémités b, c, d, e, f des segments Bb, Cc, Dd, Ee et Ff marquant les degrés de vitesse (segments qui sont placés perpendiculairement au segment AF marquant le temps), menons la ligne Abcdef ; ainsi, l'aire de la figure AFf représentera la suspicion réalisée dans la période AF, tout comme l'aire ADd représentera la suspicion effective dans la période AD ; etc. Maintenant, puisque Bb, Cc, Dd, etc., sont dans la progression arithmétique 1, 2, 3, 4, etc. (d'après la proposition 4), la ligne Abcdef est droite, comme cela est connu d'après les Éléments. Ainsi, la suspicion produite pendant le laps de temps AF est à la suspicion produite pendant le laps de temps AD comme est l'aire du [p. 14] triangle AFf à l'aire du triangle ADd. Mais le triangle AFf est au triangle ADd comme est le carré du segment AF au carré du segment AD, comme cela est assuré d'après les Éléments. Donc, la suspicion surgie dans le laps de temps AF est à la suspicion surgie dans le laps de temps AD comme est le carré du segment AF au carré du segment AD. C'est-à-dire que les suspicions sont en raison double des durées prises depuis le début de l'histoire. Ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. Soit AF, la durée pendant laquelle une histoire est transmise, égale à T, et soit K la suspicion qui en est surgie ; soit AD = t une autre durée donnée quelconque, et soit k la suspicion connue qui en est surgie ; on aura $K = \frac{T^2k}{t^2}$.

Proposition VI. *Théorème* V.

Les suspicions de probabilité historique transmises sur des distances quelconques, toutes choses étant égales, croissent en raison double des distances prises depuis le début.

La démonstration est identique à la précédente : si A est l'endroit auquel est rapporté le sujet d'une histoire, soit q ; et si celle-ci est transportée à une distance quelconque AF = D, d'où surgit la suspicion Q, d'une autre distance connue quelconque AD = d surgit aussi une suspicion connue qui sera égale à $Q = \frac{D^2q}{d^2}$.

Proposition VII. *Problème* I.

Déterminer la quantité de probabilité d'une histoire quelconque H transmise par l'intermédiaire d'une succession de témoins chaque fois uniques.

Désignons par x la totalité de la probabilité que le premier témoin peut transmettre au deuxième après les intervalles de temps et de lieu les plus petits possible ; et soit M (ou m) le nombre de témoins par l'intermédiaire desquels se fait, en un temps donné T et à une distance donnée D, la transmission de l'histoire H ; soit s la suspicion de quantité connue que nous supposons engendrée par un seul témoin quelconque ; k la suspicion connue que nous supposons produite par un temps donné[5] quelconque t ; et q la suspicion, également connue, que nous supposons engendrée par une distance donnée quelconque d. Soit enfin P la probabilité cherchée. On aura $P = x + (M-1)s + \frac{T^2k}{t^2} + \frac{D^2q}{d^2}$.

[5] Le texte latin donné dans *History and Theory* est fautif ; il écrit *data* au lieu de *dato*.

En effet, $(M-1)s$ est le total de la suspicion qui naît du nombre de témoins (d'après la proposition 3) ; et $\frac{T^2k}{t^2}$ est le total de la suspicion produite par le temps donné T (d'après [p. XV] la proposition 5) ; et $\frac{D^2q}{d^2}$ est le total de la suspicion que donne la distance D (d'après la proposition 6). Donc, $(M-1)s+\frac{T^2k}{t^2}+\frac{D^2q}{d^2}$ est le total de la suspicion qui affectera une histoire H transmise par un nombre de témoins M après un laps de temps T et à une distance D ; et, puisque x est par hypothèse sa possibilité totale de départ, il est évident que $P = x+(M-1)s+\frac{T^2k}{t^2}+\frac{D^2q}{d^2}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Scolie. Puisque x désigne le total de la probabilité que le premier témoin transmet au deuxième, ce premier témoin n'est pas inclus dans le nombre noté par M ; dans ce qui suit, nous le distinguerons donc de tous les autres témoins en l'appelant l'historien. Par témoins, nous entendons tous ceux qui tirent de l'observation ou de l'expérience de l'historien la connaissance qu'ils ont eux-mêmes de l'histoire.

Exemple : Quelle est la quantité de probabilité qui se trouve dans le dixième historien d'une histoire H après un laps de temps 10t et à une distance 8d ? Puisque, dans ce cas, $M = 10$, $T = 10t$, $D = 8d$, on a, d'après la règle précédente, $P = x + 9s + 100k + 64q$, pour la probabilité de ce dixième témoin.

Il faut d'ailleurs remarquer que x, s, t, k, d, q sont des quantités connues ; car tel est le nombre d'unités nécessaires pour mesurer la possibilité, qui peuvent donc, comme dans tout autre genre de mesure, être assumées selon le bon vouloir de celui qui mesure.

***Proposition* VIII. *Problème* II.**

Étant donné le nombre des séries de témoins, et le nombre des historiens transmettant une histoire au premier témoin de chaque série, et aussi les temps et les distances de transmission d'une histoire H à un homme quelconque A : trouver la quantité de probabilité que possède A sur la véracité de l'histoire H.

Trouvons la probabilité transmise séparément par chaque série (d'après la proposition 7) : la probabilité recherchée, celle qui est transmise à un homme A par toutes ces séries[6], sera la somme de toutes ces probabilités.

Exemple : Que l'histoire H soit parvenue à A par le canal de deux séries de témoins. Et soit b le nombre d'historiens, m le nombre de témoins, T le temps, D la distance de transmission de l'histoire dans la première série ; et c le nombre d'historiens, n le nombre de témoins, G le temps et L la distance de transmission de l'histoire H à A dans la seconde série de témoins. bx est la probabilité du premier témoin de la première série, et cx la probabilité du premier témoin de la seconde série (d'après la proposition 2). Donc (d'après la proposition 7), on trouvera :

[6] Nous ne suivons pas ici la traduction anglaise.

$$bx + (m-1)s + \frac{T^2k}{t^2} + \frac{D^2q}{d^2}$$

probabilité transmise à A par la première série.

$$cx + (n-1)s + \frac{G^2k}{t^2} + \frac{L^2q}{d^2}$$

probabilité transmise à A par la seconde série.

Additionnons ces deux probabilités, et la somme des deux, c'est-à-dire

$$bx + cx + (m-1+n-1)s + \frac{T^2+G^2}{t^2}k + \frac{D^2+L^2}{d^2}q$$

sera la probabilité totale transmise à A par les deux séries.

Corollaire : Au cas où le nombre d'historiens b, le nombre de témoins m, le temps T et la distance D seraient les mêmes dans toutes les séries de témoins, celles-ci étant d'un nombre a, la probabilité recherchée sera alors :

$$P = a\left(bx + (m-1)s + \frac{T^2k}{t^2} + \frac{D^2q}{d^2}\right)$$

C'est ce cas que je considère dans ce qui suit, sauf indication contraire expresse.

Proposition **IX.** *Problème* **III.**

Étant donné une histoire quelconque H, trouver une autre histoire h qui, transmise par un nombre donné a de séries de témoins, ait une probabilité qui soit dans un rapport donné à la probabilité de l'histoire donnée H.

Soit E le nombre de séries de témoins, c le nombre d'historiens, n le nombre de témoins, G le temps, et L la distance de transmission de l'histoire donnée H ; que a, b, m, T, D notent respectivement les mêmes quantités de l'histoire cherchée h ; et soit le rapport donné r à 1. C'est à partir de e, c, n, G et L, qui sont donnés, que l'on doit trouver b, m, T, D, de la façon suivante :

$$ecx + (en-e)s + \frac{eG^2k}{t^2} + \frac{eL^2q}{d^2}$$

est la probabilité de l'histoire donnée H (d'après la proposition 8, *corollaire*). Et

$$abx + (am-a)s + \frac{aT^2k}{t^2} + \frac{aD^2q}{d^2}$$

est la probabilité de l'histoire à trouver, h (d'après la proposition 8, *corollaire*). On aura donc :

$$abx + (am-a)s + \frac{aT^2k}{t^2} + \frac{aD^2q}{d^2} : ecx + (en-e)s + \frac{eG^2k}{t^2} + \frac{eL^2q}{d^2} :: r : 1,$$

d'après la condition du problème. Donc, par multiplication des extrêmes et des moyens :

$$abx + (am-a)s + \frac{aT^2k}{t^2} + \frac{aD^2q}{d^2} = recx + (ren-re)s + \frac{reG^2k}{t^2} + \frac{reL^2q}{d^2}.$$

Si l'on compare les termes homologues, on aura $ab = rec$; $am - a = ren - re$; $aT^2 = reG^2$; et $aD^2 = reL^2$; la résolution de ces équations donnera :

$$b = \frac{rec}{a}\ ;\ m = \frac{ren - re + a}{a}\ ;\ T = \sqrt{\frac{reG^2}{a}}\ ;\ D = \sqrt{\frac{reL^2}{a}}\ .$$

Ce qu'il fallait trouver.

Scolie : On dit qu'une histoire est donnée ou trouvée selon que sont donnés ou trouvés le nombre de séries de témoins, le nombre d'historiens, le nombre de témoins, la distance et le temps de la transmission effective ou virtuelle de l'histoire.

Proposition X. *Problème* IV.

Étant donné une histoire quelconque H, trouver une autre histoire h qui ait, si elle est transmise par un nombre d'historiens donné b, une probabilité qui soit dans un rapport donné à la probabilité de l'histoire donnée H.

Les quantités étant désignées comme dans la proposition précédente, on aura :

$$a\left(bx + (m-1)s + \frac{T^2k}{t^2} + \frac{D^2q}{d^2}\right) = re\left(cx + (n-1)s + \frac{G^2k}{t^2} + \frac{L^2q}{d^2}\right).$$

D'où l'on aura, après résolution des équations résultant de la comparaison des termes : $a = \frac{rec}{b}$ pour le nombre des séries de témoins ; $m = \frac{nb - b + c}{c}$ pour le nombre de témoins ; $T = \sqrt{\frac{bG^2}{c}}$ pour le temps ; $D = \sqrt{\frac{bL^2}{c}}$ pour la distance de transmission de l'histoire h à trouver, de manière que sa probabilité soit à la probabilité de l'histoire donnée H comme est r à 1.

Proposition XI. *Problème* V.

Étant donné une histoire quelconque H, trouver une autre histoire h qui ait, si elle est transmise à un témoin situé à un rang donné désigné par m, une probabilité qui soit dans un rapport donné à la probabilité de l'histoire donnée H.

Désignons les quantités comme précédemment ; à partir des quantités données e, c, n, G, L, r, m, il faut trouver a, b, T, D. La résolution des équations issues de la comparaison des termes (comme dans la proposition 9) donnera $a = \frac{ren - re}{m - 1}$ pour le nombre de séries de témoins ; $b = \frac{cm - c}{n - 1}$ pour le nombre d'historiens ; $T = \sqrt{\frac{(m-1)G^2}{n-1}}$ pour le temps ; $D = L \times \sqrt{\frac{m-1}{n-1}}$ pour la distance de transmission de l'histoire h à trouver.

Exemple : Que l'histoire donnée H soit transmise au quatrième témoin par deux séries de témoins et par trois historiens après 100 ans et à une distance de 1000 milles ; on cherche l'histoire qui ait, transmise au 5^e^ témoin, une probabilité double de celle de l'histoire donnée. Dans cet exemple, $e = 2$, $c = 3$, $n = 4$, $G = 100$, $L = 1000$, $m = 5$, $r = 2$. Ces valeurs étant substituées aux lettres dans les quantités qui viennent d'être trouvées, on aura a = 3, b = 4, $T = 200\sqrt{\frac{1}{3}}$, $D = 2000\sqrt{\frac{1}{3}}$.

D'où il est établi qu'une histoire h transmise au 5^e^ témoin par quatre historiens, par l'intermédiaire de trois séries de témoins, après un laps de temps de $200\sqrt{\frac{1}{3}}$ <ans>, et à une distance de $2000\sqrt{\frac{1}{3}}$ milles, aura une probabilité double de celle de l'histoire donnée H.

Proposition XII. *Problème* VI.

Étant donné une histoire quelconque H, trouver une autre histoire h qui ait, après un temps donné T, une probabilité qui soit dans un rapport donné à la probabilité de l'histoire H.

Résolvons les équations issues de la comparaison des termes ; on trouvera pour le nombre de séries de témoins $a = \frac{reG^2}{t^2}$; pour le nombre d'historiens $b = \frac{cT^2}{G^2}$; pour le nombre de témoins $m = \frac{nT^2 - T^2}{G^2} + 1$; et $D = \frac{TL}{G}$ pour la distance de transmission de l'histoire à trouver, h. T étant donné, on trouve aussi a, b, m, D ; on a donc trouvé l'histoire h (d'après la scolie à la proposition 9).

Proposition XIII. *Problème* VII.

Étant donné une histoire quelconque H, trouver une autre histoire h, dont le sujet est rapporté à un lieu, et qui ait, transmise à une distance donnée D, une probabilité qui soit dans un rapport donné à la probabilité de l'histoire donnée H.

Par résolution des équations issues de la comparaison des termes, on trouvera pour le nombre de séries de témoins $a = \frac{reL^2}{D^2}$; pour le nombre d'historiens $b = \frac{cD^2}{L^2}$; pour le nombre de témoins $m = \frac{nD^2 - D^2}{L^2} + 1$; et pour le temps $T = \frac{GD}{L}$. Ce qu'il fallait trouver.

Scolie. Si dans l'un de ces problèmes a, b ou m sont des fractions, on doit prendre les nombres les plus proches de ces fractions.

Proposition XIV. *Théorème* VI.

Bien que la probabilité historique transmise par un seul historien et par l'intermédiaire d'une seule série de témoins décroisse de façon continue, il n'est pas vrai qu'elle disparaisse complètement en un temps donné.

On a $x + (m-1)s + \frac{T^2k}{t^2} + \frac{D^2q}{d^2}$ la probabilité transmise par un seul historien et par l'intermédiaire d'une seule série de témoins (d'après la proposition 7). Mais si cette probabilité pouvait disparaître en un temps quelconque donné T, on aurait, dans ce cas :

$x+(m-1)s+\frac{T^2k}{t^2}+\frac{D^2q}{d^2}=0$. Mais s'il y avait un cas d'existence de cette possibilité, alors il serait possible aussi que, dans ce cas, $a\left(x+(m-1)s+\frac{T^2k}{t^2}+\frac{D^2q}{d^2}\right)=0$, quelque grand que soit supposé le nombre de séries de témoins, a. Ce qui est faux. Car le nombre a peut être supposé d'une grandeur telle qu'au début de l'histoire sa probabilité soit plus grande que n'importe quelle probabilité donnée issue d'un seul historien ; mais une probabilité plus grande que n'importe quelle probabilité donnée ne disparaît en aucun temps donné ; donc, il est impossible que, quand on prend un nombre a très grand, on ait $a\left(x+(m-1)s+\frac{T^2k}{t^2}+\frac{D^2q}{d^2}\right)=0$. Donc, il est impossible que $x+(m-1)s+\frac{T^2k}{t^2}+\frac{D^2q}{d^2}=0$. En effet, si le produit de la multiplication de deux quantités quelconques est plus grand que zéro, les facteurs aussi, pris séparément, sont nécessairement plus grands que zéro. D'où il suit que la proposition est assurée.

Scolie. Bien que la probabilité historique ne disparaisse jamais complètement, cependant, le passage du temps la rend si ténue que c'est à peine si l'esprit peut en percevoir la réalité. C'est pourquoi il nous reste à montrer la méthode de détermination du temps dans lequel disparaît le degré de probabilité nécessaire pour rendre sa réalité perceptible à l'esprit. Et pour le montrer de la façon la plus simple, je fais les hypothèses suivantes, que je ne crois pas très éloignées de la vérité. (1) Que $s=-\frac{x}{10}$, c'est-à-dire la probabilité totale transmise par l'historien au premier témoin, ne produit aucune réalité perceptible, toutes autres choses étant égales, dans l'esprit du 11^e témoin. (2) Que, dans un espace de 50 ans = t, il naît une suspicion $k=-\frac{x}{100}$, c'est-à-dire que le premier témoin qui, s'il transmet aussitôt l'histoire à quelqu'un, et reçoit cette histoire de l'historien lui-même, détruirait seulement le 1/10^e de la probabilité qui lui a été transmise (d'après l'hypothèse 1), s'il retardait sa propre relation de l'histoire sur une durée de 50 ans, détruira le 1/100^e de la probabilité qui lui a été transmise, outre le 1/10^e dont on a parlé. (3) Qu'à une distance de 50 milles = d, il surgit une suspicion $q=-\frac{x}{10000}$ dans les histoires dont le sujet est rapporté à un lieu permanent. (4) Que la vie d'un témoin quelconque peut durer 50 ans. Et qu'ainsi (5) le nombre de témoins par l'intermédiaire desquels une histoire est transmise à travers un temps T sera $m=\frac{T}{t}$; ce qui est une conséquence de la 4^e hypothèse.

***Proposition* XV. *Problème* VIII.**

Déterminer quand disparaîtra la probabilité d'une histoire quelconque dont le sujet passe et qui n'est transmise qu'oralement.

Elle disparaîtra quand $bx + (m-1)s + \frac{T^2 k}{t^2} = 0$ (d'après la proposition 8), où b est le nombre d'historiens, m le nombre de témoins, et T le temps cherché de la disparition de la probabilité. Maintenant, puisque $m = \frac{T}{t}$, $s = -\frac{x}{10}$, $k = -\frac{x}{100}$ (d'après les hypothèses 5, 1 et 2), remplaçons par leurs valeurs les quantités m, s, k ; et l'on aura $bx - \frac{xT}{10t} + \frac{x}{10} - \frac{xT^2}{100t^2} = 0$. Résolvons cette équation par les règles communes de l'algèbre et l'on trouvera : $T = t\sqrt{100b+35} - 5t$, qui est le moment où disparaît la probabilité d'une histoire quelconque.

Corollaire. Pour l'histoire du Christ, la probabilité a disparu à la fin du VIII[e] siècle, dans la mesure où elle dépend d'une tradition purement orale. En effet, dans ce cas, b = 4, d'où $\sqrt{100b+35} = \sqrt{435}$ = approximativement 21, donc, d'après la règle de cette proposition, $T = 21t - 5t = 16t$; mais t = 50 ans (d'après l'hypothèse 2) ; donc T = 16t = 800 ans. Ce qu'il fallait démontrer.

Scolie. On peut trouver de la même façon le moment où disparaîtra la probabilité d'une histoire dont le sujet demeure. Cependant, il faut bien se garder de prendre k de la même valeur que pour les histoires à sujet passager ; cette valeur est bien plus grande dans le cas dont nous parlons que pour ces dernières ; et puisque nous avons supposé (hypothèse 2) $k = -\frac{x}{100}$ pour les histoires qui transmettent une matière passagère, il peut se faire que, dans les histoires transmettant des sujets qui demeurent, $k = -\frac{x}{50}$ ou même inférieur, pourvu que ces sujets durables soient en un lieu accessible ; car s'ils se trouvent dans un lieu inaccessible, leur probabilité doit être traitée comme si leurs sujets étaient passagers.

CHAPITRE II

La probabilité historique transmise par des témoignages écrits

Proposition XVI. *Problème* IX.

Déterminer le degré de probabilité d'une histoire[7] consignée par écrit par un premier historien et par lui seul.

Soit z la probabilité totale d'une histoire au début de la publication du premier exemplaire, n le nombre d'exemplaires, T le temps et D la distance du lieu, toutes caractéristiques de la copie d'une histoire écrite. Et soit f la suspicion issue de la transcription d'un exemplaire (f est identique dans tous les cas, puisque les copistes sont également dignes de foi, par hypothèse), tout le reste étant posé comme dans le chapitre précédent. On aura, pour la probabilité recherchée :

[7] Le texte latin donné dans *History and Theory* est fautif. Il faut lire *historiae* et non *historicae*.

$$P = z + (n-1)f + \frac{T^2k}{t^2} + \frac{D^2q}{d^2}$$

Corollaire. Soit c le nombre des premiers historiens, r le nombre de seconds exemplaires transmettant l'histoire par le même nombre de séries, étant posé que chaque série d'exemplaires est dérivée d'un seul exemplaire second : la probabilité P de l'histoire ainsi transmise sera :

$$P = r\left(cz + (n-1)f + \frac{T^2k}{t^2} + \frac{D^2q}{d^2}\right)$$

Scolie. Par premiers historiens, j'entends ceux qui tirent de leur observation ou de leur expérience personnelle la connaissance de l'histoire. Et par premier exemplaire, j'entends non pas un seul, mais un nombre quelconque d'exemplaires écrits ou imprimés par le premier historien lui-même. Maintenant, puisqu'une histoire écrite possède une probabilité bien plus grande qu'une histoire à tradition orale, dont la probabilité ne disparaît jamais (d'après la proposition 14), il suit que la probabilité de la première, elle non plus, ne s'évanouit complètement à aucun moment. Cependant, comme elle décroît continuellement, il se fait nécessairement qu'enfin elle est rendue très mince ; donc, pour la détermination du temps où meurt cette probabilité perceptible, on doit faire les hypothèses suivantes. (1) Que $z = 10x$, c'est-à-dire que l'historien transmet une probabilité dix fois plus élevée quand il transmet son témoignage par écrit que quand il le transmet seulement par oral. (2) que $t = \frac{s}{10}$, c'est-à-dire que la suspicion d'un copiste fidèle est seulement le 1/10^{e} de la suspicion d'un témoin digne de foi ; d'où il suit que $f = -\frac{x}{100}$ (d'après l'hypothèse 1 de la proposition 14 et son hypothèse 2). (3) Qu'un exemplaire de l'histoire peut durer $200 \text{ ans} = 4t$. D'où il suit (4) que le nombre d'exemplaires transmettant[8] l'histoire pendant un temps quelconque T est $n = \frac{T}{4t}$.

Proposition XVII. *Problème* X.

Déterminer le degré de la probabilité actuelle de l'histoire du Christ, écrite par quatre historiens et transmise par une seule série d'exemplaires.

La probabilité actuelle de l'histoire du Christ est $cz + (n-1)f + \frac{T^2k}{t^2}$ (d'après le corollaire de la proposition 16) ; mais dans ce cas le nombre des premiers historiens est c = 4, et T = 1696 ans = 34t. Et l'on a (d'après les hypothèses de la proposition 16) z = 10x, $n = \frac{34}{4}$ et $f = -\frac{x}{100}$, $k = -\frac{x}{100}$. Remplaçons ces valeurs des quantités c, n, f, T, et l'on aura $p = 40x - \frac{34x}{400} - \frac{1156x}{200}$ pour la probabilité actuelle de l'histoire du Christ, formule dont la

[8] Lire, dans le texte latin, *transmittentium* et non *transmittentum.*

résolution donne $P = \frac{11342x}{400}$, c'est-à-dire, par approximation, p = 28x. Ainsi, la probabilité présente de l'histoire du Christ est aussi grande que celle qu'aurait eue un homme qui, au temps du Christ lui-même, aurait reçu cette histoire de façon seulement orale de 28 disciples du Christ. Ce qu'il fallait trouver.

Proposition XVIII. *Problème* XI.

Définir l'espace de temps dans lequel disparaîtra la probabilité de l'histoire du Christ écrite.

Elle disparaîtra quand $cz + (n-1)f + \frac{T^2k}{t^2} = 0$ (d'après le corollaire de la proposition 16), c'est-à-dire, si l'on remplace par leurs valeurs les quantités z, n, f, k, et également 4 = c, quand $40 + \frac{1}{100} - \frac{T}{400t} - \frac{T^2}{100t^2} = 0$; la résolution de cette équation donnera le temps cherché, celui de la disparition de la probabilité, à savoir $T = t\sqrt{4001 + \frac{1}{64}} - \frac{1}{8}t$; ou plutôt (en négligeant les fractions, ce qui peut se faire sans grand risque d'erreur dans les calculs de cette sorte), on aura le temps cherché $T = t\sqrt{4001}$, c'est-à-dire, puisque $\sqrt{4001} = 63$ et t = 50 ans, T = 3150 ans ; d'où il est assuré que, 3150 ans après la naissance du Christ, la probabilité de son histoire écrite disparaîtra. Ce qu'il fallait trouver.

Corollaire. Il est nécessaire que la venue du Christ se produise avant que se soient écoulés 1454 ans. Car il est nécessaire que le Christ vienne avant que disparaisse la probabilité de son histoire ; mais celle-ci disparaîtra quand, à partir de notre époque, se seront écoulés $3150 - 1696 = 1454$ ans ; il est donc nécessaire qu'il vienne avant que se soient écoulés 1454 ans à partir de notre époque. Ce qu'il fallait démontrer.

Et sa venue n'est nullement nécessaire pendant une période inférieure à 1454 ans, dans la mesure où sa venue dépend de la disparition de la probabilité de son histoire ; et assurément, beaucoup de choses me portent à soupçonner qu'il ne viendra pas avant le moment où la probabilité de son histoire sera sur le point de disparaître ; c'est ce vers quoi semble incliner expressément Luc, au ch. 18, verset 8 de son évangile, où il rapporte cette interrogation du Christ : « Mais quand le Fils de l'homme viendra, trouvera-t-il la foi sur la terre ? » – c'est-à-dire qu'à la venue du Christ, la probabilité de son histoire sera si petite qu'il doute s'il trouvera quelqu'un qui attachera de la croyance à son histoire. Ce qui fait apparaître combien lourde est l'erreur de tous ceux qui fixent la venue du Christ si près de notre époque.

Proposition XIX. *Problème* XII.

Déterminer le degré de probabilité d'une histoire écrite quelconque selon les hypothèses assumées.

Une histoire écrite quelconque à sujet passager a pour probabilité $p = r + \left(cz + (n-1)f + \dfrac{T^2k}{t^2} \right)$ (d'après le corollaire de la proposition 16). Donc, en remplaçant par leurs valeurs les quantités z, n, f, k, on aura $p = rx\left(\dfrac{4000ct^2 - Tt + 4tt - 4TT}{400t^2} \right)$.

Proposition XX. *Problème* XIII.

Définir l'intervalle de temps dans lequel la probabilité d'une histoire écrite quelconque disparaîtra.

Elle disparaîtra lorsqu'on aura $cz + (n-1)f + \dfrac{T^2k}{t^2} = 0$ (d'après le corollaire de la proposition 16), c'est-à-dire, si l'on remplace par leurs valeurs les quantités z, n, f, k, lorsque $20c + \dfrac{1}{100} - \dfrac{T}{400t} - \dfrac{T^2}{100t^2} = 0$. La résolution de cette équation donnera le temps cherché, celui de la disparition de la probabilité : $T = t\sqrt{1000c + \dfrac{65}{64}} - \dfrac{1}{8}t$, soit, si l'on néglige les fractions, $T = t\sqrt{1000c + 1}$. Mais t est donné, égal à une durée de 50 ans, et c également, le nombre des premiers historiens ; on a donc T, le temps cherché, dans lequel disparaît la probabilité de l'histoire.

Scolie. On résout de la même façon les deux problèmes suivants, quand les histoires concernent des sujets situés dans un endroit accessible.

Proposition XXI. *Problème* XIV.

Déterminer le degré de probabilité d'une histoire dont la transmission est en partie orale et en partie écrite.

Il faut trouver sa probabilité selon l'espace de temps dans lequel elle est transmise oralement (d'après la proposition 8), et sa probabilité selon l'espace de temps dans lequel sa transmission est écrite (d'après la proposition 16) ; la somme des deux donnera la probabilité cherchée. Ce qu'il fallait trouver.

Proposition XXII. *Problème* XV.

Étant donné deux histoires opposées sur le même sujet, déterminer laquelle des deux est la plus probable, et son degré de probabilité.

Il faut trouver la probabilité de l'une et de l'autre (par les propositions 8 et 16) et remplacer par leurs valeurs les quantités m, s, k, q, z, n, f, et l'on verra aussitôt laquelle est la plus probable ; retranchons la plus petite probabilité de la plus grande, et le reste sera la probabilité totale de l'histoire la plus probable. Ce qu'il fallait trouver.

Conclusion

Je crois ainsi avoir expliqué avec suffisamment de clarté ce qui est nécessaire à la détermination de la probabilité historique. Je passe maintenant à la seconde partie de mon sujet, à savoir la définition des quantités de bonheur. Le bonheur est en effet l'unique principe de toutes nos actions et de tous nos efforts. Quoi que nous fassions ou ressentions, quoi que nous désirions ou évitions, il est absolument certain que cela se fait toujours dans le but du bonheur. Pour que les hommes puissent donc rechercher avec intelligence les bonheurs qui les concernent, il est nécessaire qu'ils puissent déterminer soigneusement leurs quantités et leurs valeurs ; c'est donc ce que nous allons enseigner dans les chapitres qui suivent.

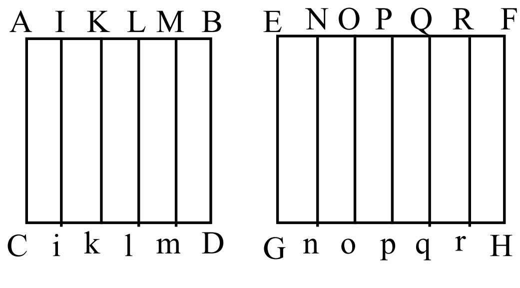
CHAPITRE III

Le bonheur égal

Comme les propositions suivantes le montreront plus facilement, je désigne la durée du bonheur par une ligne droite, et les degrés de son intensité par des lignes droites perpendiculaires à des points pris un par un de la ligne précédente ; et pour cette raison, si l'on conçoit une ligne menée par les autres extrémités de ces perpendiculaires, il s'en formera une figure plane qui représentera très bien la quantité de ce bonheur ; et ainsi, des propriétés de cette figure, il sera facile de déduire les propriétés de ce bonheur.

Proposition **XXIII.** *Théorème* **VII.**

Les quantités de deux bonheurs égaux (c'est-à-dire dont les intensités sont égales) sont en raison directe de leurs durées.
[p. 27]

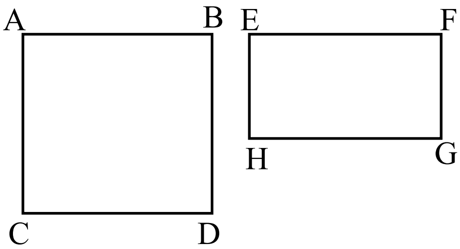


Soit AB la durée de l'un des bonheurs, V sa quantité, et soient AC, Ii, Kk, Ll, etc., les degrés d'intensité dans les différents instants de la durée. Et soit EF la durée du second bonheur, dont la quantité sera V, et le degré d'intensité EG, Nn, Oo, etc, dans les instants E, N, O, etc. Maintenant, comme l'un et l'autre des deux bonheurs sont égaux, par hypothèse, la ligne menée par C, i, k, l, m, D, et la ligne menée par G, n, o, p, q, r, H, sont des droites parallèles à AB et EF (d'après la définition 4). Donc, les figures ABCD et EFGH, qui désignent la quantité de l'une et l'autre des deux bonheurs, sont des parallélogrammes rectangles. Maintenant, $v = AB \times AC$, $V = EF \times EG$ (d'après les Éléments) et $AC = EG$ (d'après l'hypothèse de la proposition). Donc $V = EF \times AC$. D'où $v.V :: AB \times AC.EF \times AC$. Mais (d'après les Éléments) $AB \times AC \,.\, EF \times AC :: AB \,.\, EF$. Donc $v.V ::$ AB.EF. Ce qu'il fallait démontrer.

Proposition XXIV. *Théorème* VIII.

Les quantités de deux bonheurs égaux (dont les temps des durées sont égaux) sont en raison directe de leur intensité.

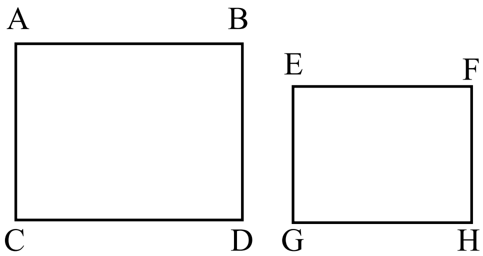
Soit la durée du premier bonheur AB, et son degré constant d'intensité AC, la quantité entière v. Et soit aussi la durée du second bonheur EF, son intensité constante EG, et sa quantité V. On aura v = AB × AC, V = EF × EG ; mais, par hypothèse, AB = EF ; donc, V = AB × EG. D'où v.V :: AB × AC.AB × EG. Mais AB × AC.AB × EG :: AC.EG. Donc v.V :: AC.EG. Ce qu'il fallait démontrer.



[p. 28]

Proposition XXV. *Théorème* IX.

Les quantités de deux bonheurs égaux quelconques sont en raison composée des raisons directes de leurs durées et de leurs intensités.



Soit la durée de l'un des deux bonheurs AB = r, son intensité AC = n, et sa quantité v. Et soit, du second bonheur, la quantité V, la durée EF = s, l'intensité EG = m. Maintenant, puisque les figures qui représentent les quantités des bonheurs égaux sont des parallélogrammes rectangles, on a v = r n, V = s m, on a $\frac{V}{v}=\frac{s\,m}{r\,n}=\frac{s}{r}\times\frac{m}{n}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire 1 : Les durées de deux bonheurs égaux quelconques sont en raison composée de la raison directe des quantités et en raison réciproque des intensités.

Corollaire 2 : Les intensités de deux bonheurs égaux quelconques sont en raison composée de la raison directe des quantités et en raison réciproque des durées.

Corollaire 3 : Tout bonheur égal croît en raison des durées prises depuis le début.

CHAPITRE IV

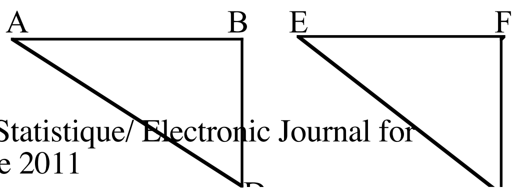
Les bonheurs qui croissent uniformément

Proposition XXVI. *Théorème* X.

Les quantités de deux bonheurs qui croissent uniformément, dont les intensités sont jusqu'à la fin égales, sont en raison des durées.

[p. 29]

Puisque les figures qui représentent ces bonheurs sont des triangles (d'après la définition 5), la quantité



de l'un est v, sa durée AB = r, son intensité à la fin BD = n ; et la quantité du second bonheur V ; sa durée EF = s, et son intensité à la fin FH = m. Maintenant, $V.v :: EFH.ABD$. Mais $EFH = \frac{s\,m}{2}$ et $ABD = \frac{r\,n}{2}$. Donc, $v \cdot V :: \frac{s\,m}{2} \cdot \frac{r\,n}{2}$; d'où $\frac{V}{v} = \frac{s\,m}{r\,n}$; mais m = n par hypothèse ; donc $\frac{V}{v} = \frac{s}{r}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Proposition XXVII. *Théorème* XI.

Les quantités de deux bonheurs qui croissent uniformément, dont les durées sont égales, sont en raison directe des intensités prises à la fin.

En effet, les quantités étant désignées comme dans ce qui précède, on a trouvé $\frac{V}{v} = \frac{s\,m}{r\,n}$; mais $s = r$ par hypothèse ; donc $\frac{V}{v} = \frac{m}{n}$. Ce qu'il fallait démontrer.

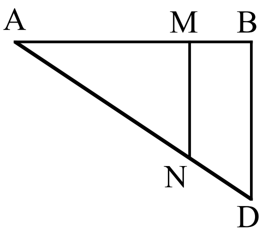
Proposition XXVIII. *Théorème* XII.

Les quantités de deux bonheurs quelconques qui croissent uniformément sont en raison composée de la raison directe de leurs durées et en raison directe des intensités prises à la fin.

En effet, dans l'avant-dernière proposition, il a été démontré que $\frac{V}{v} = \frac{s\,m}{r\,n}$, c'est-à-dire que $\frac{V}{v} = \frac{s}{r} \times \frac{m}{n}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire 1 : Les durées de deux bonheurs qui croissent uniformément sont en raison composée de la raison directe des quantités et en raison réciproque des intensités prises à la fin.

[p. 30]



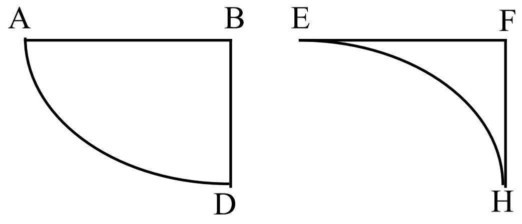
Corollaire : Les quantités de l'un des bonheurs croissant uniformément prises depuis le début croissent en raison double des durées. Soit AB = T l'une des durées, et soit Q sa quantité dans ce temps ; soit l'autre durée AM = t, durée dans laquelle soit q la quantité du bonheur. Maintenant, $Q.q :: ABD.AMN$. Mais $ABD.AMN :: ABq.AMq$ (d'après les Éléments). Donc, $Q.q :: ABq.AMq$ c'est-à-dire $Q.q :: T^2.t^2$. Ce qu'il fallait démontrer.

CHAPITRE V

Les bonheurs dont les intensités croissent en raison multiple ou sous-multiple quelconque

Proposition XXIX. *Problème* XVI.

Étant donné les équations exprimant la relation entre les temps des durées et les degrés des intensités, trouver le rapport qu'entretiennent les quantités des bonheurs.



Soit la durée de l'un des bonheurs AB = r, son intensité à la fin BD = n, sa quantité v ; et la quantité du second bonheur V, sa durée EF = s, et son intensité à la fin FH = m. Et soit $r^c = n$ l'équation exprimant la relation entre le temps de la durée et les degrés d'intensité du premier, croissant selon une raison multiple ou sous-multiple quelconque, dont l'exposant est c. Par ailleurs, soit l'équation $m = s^c$ exprimant la relation entre le temps de la durée et les degrés d'intensité du second, croissant selon une raison multiple ou sous-multiple quelconque, dont l'exposant est e. Maintenant, $\frac{V}{v} = \frac{EFH}{ABD}$ (selon le fondement de cette méthode, expliqué au début du chapitre 3).
[p. 31]

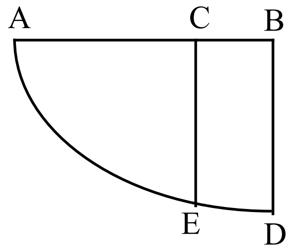
Mais selon les méthodes bien connues des quadratures, $EFH = \frac{s\,m}{e+1}$, $ABD = \frac{r\,n}{c+1}$. Donc, $\frac{V}{v} = \frac{s\,m \times (c+1)}{r\,n \times (e+1)} = \frac{s}{r} \times \frac{m}{n} \times \frac{c+1}{e+1}$[9]. C'est-à-dire que les quantités de ces bonheurs sont en raison composée de la raison directe des temps, de la raison directe des intensités (prises à la fin) et de la raison réciproque des exposants augmentés de l'unité. Ce qu'il fallait démontrer.

Scholie. Ce théorème est tout à fait général ; c'est grâce à lui que l'on peut découvrir tout ce qui concerne les bonheurs dont les intensités croissent en raison multiple ou sous-multiple quelconque ; ainsi, si l'on pose $c = 0$, $e = 0$, on a l'ensemble des démonstrations au chapitre 3 ; avec $c = 1$, $e = 1$, on a l'ensemble des démonstrations au chapitre 4 ; si l'on pose $c = 0$, $e = 1$, on a la raison du bonheur stable au bonheur qui croît uniformément ; si l'on pose $c = 1$, $e = 2$, on a la raison du bonheur qui croît uniformément au bonheur dont les degrés d'intensité croissent en raison double des temps ; pour ne rien dire des autres choses en nombre infini, qui peuvent être déduites de cette proposition avec une égale facilité.

Proposition XXX. *Problème* XVII.

Avec les mêmes données que précédemment, trouver la raison de l'accroissement de l'un des deux bonheurs, selon les différents temps de sa durée, pris depuis le début.

[9] Nous corrigeons la formule, manifestement erronée dans le texte original.



Soit Q la quantité de bonheur produite dans le temps AB, et q la quantité de ce même bonheur, ou d'un bonheur semblable, produite dans le temps AC. Posons AB = T, AC = t. Maintenant, BD = T^c et CE = t^c, d'après l'accroissement supposé des degrés d'intensité. Donc, par les quadratures, on trouvera $Q = \frac{T^{c+1}}{c+1} = ABD$, et $q = \frac{t^{c+1}}{c+1} = ACE$. D'où $\frac{Q}{q} = \frac{T^{c+1}}{t^{c+1}}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire 1 : si le bonheur est égal, alors les quantités de bonheurs seront comme les temps ; car en ce cas c = 0, d'où $\frac{Q}{q} = \frac{T}{t}$.

[p. 32]

Corollaire 2 : Si les intensités croissent uniformément, les bonheurs seront comme les carrés des temps ; car en ce cas c = 1, d'où $\frac{Q}{q} = \frac{T^2}{t^2}$.

Corollaire 3 : si les intensités croissent en raison double des temps, les bonheurs seront en raison triple des temps ; car en ce cas c = 2, d'où $\frac{Q}{q} = \frac{T^3}{t^3}$.

Corollaire 4 : si les intensités croissent en raison sous-double des temps, alors les quantités de bonheur seront comme la racine carrée des cubes des temps ; car en ce cas $c = \frac{1}{2}$, d'où $\frac{Q}{q} = \frac{T^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{T^3}}{\sqrt{t^3}}$.

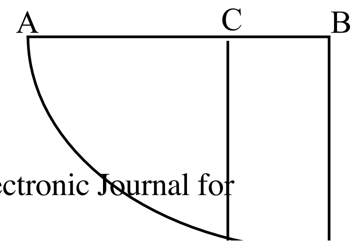
corollaire 5 : si les intensités croissent en raison sous-triple des temps, alors les quantités de bonheur seront comme la racine cubique des bicarrés des temps. Car en ce cas $c = \frac{1}{3}$, d'où $\frac{Q}{q} = \frac{T^{\frac{4}{3}}}{t^{\frac{4}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{T^4}}{\sqrt[3]{t^4}}$.

Scholie : De ce qui précède, il est clair que (étant posé les quadratures des figures curvilignes) tout ce qui concerne les quantités des bonheurs et leurs relations réciproques peut être facilement trouvé. Pour que cela soit mieux compris, je vais ajouter dans la proposition suivante un exemple dans lequel les intensités ne croissent pas en raison multiple ou sous-multiple.

Proposition **XXXI.** *Problème* **XVIII.**

Si l'intensité croît comme la racine carrée des carrés et des bicarrés (pris ensemble) des temps, trouver la raison selon laquelle le bonheur lui-même croît, selon les divers temps de sa propre durée, pris depuis le début.

[p. 33]



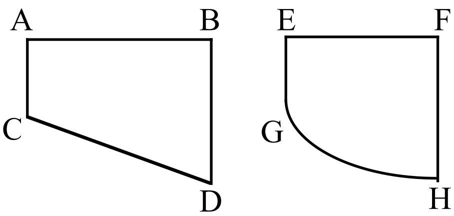
Soit AB = T l'une des deux durées, AC = t la seconde durée, et soit BD l'intensité à la fin du premier, CE l'intensité à la fin du second. Maintenant, puisque $BD = \sqrt{T^4 + T^2}$, $CE = \sqrt{t^4 + t^2}$ d'après l'hypothèse du problème, et puisque d'après la méthode des quadratures on trouve $ABD = \frac{1}{3} x \left(\left(T^2+1\right)\sqrt{T^2+1} - 1 \right) = Q$, et $ACE = \frac{1}{3} x \left(\left(t^2+1\right)\sqrt{t^2+1} - 1 \right) = q$. Ainsi, $\frac{Q}{q} = \frac{\left(T^2+1\right)\sqrt{T^2+1}-1}{\left(t^2+1\right)\sqrt{t^2+1}-1}$.

Soit cet exemple : $T = 3^{\frac{3}{7}}$ heures, $t = 2^{\frac{2}{5}}$ heures, on aura $\frac{Q}{q} = \frac{955125}{354662}$.

Scholie : bien que, dans ce qui précède, j'aie supposé que les bonheurs sont croissants et que les intensités (sauf pour les bonheurs stables) sont au début infiniment petites, la même méthode pourrait cependant être facilement appliquée à tous les autres bonheurs, quels qu'ils soient, qui croissent ou décroissent par une grandeur déterminée de leur intensité ; on en donne un exemple dans la proposition suivante.

Proposition XXXII.

Soit AB la durée d'un bonheur, son intensité au début AC, à la fin BD, sa quantité v, et que les intensités croissent comme les ordonnées du trapèze triangulaire ABCD ; et soit la durée du second bonheur EB, son intensité initiale EG, finale FH, sa quantité V, et que les intensités croissent comme les ordonnées du trapèze parabolique EFGH ; trouver la raison d'un bonheur à l'autre.



Posons AB = r, BD = n, AC = t, EF = s, FH = m, EG = g. D'après la géométrie, on trouvera $v = ACBD = \frac{nr + lr}{2}$, $V = \frac{2}{3} \times \left(mg^2 + ms - g^3 \right)$; donc, $\frac{V}{v} = \frac{4mg^2 + 4ms - 4g^3}{3nr + 3lr}$ [10]. Ce qu'il fallait démontrer.

[p. 34]

[10] Le texte latin porte V/V, qui est évidemment une erreur.

CHAPITRE VI

Comparaison du bonheur fini et du bonheur infini

Proposition XXXIII. *Théorème* XIII.

Une quantité de bonheur ayant une intensité quelconque (non décroissante) et d'une durée infinie s, est infiniment plus grande que tout bonheur ayant toujours une intensité finie n et d'une durée finie r.

Supposons que chacun des deux bonheurs est égal et que V est la quantité du premier, v celle du second. Maintenant, on aura $\frac{V}{v} = \frac{s\,m}{r\,n}$ (à cause de la *proposition* 25), d'où $V = \frac{s\,m}{r\,n} \times v$. Mais s est infini ; donc le produit sm est infini ; et r et n sont des quantités finies (par hypothèse) ; donc, le produit r n est fini ; mais la quantité infinie sm, divisée par la quantité finie rn, donne un quotient infini $\frac{s\,m}{r\,n}$; donc $\frac{s\,m}{r\,n} \times v$ est une quantité infinie ; donc, V, quantité du bonheur d'une durée infinie, est infiniment plus grand que la quantité de bonheur v qui a une intensité et une durée finies. Ce qu'il fallait démontrer.

Scholie : bien que j'aie posé des bonheurs égaux, cependant, si l'on comprend ce qui précède, il est facile de s'assurer que la démonstration tient sa place quand on prend des intensités croissant dans n'importe quelle raison donnée.

Corollaire : La valeur du bonheur promis par le Christ est infiniment plus grande que la valeur du bonheur de la vie présente. Car le bonheur promis par le Christ est d'une intensité qui ne décroît pas, et d'une durée infinie, comme il apparaît d'après son histoire ; mais le bonheur de la vie présente est seulement d'une intensité finie et d'une durée finie elle aussi, comme tous le savent. Donc, la quantité du bonheur promis par le Christ est infiniment plus grande que la quantité de bonheur de la vie présente (à cause des *propositions* 10 et 13). Mais les valeurs des bonheurs sont en raison des quantités ; donc, la valeur du bonheur promis par le Christ, etc. Ce qu'il fallait démontrer.

[p. 35]

Proposition XXXIV. *Lemme* II.

Si la probabilité que l'on a d'obtenir p est à la probabilité que l'on a d'obtenir P dans une raison quelconque r à 1, et si l'on suppose P > p et r > 1, la vraie valeur de l'espérance sera alors $\frac{P+p}{r+1}$; c'est-à-dire que la somme de ce que l'on espère divisée par la somme des probabilités donne la vraie valeur de cette espérance.

Pour que la démonstration soit plus facilement comprise, supposons qu'un homme A entreprenne une partie équitable avec un second homme B ; et soit x la mise ou la valeur de l'espérance de A ; y, la mise et la valeur de l'espérance de B (car tous les joueurs, dans une partie équitable, ont une espérance égale à leur mise) ; et qu'ils jouent avec cette condition, que le vainqueur donnera à l'autre p, en conservant pour lui-même P ; il est alors manifeste que si c'est A le vainqueur, il aura $x + y - p = P$; mais si A perd, alors, d'après la condition du jeu, il n'aura que p. Or, comme (d'après l'hypothèse du lemme) la probabilité de victoire (c'est-à-dire d'obtenir P) de A est à sa probabilité de perte (c'est-à-dire d'obtenir p), c'est-à-dire à la probabilité de victoire de B, dans un rapport de 1 à r, c'est la raison pour laquelle, le jeu étant supposé équitable, les mises doivent être dans le rapport des probabilités de victoire, c'est-à-dire x.y :: 1.r. D'où $\mathrm{r}x = \mathrm{y}$; remplaçons dans cette équation y par rx, et l'on aura $x + \mathrm{r}x = \mathrm{P} + \mathrm{p}$. D'où $x = \frac{\mathrm{P} + \mathrm{p}}{\mathrm{r} + 1}$. Ce qu'il fallait démontrer.

***Proposition* XXXV. *Théorème* XIV.**

La véritable valeur de l'espérance d'obtenir le bonheur promis par le Christ est infiniment plus grande que la véritable valeur de l'espérance d'obtenir le bonheur p de la vie présente.

Car P est infiniment plus grand que p (d'après le corollaire de la proposition 33) et il y a une probabilité non négligeable d'obtenir P (d'après la proposition 17), et il n'y a de probabilité d'obtenir p que finie (car la vie elle-même, et bien davantage le bonheur en cette vie, est incertaine) ; donc la probabilité d'obtenir p est à la probabilité d'obtenir P comme un nombre fini est à un nombre infini. Donc, on pourrait exprimer le rapport entre ces probabilités par le rapport du nombre fini r à l'unité. Donc, la véritable valeur de l'espérance [p. 36] est $\frac{\mathrm{P} + \mathrm{p}}{\mathrm{r} + 1}$ (à cause de la proposition 34). Mais P est une quantité infinie (à cause du corollaire de la proposition 33). Donc, la quantité infinie $\mathrm{P} + \mathrm{p}$, divisée par un nombre fini, à savoir $\mathrm{r} + 1$, donne un quotient infini. Donc, la véritable valeur de l'espérance du Chrétien est réellement infinie ; donc, elle est infiniment plus grande que la véritable valeur finie de l'espérance d'obtenir le bonheur de la vie présente. Ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire 1 : Les efforts pour obtenir le bonheur de la vie future doivent être infiniment plus grands que les efforts pour obtenir le bonheur de la vie présente — si du moins nous voulions gouverner nos efforts avec sagesse (à cause de cette proposition et de l'axiome 2).

Corollaire 2 : Ce sont des fous que ceux qui mettent plus d'effort à obtenir le bonheur de la vie présente que celui de la vie future (à cause de cette proposition et de l'axiome 3).

Corollaire 3 : Ils sont moins sages, ceux dont les efforts pour obtenir les bonheurs futurs sont à l'égard des efforts pour obtenir les bonheurs finis dans un rapport fini (à cause de cette proposition et de la deuxième partie de l'axiome).

Corollaire 4 : Le vrai Chrétien est le plus sage de tous les sages, les athées et les déistes sont les plus insensés de tous les insensés ; cela suit des corollaires 1 et 2 de cette proposition et des axiomes 2 et 3.