Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **18** (2006), 147–182

Restriction theory of the Selberg sieve, with applications

par Ben GREEN et Terence TAO

Résumé. Le crible de Selberg fournit des majorants pour certaines suites arithmétiques, comme les nombres premiers et les nombres premiers jumeaux. Nous démontrons un théorème de restriction L^2-L^p pour les majorants de ce type. Comme application immédiate, nous considérons l'estimation des sommes d'exponentielles sur les k-uplets premiers. Soient $a_1, \ldots, a_k$ et $b_1, \ldots, b_k$ les entiers positifs. On pose $h(\theta) := \sum_{n \in X} e(n\theta)$, où X est l'ensemble des $n \leqslant N$ tels que tous les nombres $a_1 n + b_1, \ldots, a_k n + b_k$ sont premiers. Nous obtenons des bornes supérieures pour $\|h\|_{L^p(\mathbb{T})}$, $p > 2$, qui sont (en supposant la vérité de la conjecture de Hardy et Littlewood sur les k-uplets premiers) d'ordre de magnitude correct. Une autre application est la suivante. En utilisant les théorèmes de Chen et de Roth et un «principe de transférence », nous démontrons qu'il existe une infinité de suites arithmétiques $p_1 < p_2 < p_3$ de nombres premiers, telles que chacun $p_i + 2$ est premier ou un produit de deux nombres premier.

Abstract. The Selberg sieve provides majorants for certain arithmetic sequences, such as the primes and the twin primes. We prove an L^2–L^p restriction theorem for majorants of this type. An immediate application is to the estimation of exponential sums over prime k-tuples. Let $a_1, \ldots, a_k$ and $b_1, \ldots, b_k$ be positive integers. Write $h(\theta) := \sum_{n \in X} e(n\theta)$, where X is the set of all $n \leqslant N$ such that the numbers $a_1 n + b_1, \ldots, a_k n + b_k$ are all prime. We obtain upper bounds for $\|h\|_{L^p(\mathbb{T})}$, $p > 2$, which are (conditionally on the Hardy-Littlewood prime tuple conjecture) of the correct order of magnitude. As a second application we deduce from Chen's theorem, Roth's theorem, and a transference principle that there are infinitely many arithmetic progressions $p_1 < p_2 < p_3$ of primes, such that $p_i + 2$ is either a prime or a product of two primes for each $i = 1, 2, 3$.

Manuscrit reçu le 22 juin 2004.

Ben GREEN
School of Mathematics
University of Bristol
Bristol BS8 1TW, England
E-mail : `b.j.green@bristol.ac.uk`
URL: `http://www.maths.bris.ac.uk/~mabjg`

Terence TAO
Department of Mathematics
University of California at Los Angeles
Los Angeles CA 90095, USA
E-mail : `tao@math.ucla.edu`
URL: `http://www.math.ucla.edu/~tao`