Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **19** (2007), 249–261

Non-degenerate Hilbert cubes in random sets

par Csaba SÁNDOR

Résumé. Une légère modification de la démonstration du lemme des cubes de Szemerédi donne le résultat plus précis suivant: si une partie S de $\{1,\dots,n\}$ vérifie $|S|\geq \frac{n}{2}$, alors S contient un cube de Hilbert non dégénéré de dimension $\lfloor \log_2\log_2 n-3\rfloor$. Dans cet article nous montrons que dans un ensemble aléatoire avec les probabilités $\Pr\{s\in S\}=1/2$ indépendantes pour $1\leq s\leq n$, la plus grande dimension d'un cube de Hilbert non dégénéré est *proche* de $\log_2\log_2 n+\log_2\log_2\log_2 n$ presque sûrement et nous déterminons la fonction seuil pour avoir un k-cube non dégénéré.

Abstract. A slight modification of the proof of Szemerédi's cube lemma gives that if a set $S\subset[1,n]$ satisfies $|S|\geq\frac{n}{2}$, then S must contain a non-degenerate Hilbert cube of dimension $\lfloor\log_2\log_2 n-3\rfloor$. In this paper we prove that in a random set S determined by $\Pr\{s\in S\}=\frac{1}{2}$ for $1\leq s\leq n$, the maximal dimension of non-degenerate Hilbert cubes is a.e. nearly $\log_2\log_2 n+\log_2\log_2\log_2 n$ and determine the threshold function for a non-degenerate k-cube.

Csaba Sándor
Institute of Mathematics
Budapest University of Technology and Economics
Egry J. u. 1., H-1111 Budapest, Hungary
E-mail : csandor@math.bme.hu

Manuscrit reçu le 30 novembre 2005.
Supported by Hungarian National Foundation for Scientific Research, Grant No. T 49693 and 61908.