PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 35 (49), 1984, pp. 41–48

SOMMES DE RECIPROQUES DE GRANDES FONCTIONS ADDITIVES

Jean-Marie De Koninck et Aleksandar Ivić

Résumé. On étudie la distribution des valeurs d'une classe des fonctions arithmétiques additives. On établie les formules asymptotiques pour les sommes des valeurs réciproques en utilisant la fonction $\psi(x,y) = \sum_{n\le x, P(n)\le y} 1$.

1. Introduction. Dans un ouvrage antérieur ([**5**, p. 108]), nous avons défini la famile H des "grandes" fonctions additives de la façon suivante:

Pour $K > 0$, $\gamma > 0$ et $\delta \in \mathbf{R}$ fixes, posons

$$h(x) = \exp(K \log^\gamma x (\log\log x)^\delta), \tag{1.1}$$

$$f(n) = \sum_{p|n} h(p), \quad F(n) = \sum_{p^\alpha \| n} \alpha h(p), \quad F_1(n) = \sum_{p^\alpha \| n} h(p^\alpha), \tag{1.2}$$

où p représente toujours un nombre premier et $p^\alpha \| n$ signifie que $p^\alpha | n$ et $p^{\alpha+1} \not| n$. La famille H est constituée de toutes les fonctions f, F et F_1 qu'on peut obtenir en faisant varier K, γ et δ selon les restrictions ci-haut.

Pour chaque nombre premier impair p, on a certainement $f(p) \gg \log^C p$ pour $c > 0$ arbitraire et fixe, et par ailleurs, lorsque $x \to \infty$, on a

$$\sum_{n\le x} f(n) = x \exp((K + o(1)) \log^\gamma x (\log\log x)^\delta). \tag{1.3}$$

On peut donc considérer les fonctions f, F et F_1 qui appartiennent à H comme de "grandes" fonctions additives, surtout si on les compare aux fonctions additives classiques $\omega(n)$ et $\Omega(n)$ qui représentent le nombre de facteurs premiers distincts de n et le nombre total de facteurs premiers de n, respectivement.

AMS Subject Classification (1980): Primary 10H25

La définition de la famille H nous fournit pour $K=\gamma=1$, $\delta=0$ les fonctions additives

$$\beta(n)=\sum_{p\mid n} p, \quad B(n)=\sum_{p^\alpha\| n}\alpha p, \quad B_1(n)=\sum_{p^\alpha\| n} p^\alpha. \tag{1.4}$$

Ces fonctions importantes ont été étudiées récemment par plusieurs auteurs (voir [**1**], [**4**], [**5**, ch. 6], [**6**], [**7**], [**8**], [**9**], [**10**]), et on s'intérassait surtout aux problèmes concernant les valeurs réciproques de ces fonctions. C'est ainsi que dans [**9**] on a démontré que

$$\sum_{2\le n\le x} 1/\beta(n) = x\exp\{-2^{1/2}(\log x\cdot\log\log x)^{1/2}+O((\log x\cdot\log\log\log x)^{1/2})\}. \tag{1.5}$$

On peut démontrer une formule analogue si on remplace $\beta(n)$ par $B(n)$. De plus la rélation (1.5) a été généralisée et améliorée dans [**10**]. L'étude des fonctions β, B et B_1 montre q'uen général le colzlportement des sommes des réci roques de ces fonctions est étroitement lié au comportexnent des sommes des réciproques de $P(n)$, soit le plus grand facteur premier de n, ce qui nous amène à introduire la fonction

$$\psi(x,y)=\sum_{n\le x, P(n)\le y} 1. \tag{1.6}$$

Cette fonction compte le nombre d'entiers positifs $n\le x$ pour lesquels $P(n)\le y$. Les estimés de $\psi(x,y)$ sont d'une grande importance dans la théorie analytique des nombres (voir [**2**], [**3**]).

Dans le présent article, nous nous intéressons aux fonctions f et F appartenant à la famille H; plus précisément nous nous attardons à généraliser (1.5) et à améliorer (6.16) et (6.17) de [**5**]. En fait, nous démontrerons d'abord le résultat suivant:

Théorème 1. *Pour f et F appartenarnt à H, on a*

$$\begin{aligned}&\sum_{2\le n\le x} 1/f(n) = \\ &x\exp\left\{-K^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}(\gamma+1)^{\frac{1-\delta}{\gamma+1}}\left(1+O\left(\frac{\log_3 x}{\log_2 x}\right)\right)(\log x)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}(\log_2 x)^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma+1}}\right\},\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{2\le n\le x} 1/F(n) = \\ &x\exp\left\{-K^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}(\gamma+1)^{\frac{1-\delta}{\gamma+1}}\left(1+O\left(\frac{\log_3 x}{\log_2 x}\right)\right)(\log x)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}(\log_2 x)^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma+1}}\right\}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

(Nous utilisons les abbréviarioés $\log_2 x=\log\log x$ et $\log_3 x=\log\log\log x$).

Le théorème 1 montre que les ordres de grandeur des sommes avec $1/f(n)$ et $1/F(n)$ sont les mmes. On peut par ailleurs pousser plus loin l'étude des comportements asymptotiques de certaincs sommes impliquant $f(n)$ et $F(n)$; c'est ainsi que nous démontrerons le résultat suivant:

Théorème 2. *Soit f et F appartenant à H. Supposons de plus que $\gamma < 1$ ou encore que $\gamma = 1$ avec $\delta = 0$. Alors il existe deux constantes positives c_1 et c_2 telles que*

$$(1.9) \quad \sum_{2\le n\le x} 1/F(n) = \left(1 + O\left\{\exp\left(-c_1 \log^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} x(\log_2 x)^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma+1}}\right)\right\}\right) \sum_{2\le n\le x} 1/f(n),$$

$$(1.10) \quad \sum_{2\le n\le x} F(n)/f(n) = x + O\left(x\exp\left(-c_2 \log^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} x(\log_2 x)^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma+1}}\right)\right).$$

2. Démonstration du Théorème 1. Soit $x_0 > 0$ arbitraire. Dans toútes les sommes on peut supposer que $P(n) > x_0$, car l'estimé trivial $\psi(x, x_0) \ll x^\varepsilon$ nous donne

$$\sum_{2\le n\le x, P(n)\le x_0} 1/f(n) \le \psi(x, x_0) \ll x^\varepsilon.$$

Par ailleurs, il existe $x_0 > 0$ tel que pour $x \ge x_1$la fonction $h(x)$ est croissante. On a donc, pour $P(n) > \max(x_0, x_1)$,

$$h(P(n) \le f(n) \le F(n) \le \Omega(n)(h(P(n) + O(1) \ll (\log n)(h(P(n))).$$

Cette inégalité nous permet de constater qu'afin de démontrer le Théorème 1, il suffit de démontrer que l'on peut substituer $h(P(n))$ à la place de $f(n)$ ou $F(n)$ dans les estimés (1.7) et (1.8).

Or déjà on peut écrire

$$(2.1) \quad \sum_{2\le n\le x, P(n)>x_0} 1/h(P(n)) = \sum_{x_0<p\le x} h^{-1}(p)\psi(x/p, p) = S_1 + S_2 + S_3,$$

disons, où, pour certaines constantes $B > A > 0$, on a

$$(2.2) \quad S_1 = \sum_{x_0<p\le\exp(BL)} h^{-1}(p)\psi(x/p, p),$$

$$(2.3) \quad S_2 = \sum_{\exp(AL)<p\le\exp(BL)} h^{-1}(p)\psi(x/p, p),$$

$$(2.4) \quad S_3 = \sum_{\exp(BL)<p\le x} h^{-1}(p)\psi(x/p, p),$$

$$(2.5) \quad L = (\log x)^{\frac{1}{\gamma+1}}(\log_2 x)^{\frac{1-\delta}{\gamma+1}}.$$

Pour estimer $\psi(x, y)$ nous utiliserons la formule

$$(2.6) \quad \psi(x, y) = x\exp\left\{-u(\log u + \log_2 u - 1 + \log_2 u - 1 + O\left(\left(\frac{\log_2 u}{\log u}\right)^2\right)\right\},$$

valable pour $u = (\log x)/(\log y)$, $e^e \le u \le (1-\varepsilon)(\log x)/(\log_2 x)$. Cette formule est plus précise que les résultats classiques de [**2**] et vient tout juste d'être démontrée en [**3**].

Nous estimons maintenant séparément S_1, S_2 et S_3.

D'abord il est clair que

$$S_1 \ll \exp(AL)\psi(x, \exp AL) \ll x \exp\left(A' \log^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} x (\log_2 x)^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma+1}}\right),$$

où $\lim_{A\to 0} A' = -\infty$.

Par ailleurs, comme $\psi(x,y) \le x$, on obtient que

$$S_3 \le x \exp(-K(BL)^\gamma (\log BL)^\delta) \sum_{p\le x} p^{-1} \ll x \exp\left(-B \log^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}\right),$$

puisque $\sum_{p\le x} 1/p = \log_2 x + O(1)$; ici $\lim_{B\to\infty} B' = +\infty$.

Maintenant on choisit $A < 0$ assez petit pour que l'on ait

$$A' < -K^{\gamma\gamma+1}(\gamma+1)^{1-\delta\gamma+1}$$

et B assez grand pour que $B' > K^{\gamma\gamma+1}(\gamma+1)^{1-\delta\gamma+1}$. Gardons alors A et B fixes. De cette façon, on voit que la contribution principale dans (2.1) viendra de la somme S_2 qú on écrit sous la forme

$$S_2 = \sum_{LA\le i\le BL} S_{2,i} \quad \text{où} \quad S_{2,i} = \sum_{e^{i-1}<p\le e^i} h^{-1}(p)\psi(x/p, p). \tag{2.7}$$

Mais alors l'inégalité évidente

$$\max_{AL\le i\le BL} S_{2,i} \le S_2 \ll \max_{AL\le i\le BL} S_{2,i}$$

démontre que la démonstration du Théorème 1 se réduit à la démonstration de

$$\begin{aligned} &\max_{AL\le i\le BL} S_{2,i} = \\ &x \exp\left\{-K^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}(\gamma+1)^{\frac{1-\delta}{\gamma+1}}\left(1 + O\left(\frac{\log_3 x}{\log_2 x}\right)\right)\log^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma+1}}(\log_2 x)^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma+1}}\right\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Or dans la somme $S_{2,i}$, on a

$$\begin{aligned} u = &\frac{\log(x/p)}{\log p} = \frac{\log x}{i}(1 + O(1/i)) + O(1), \\ &\log u = \log_2 x - \log i + O(1), \\ &\log p = i + O(1). \end{aligned}$$

En utilisant (2.6) on obtient

$$\begin{aligned} S_{2,i} = &\sum_{e^{i-1}<p\le e^i} \frac{x}{p} \exp\Big\{ -Ki^\gamma \log^\delta i + O(i^{\gamma-1}\log^\delta i) - \\ &-\frac{\log x}{i}(\log_2 x - \log i + \log(\log_2 x - \log i)) + O\left(\log^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} x (\log_2 x)^{\frac{\delta-1}{\gamma+1}}\right)\Big\} \\ &= x \exp\Big\{ -Ki^\gamma \log^\delta i - i^{-1}\log x(\log_2 x - \log i + \log(\log_2 x - \log i)) \\ &\qquad + O\left(\log^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} x (\log_2 x)^{\frac{\delta-1}{\gamma+1}}\right)\Big\}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

les termes venant de $O(1/i)$ dans l'expression pour u ayant été absorbés dans le dernier $O(\dots)$ de (2.9).

Pour trouver la valeur maximale de $S_{2,i}$, il faut trouver la valeur minimale de la fonction

$$u(t) = Kt^\gamma \log^\delta t + t^{-1}\log x(\log_2 x - \log t + \log(\log_2 x - \log t)) \tag{2.10}$$

dans l'intervalle $AL \le t \le BL$. On calcule donc

$$u'(t) = K\gamma t^{\gamma-1}\log^\delta t + K\delta t^{\gamma-1}\log^{\delta-1} t -$$
$$-t^{-2}\log x(\log_2 x - \log t + \log(\log_2 x - \log t) + 1 + (\log_2 x - \log t)^{-1}),$$

et alors $u'(t) = 0$ pour

$$Kt^{\gamma+1}(\gamma\log^\delta t + \delta\log^{\delta-1} t) = \log x(\log_2 x - \log t + \log(\log_2 x - \log t) + O(1)),$$

ce qui nous indique que t sera une fonction de x. Et on déduit que

$$(\gamma+1)\log t = \log_2 x + O(\log_3 x),$$

c'est-à-dire que

$$t = t_0 = K^{\frac{-1}{\gamma+1}}(\gamma+1)^{\frac{\delta-1}{\gamma+1}}\log^{\frac{1}{\gamma+}} x(\log_2 x)^{\frac{1-\delta}{\gamma+1}}\left(1 + O\left(\frac{\log_3 x}{\log_2 x}\right)\right). \tag{2.11}$$

On a donc obtenu que pour t_0 defini par (2.11) la fonction $u(t)$ atteint sa valeur maximale

$$u(t_0) = K^{\frac{1}{\gamma+1}}(\gamma+1)^{\frac{1-\delta}{\gamma+1}}\log^{\gamma\gamma+1} x(\log_2 x)^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma+1}}\left(1 + O\left(\frac{\log_3 x}{\log_2 x}\right)\right),$$

ce qui termine la démonstration du Théorème 1.

3. Démonstration du Théorème 2. Le cas $\gamma = 1$, $\delta = 0$ a déjà été considéré en [**4**], [**9**] et [**10**]. C'est pourquoi on peut supposer que $0 < \gamma < 1$. Nous avons donc

$$\begin{aligned}\sum_{2\le n\le x}(1/f(n) - 1/F(n)) &= \sum_{2\le n\le x}(F(n) - f(n))/(f(n)F(n))\\ &\ll \sum_{2\le n\le x, P^2(n)|n} 1 + \sum_{2\le n\le x, P^2(n)|n}(F(n) - f(n))h^{-2}(P(n)) = S' + S'',\end{aligned} \tag{3.1}$$

disons. I1 est facile de voir que l'on peut démontrer (voir aussi [**10**]) que

$$S' = \sum_{p\le x^{1/2}}\psi(xp^{-2}, p) = x\exp(-(2^{1/2} + o(1))(\log x\cdot\log_2 x)^{1/2}),$$

en utilisant la même méthode que pour la démonstration de S_2 définie par (2.3). Il s'ensuit que, pour chaque $c > 0$ fixe, on a

$$S' \ll \exp\left(-c\log^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} x\cdot(\log_2 x)^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma+1}}\right)\sum_{2\le n\le x} 1/F(n).$$

Tenant compte de l'additivité des fonctions f et F, nous avons (ici p et q dénotent des nombres premiers)

$$\begin{aligned} S'' &= \sum_{p\le x} h^{-2}(p) \sum_{m\le x/p, P(m)<p} (F(m)-f(m)) \\ &= \sum_{p\le x} h^{-2}(p) \sum_{m\le x/p, P(m)<p} \sum_{q^a\|m} (F(q^a)-f(q^a)) \\ &= \sum_{p\le x} h^{-2}(p) \sum_{q^a r\le x/p, P(m)<p, q<p, (q,r)=1} (a-1)h(q) \\ &= \sum_{p\le x} h^{-2}(p) \sum_{q^a\le x/p, a\ge 2, q<p} ah(q)\psi\left(\frac{x}{pq^a}, p\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Tout comme dans la démonstration du Théorème 1, on peut supposer que $p \ge x_0$, $q \ge x_0$. Alors on a $h(q) \le h(p)$ et on a pour $q^a \ge \exp(CL)$, $(C > 0)$, dans la dernière somme, laquelle devient

$$\sum_{q^a>\exp(CL), a\le 2} \ll \sum_{p\le x} h^{-1}(p) \sum_{q^a\ge\exp(CL), a\ge 2} axq^{-a}p^{-1} \ll x\exp(-C'L),$$

où $\lim\limits_{C\to\infty} C' = \infty$. Donc en prenant $C > 0$ assez grand mais fixe, on voit qu'il nous faut seulement estimer la somme

$$S^* = \sum_{p\le x} h^{-2}(p) \sum_{q^a\le\exp(CL), a\ge 2, q<p} aq\psi(xp^{-1}q^{-a}, p),$$

en remarquant que $h(q) < q$ pour $\gamma < q$ dans (1.1). Dans S^*, la contribution des p pour lesquels $p \le \exp(DL)$ ou $p > \exp(EL)$ (avec les constantes $0 < D < E$ bien choisies) est négligeable: ceci s'obtient facilement si on utilise la même méthode que dans la démonstratiori du Théorème 1. Le reste de S^* peut s'écrire comme

$$\sum_{DL\le i\le EL-1} S_i^*, \quad S_i^* = \sum_{e^i<p\le e^i} h^{-2}(p) \sum_{q^a\le\exp(CL)} aq\psi(xq^{-a}p^{-1}, p) \tag{3.4}$$

et on a alors

$$\max_{DL\le i\le EL} S_i^* \le \sum_{DL\le i\le EL} S_i^* \ll L \max_{DL\le i\le EL} S_i^*.$$

Or la relation (3.3) est semblable à (2.7). On peut donc évaluer $\max S_i^*$ de la même façon que l'expression $\max S_{2,i}$ qui apparaissait dans (2.7), car

$$\sum_{q<p, a\ge 2} q^{1-a} \ll \log\log p$$

est le seul facteur supplémentaire. Donc la fonction $u(t)$ (définie par 2.10) sera ici remplacée par

$$v(t) = 2Kt^\gamma \log^\delta t + t^{-1}\log x(\log_2 x - \log t + \log(\log_z x - \log t))$$

à cause de $h^{-2}(p)$, ce qui nous donnera

$$\max_{CL\le i\le EL-1} S_i^* \ll x\exp\left(-C_0\log^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} x(\log_2 x)^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma+1}}\right) \tag{3.5}$$

pour une certaine constante $C_0 > K^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}(1+\gamma)^{\frac{1-\delta}{1+\gamma}}$. Tenant compte de (3.5), on obtient le même type d'estimé pour $\sum S_i^*$, d'où on obtient facilement (1.9).

Enfin, la démonstration de (1.10) est analogue à la démonstration de (1.9) quand on écrit

$$\sum_{2\le n\le x} F(n)/f(n) = x + O(1) + \sum_{2\le n\le x}(F(n)-f(n))/f(n)$$

et qu'on observe que cette dernière somme s'estime comme la somme S'' de (3.3) en remplaçant $1/h^2(p)$ par $1/h(p)$.

4. Remarques. (i) Dans la définition (1.1) de $h(x)$ on peut remplacer $\log\log x$ par $\log\log(x+1)$, car $\log\log 2 < 0$ et alors pour $\delta = 1/2$ on aurait $h(2) \notin \mathbf{R}$. Cette distinction étant faite, on aura toujours $f(n)$, $F(n)$, $F_1(n) \in \mathbf{R}^+$.

(ii) Dans les démonstrations de nos résultats, nous avons utilisé les méthodes de [**9**] et [**10**]. Avec des calculs plus précis, on pourrait améliorer le terme d'erreur $O\left(\frac{\log_3 x}{\log_2 x}\right)$ dans le Théorème 1. Remarquons de plus que (1.7) pour $K=\gamma=1$, $\delta=0$ est plus fort que (1.5); toutefois dans ce cas bien précis, le r'esultat démontré en [**10**] est encore meilleur.

(iii) Si on choisit $\gamma > 1$, alors on peut omettre x dans (1.3), car

$$x = \exp(o(\log^\gamma x\cdot(\log_2 x)^\delta)) \text{ pour } \gamma > 1 \text{ fixe.}$$

Le cas $\gamma > 1$ présente des difficultés si on veut dḿontrer la validité du Théorème 2, parce qu'on ne peut pas utiliser l'inégalité $h(q) < q$ et la fonction $h(x)$ croît trop vite.

(iv) Dans [**6**], on a étudié toutes les sommes des fonctions $\beta(n)$, $B(n)$ et $B_1(n)$. On peut aussi généraliser ce problème et étudier les sommes des quotients de $f(n)$, $F(n)$ et $F_1(n)$ quand f, F et $F_1 \in H$.

(v) Il serait peut-être intéressant d'étudier les sommes des valeurs réciproques des fonctions additives d'une famille plus grande que H. Par exemple, dans la définition (1.1) de $h(x)$ on pourrait reirplacer $K\log^\gamma x(\log\log x)^\delta$ par une fonction $L(x) > 0$ à croissance lente dans le sens de Karamata (voir [**11**] pourla définition et les propriétés des fonctions à croissance lente). Avec certaines hypothèses sur $L(x)$ on pourrait déduire

$$\sum_{2\le n\le x} 1/f(n) = x\exp(-(1+o(1))L_1(x)),$$

où $L_1(x)$ est une autre fonction à croissance lente.

(vi) Signalons aussi que, pour $\gamma > 1$, on a

$$h(x) > x^c,$$

pour chaque $c > 0$ fixe et $x \geq x_0(c)$, mais que

$$\sum_{2 \leq n \leq x} 1/f(n) > x^{\varepsilon}$$

pour chaque $0 < \varepsilon < 1$ si x est suffisamment grand.

(vii) Enfin remarquons que dans nos considérations nous avons omis $F_1 \in H$. La raison est tout simplement que les sommes impliquant $F_1(n)$ sont beaucoup plus difficiles à estimer que celles avec $f(n)$ et $F(n)$, parce que l'inégalité $F_1(n) \ll \log n \cdot h(P(n))$ n'est pas valable en général.

REFERENCES

[1] K. Alladi, P. Erdös, *On an additive arithmetic function*, Pacific J. Math. **71** (1977), 274–294.

[2] N.G. de Bruijn, *On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$*, Nederl. Akad. Wet. Proc. **13** (1951), 50–60 et ibid. **II 28** (1966), 239–247.

[3] E.R. Canfield, P. Erdös, C. Pomerance, *On a problem of Oppenheim concerning "Factorisatio Numerorum"*, J. Number Theory, à paraître.

[4] J.-M. De Koninck, P. Erdös, A. Ivić, *Reciprocals of large additive functions*, Can. Math. Bull. **24** (1981), 225–231.

[5] J.-M. De Koninck, A. Ivić, *Topics in arithmetical functions*, Notas de Matematica **72**, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[6] P. Erdös, A. Ivić, *Estimates for sums involving the largest prime factor of an integer and certain related additive functions*, Studia Scien. Math. Hungarica **15** (1980), 183–199.

[7] P. Erdös, A. Ivić, *On sums involving reciprorals of certain arithmetical functions*, Publ. Inst. Math. (Beograd) **32** (1982), 49–56.

[8] P. Erdös, A. Ivić, C. Pomerance, *On sums involving reciprocals of the largest prime factor of an integer*, à paraître.

[9] A. Ivić, *Sums of reciprocals of the largest prime factor of an integer*, Arch. Math. (Basel) **36** (1980), 57–61.

[10] A. Ivić, C. Pomerance, *Estlmates of certain sums involving the largest prime factor of an integer*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai **34**, Topics in classical number theory, North-Holland, Amsterdam.

[11] E. Seneta, *Regularly varying Functions*, LNM 508, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

Département de Mathematique
Université Laval
Québec, GIK 7P4
Canada

Katedra Matematike RGF-a
Univerzitet u Beogradu
Đušina 7, 11000 Beograd
Yugoslavie.

(Received 27 09 1983)