PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 35 (49), 1984, pp. 87–91

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ $B(p,\theta,k,\alpha)$-КЛАССАМ ТИПА БЕСОВА

М. Бериша

Введение. В работе [**1**] определены необходимые и достаточные условия (в терминах коэффициентов Фурье) при которых чётные функции с монотонными коеффициентами Фурье принадлежат классам типа Бесова.

В настоящей работе находим необходимые условия, которым должны удовлетворять коэффициенты Фурье чтобы в общем случае функция,

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x} \quad \text{где } c_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-i\nu t}dt$$

принадлежала классу $B(p,\theta,k,\alpha)$.

1. Будем писать, $f(x) \in L_p$ если $f(x)$ есть 2π-периодическая функция, которая

1) при $1 \le p < \infty$ измерима и $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty$,

2) при $p=\infty$ непрерывна и $\|f\|_\infty = \|f\|_C = \max\limits_x |f(x)|$.

Через $\omega_k(f,t)_p$ обозначим модуль гладкости в метрике L_p порядка k, где k натуралмное число, функций $f(x)$, т. е.

$$\omega_k(f,t)_p = \sup_{|h|\le t} \|\Delta_h^k f(x)\|_p \ \text{ где } \ \Delta_h^k f(x) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu} f(x+\nu h).$$

Ряд Фурье функции $f(x)$ обычно будем записивать в комплексной форме, т. е.

$$f(x) \sim \sum_{|nu|=0}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x} \quad \text{где } c_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-i\nu t}dt.$$

AMS Subject Classification (1980): Primary 42A32

Для доказательства основных результатов работы нам понадобятся следующие леммы в которых все ряды шодятся.

Лемма 1. *Пусть $f(x) \in L_p$ для фиксированного p, $1 \le p \le \infty$, справедливы неравенства:*

1. *для p из промежутка $2 \le p \le \infty$:*

$$\omega_k(f, 1/n)_p \ge A_1 \left\{ \frac{1}{n^k} \left(\sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu|^2 |\nu|^{2k} \right)^{1/2} + \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^2 \right)^{1/2} \right\},$$

2. *для p из промежутка $1 < p \le 2$:*

$$\omega_k(f, 1/n)_p \ge A_2 \left\{ \frac{1}{n^k} \left(\sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu|^p |\nu|^{(k+1)p-2} \right)^{1/p} + \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2} \right)^{1/p} \right\},$$

3. *для $p = 1$ $\omega_k(f, 1/n)_1 = A_3 |c_n|$ где константы A_1, A_2, A_3 не зависят от $f(x)$ и n.*

Отметим что из условий леммы 1 следует

$$\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2} < \infty$$

(см. [**2**, §I, т. 5 и т. 12]).

Доказательство леммы 1 содержится в работе [**3**]; заметим, что случай $p = 1$ хорошо известен (см. например [**4**, стр. 79]).

Лемма 2. *Пусть числа α, β и a_ν таковы, что $a_\nu \ge 0$, $0 < \alpha < \beta < \infty$, тогда справедливо неравенство:*

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\beta \right)^{1/\beta} \le \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\alpha \right)^{1/\alpha}.$$

Доказательство леммы 2 содержится в книге [**5**], (см. [**5**, т. 19, стр. 43]).

Лемма 3. *Пусть числа a_ν, b_ν, γ_ν таковы, что $a_\nu \ge 0$, $b_\nu \ge 0$ и $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_n \gamma_n$, тогда для p из промежутка $0 < p \le 1$ справедливо неравенство:*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\sum_{n=\nu}^{\infty} b_n \right)^p \ge p^p \sum_{nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \gamma_\nu)^p.$$

Доказательство леммы 2 содержится в книге [**6**].

Лемма 4. *Пусть числа a_ν, b_ν, β_ν таковы, что $a_\nu \geq 0$, $b_\nu \geq 0$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = a_n\beta_n$, тогда для p из промежутка $0 < p \leq 1$ справедливо неравенство:*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\sum_{n=1}^{\nu} b_n\right)^p \geq p^p \sum_{nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \beta_\nu)^p.$$

Доказательство леммы 2 содержится в книге [**7**].

2. Будем говорить что некоторая функция $\alpha(t)$ есть функция типа σ, если она измерима на $[0,1]$, суммируема на $[\delta,1]$ для любого $\delta \in (0,1)$ и если существуют действительные числа $\sigma, \delta > 0$ и число $\delta_0 \in (0,1)$ такие, что

1) $\alpha(t) \geq 0$ длявсех $t \in [0,1]$,

2) $\int\limits_0^\delta \alpha(t) t^s dt < \infty$ для всех $s > \sigma$ и $t \in (0, \delta_0)$,

3) $\int\limits_0^\delta \alpha(t) t^s dt = \infty$ для всех $s < \sigma$ и $t \in (0, \delta_0)$.

Будем говорить, что $f(x) \in B(p, \theta, k\alpha)$ если

1. $f(x) \in L_p$, для некоторого p из промежутка $1 \leq p \leq \infty$,

2. θ – некоторое число из промежутка $0 < \theta < \infty$,

3. $\alpha(t)$ – функция типа σ,

4. $\int\limits_0^1 \alpha(t) \omega_k^\theta (f,t)_p dt < \infty$,

где k – нокоторое натуральное число удовлетворяющее условию $k > \sigma/\theta$. Условие $k > \sigma/\theta$ гарантирует, что класс $B(p, \theta, k, \alpha)$ состоит не только из констант (см. [**8**]).

Тxеорема 1. *Если периодическая функция $f(x) \sim \sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$ принадлежит классу $B(p, \theta, k, \alpha)$ при $2 \leq p < \infty$, то её коэффициенты Фурье необходимо удовлетворяет условиям*

$$\textit{для } \theta \geq 2: \quad \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta b(|\nu|) < \infty$$

$$\textit{для } \theta \leq 2: \quad \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta b(|\nu|) \left\{ \frac{b(|\nu|)}{A(|\nu|)} \right\}^{\frac{\theta}{2}-1} < \infty, \quad \textit{где}$$

$$A(\nu)=\int\limits_{1/(\nu+1)}^{1/\nu}\alpha(t)dt,\ \ b(\nu)=b_1(\nu)+b_2(\nu),$$

$$b_1(\nu)=\nu^{k\theta}\int\limits_{0}^{1/\nu}\alpha(t)t^{k\theta}dt,\ \ b_2(\nu)=\int\limits_{1/(\nu+1)}^{1}\alpha(t)dt,$$

$k\theta>\sigma$, k – натуральное число и $\theta>0$.

Доказательство. Очевидно, что

$$I=\int\limits_0^1\alpha(t)\omega_k^\theta(f,t)_p dt=\sum_{\nu=1}^{\infty}\int\limits_{1/(\nu+1)}^{1/\nu}\alpha(t)\omega_k^\theta(f,1/\nu)_p\ge$$

$$\ge\sum_{\nu=1}^{\infty}\omega_k^\theta(f,1/(\nu+1))_p\int\limits_{1/(\nu+1)}^{1/\nu}\alpha(t)\ge$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}A(\nu)\omega_k^\theta(f,1/(\nu+1))_p\ge C_1\sum_{\nu=1}^{\infty}A(\nu)\omega_k^\theta(f,1/\nu)_p$$

Используя оценку модуля гладкости (см. первое неравенство леммы 1, для $2\le p<\infty$, имеем

$$\begin{aligned}&C_2\sum_{\mu=1}^{\infty}A(\mu)\left\{\frac{1}{n^k}\left(\sum_{|\nu|=1}^{\mu}|c_\nu|^2|\nu|^{2k}\right)^{1/2}+\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}|c_\nu|^2\right)^{1/2}\right\}^{\theta}\ge\\ &\ge C_3\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{A(\mu)}{\mu^{k\theta}}\left(\sum_{|\nu|=1}^{\mu}|c_\nu|^2|\nu|^{2k}\right)^{\theta/2}+C_3\sum_{\mu=1}^{\infty}A(\mu)\left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}|c_\nu|^2\right)^{\theta/2}\end{aligned}\tag{1}$$

Если $\theta\ge 2$, то из леммы 2 следует

$$I\ge C_3\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{A(\mu)}{\mu^{k\theta}}\sum_{|\nu|=1}^{\mu}|c_\nu|^\theta|\nu|^{k\theta}+C_3\sum_{\mu=1}^{\infty}A(\mu)\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}|c_\nu|^\theta$$

Меняя порядок суммирования и делая простые выкладки, получим:

$$I\ge C_4\sum_{|\nu|=1}^{\infty}|c_\nu|^\theta\left\{|\nu|^{k\theta}\sum_{n=|\nu|}^{\infty}\frac{A(\mu)}{\mu^{k\theta}}+\sum_{n=1}^{|nu|}A(n)\right\}=$$

$$=C_4\sum_{|\nu|=1}^{\infty}|c_\nu|^\theta\{b_1(|\nu|)+b_2(|\nu|)\}=C_4\sum_{|\nu|=1}^{\infty}|c_\nu|^\theta b(|\nu|).$$

Если же $\theta \le 2$ то, применяя лемму 3 и лемму 4, из (1) получим:

$$I \ge C_3 \sum_{|\mu|=1}^{\infty} \frac{A(\mu)}{\mu^{k\theta}} [|c_\mu|^2 |\mu|^{2k} \gamma_1(|\mu|)]^{\theta/2} +$$

$$= C_3 \sum_{|\mu|=1}^{\infty} A(|\mu|)[|c_\mu|^2 \gamma_2(|\mu|)]^{\theta/2},$$

где $\gamma_1(\nu) = \left(\nu^{k\theta} \sum_{n=|\nu|}^{\infty} \frac{A(n)}{n^{k\theta}}\right) \Big/ A(\nu)$ и $\gamma_2(\nu) = \left(\nu^{k\theta} \sum_{n=1}^{\nu} A(n)\right) \Big/ A(\nu)$.

Так как $\gamma_1(\nu) \ge A_1 b_1(\nu)/A(\nu)$ и $\gamma_2(\nu) \ge A_2 b_2(\nu)/A(\nu)$ то, для простые выкладки, получим

$$I \ge C_4 \sum_{n=1}^{\infty} A(|\nu|)|c_\nu|^\theta \left\{ \left[\frac{b_1(|\nu|)}{A(|\nu|)}\right]^{\theta/2} + \left[\frac{b_2(|\nu|)}{A(|\nu|)}\right]^{\theta/2} \right\} \ge$$

$$\ge C_5 \sum_{n=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta A(|\nu|) \cdot \left\{\frac{b(|\nu|)}{A(|\nu|)}\right\}^{\theta/2} =$$

$$= C_5 \sum_{n=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta b(|\nu|) \cdot \left\{\frac{b(|\nu|)}{A(|\nu|)}\right\}^{\theta/2-1}$$

Тxеорема 2. *Если периодическая функция*

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

принадлежит классу $B(p,\theta,k,\alpha)$ при $1 < p \le 2$, то её коэффициенты Фурье необходимо удовлетворяют условиям:

$$\textit{для } \theta \ge p: \quad \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta-2\theta/p} \cdot b(|\nu|) < \infty$$

$$\textit{для } \theta \le p: \quad \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta-2\theta/p} b(|\nu|) \cdot \left\{\frac{b(|\nu|)}{A(|\nu|)}\right\}^{\theta/p-1} < \infty$$

Доказательство. Используя оценку модулягладкости (см. неравенство леммы 1, для $1 < p \le 2$), имеем

$$I \ge C_1 \sum_{|n|=1}^{\infty} \frac{A(|n|)}{|n|^{k\theta}} \left(\sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu|^p |\nu|^{(k+1)p-2}\right)^{\theta/p} + \tag{2}$$

$$+ C_1 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} A(|n|) \cdot \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2}\right)^{\theta/p}$$

Если $\theta \geq p$, применяя лемму 2, меняя порядок суммирования и делая простые выкладки (аналогично доказательству теоремы 1), получим

$$I \geq C_2 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta-2\theta/p} b(|\nu|).$$

Если же $\theta \leq p$ то, применяя лемму 3 и лемму 4, из (2) следует

$$I \geq C_3 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta-2\theta/p} b(|\nu|) \left\{ \frac{b(|\nu|)}{A(|\nu|)} \right\}^{\theta/p-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Бериша, *О коэфициентах Фурье некоторых классов функций*, Glasnik Mat. Ser. II **16**(**36**) (1981), 75–90.

[2] A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Chelsea, New York, 1952.

[3] М. Потапов, М. Бериша, *Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одного переменого*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.) **26**(**40**) (1979), 215–228.

[4] Н.К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Москва 1961.

[5] Г.Б. Харди, Д.Е. Литльвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ГИИЛ Москва, 1984.

[6] К.М. Потапов, *Об одной теореме вложения*, Matematica (Cluj), **14**(**37**)(1972), 123–146.

[7] L. Leindler, *Über verschiedene konvergenzarten trigonometrcher Reihen III (Bedigungen in der Metric von L_p)*, Acta Sci. Math. **27** (1966), 205–215.

[8] М. Потапов, *О вложении и совпадении некоторых классов функций*, Изв. АН СССР **4**(1969), 840–860.

Природно-математички факултет
Приштина
Југославија

(Поступила 29 10 1982)