PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 35 (49), 1984, pp. 119–123

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГАММЕРШТЕЙНА И НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

Радое Шчепанович

Резюме. В этой статье рассматривается вопрос разрешимости уравнения типа Гаммерштейна. Доказаны три теоремы о неподвижных точках нелинейных отображений. Здесь, как и в статьях [**2**], [**3**], [**4**], [**5**] рассматриваются функционалы с двумя переменными. В первих двух теоремах линейный оператор в уравнении Гаммерштейна зависит от точки гильбертова пространства H в котором рассматривается вопрос разрешимости.

Пусть H вещественное гильбертово пространство и $f(x)$ вещественный Гато дифференцируемый функционал на H. Пусть $\operatorname{grad} f(x) = F(x)$ оператор действующий в H. Пусть $D_r = \{x \in H : \|x\| \leq r, \, r > 0\}$.

Определение 1. Отображение $F : H \to H$ називается вполне непрерывным если оно непрерывно и компактно.

Теорема (Шаудера). *Если* $F : D - r \to D_r$ *вполне непрерывно, то* $(\exists x_0 \in D_r)(x_0 = F(x_0))$.

Определение 2. Мы говорим что оператор $F : H \to H$ удовлетворяет на H условию Липшица, если существует постоянная $L > 0$ такая, что $(\forall x_1, x_2 \in H)(\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|)$.

Определение 3. Мы говорим что функционал $f(x)$ обладает m-свойством на H, если существует абсолютный минимум функционала $f(x)$ на H, т. е. $(\exists M, |M| < \infty)(f(x) \geq M, \text{ для любого } x \in H)$.

Для $x \in H$, пусть $K(x)$ линейный ограноченный оператор в H. Пусть отображение $x \to K(x)$ вполне непрерывно из H в $L(H)$, где $L(H)$ множество линейных отображений из H в H. Пусть $\gamma = \sup\{\|K(x)\| : x \in H\} < \infty$. Положим $B(x) = K^2(x)$.

AMS Subject Classification (1980): Primary 47H15

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*
1) $\alpha\|y\|^2 + f(y)$ – *выпуклый функционал на* H, $1 - 2\alpha\gamma^2 = \delta > 0$,
2) f *слабо полунепрерывен снизу и обладает* m*-свойством на* H,
3) F *удовлетворяет условию Липшица на* H.
Тогда $(\exists x_0 \in H)(z_0 + B(x_0)F(z_0) = 0,\ z_0 = K(x_0)x_0)$.

Доказательство. Рассмотрим на H функционал

$$\varphi(x,y) = 1/2 \cdot \|y\|^2 + f(K(x)y). \tag{1}$$

Для фиксированного $x \in H$, функционал (1) слабо полунепрерывен снизу по Y как сумма слабо полунепрерывных снизу функционалов. Далее, $(\forall x \in H)(\lim\limits_{\|y\|\to\infty} \varphi(x,y) = \infty)$. Следовательно, для $x \in H$, функционал $\varphi(x,y)$ имеет абсолютный минимум по y на H. Обозначим точку абсолютного минимума $y = V(x)$, т. е.

$$(\forall y \in H)(\varphi(x, V(x)) \le \varphi(x,y)). \tag{2}$$

Пусть $x \in D_r$. Тогда $(\forall y \in H)(\varphi(x,y) \ge 1/2 \cdot \|y\|^2 + M_r)$, где $M_r = \min\limits_{x\in D_r} f(K(x)y)$. Числа M_r существуют в силу условия 2) теоремы.

Можно выбрать $r = R$, такое что $\varphi(x,y) \ge 1/2 \cdot \|y\|^2 + M_r > \varphi(x,0) = f(0)$, если $\|y\| \ge R$. Оцюда следует, что для каждого $x \in D_r$ точка $y = V(x) \in D_R$ т. е. $V : D_R \to D_R$. Покажем что V имеет в D_R неподвижную точку. Достаточно показать что V непрерывно в D_R.

Из (2) следует $\operatorname{grad} \varphi(x,y) = 0$, для $y = V(x)$, т. е.

$$y + K(x)F(K(x)y) = 0, \ \text{ для } \ y = V(x). \tag{3}$$

Положим $\Phi(y) = y + K(x)F(K(x)y)$. Покажем что $\Phi(y)$ сыльно монотонный оператор из H в H. Действительно,

$$\begin{aligned}(\forall y_1, y_2 \in H)((\Phi(y_1) - \Phi(y_2), y_1 - y_2) = \|y_1 - y_2\|^2 + (F(K(x)y_1) - F(K(x)y_2,\\ K(x)y_1 - K(x)y_2) \ge \|y_1 - y_2\|^2 - 2\alpha\|K(x)y_1 - K(x)y_2\|^2 \ge (1 - 2\alpha\gamma^2)\|y_1 - y_2\|^2\\ = \delta\|y_1 - y_2\|^2, \ \ \delta > 0.\end{aligned}$$

Оцюда следует биективность отображения $\Phi(y) : H \to H$. Покажем непрерывность отображения $\Phi^{-1}(y)$ существование которога следует из инъективности отображения $\Phi(y)$.

Рассмотрим две произвольные точки $y_1, y_2 \in H$. Тогда $\|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)\| \ge \delta\|y_1 - y_2\|$, или полагая $\Phi(y_1) = z_1$, $\Phi(y_2) = z_2$ получим $\|\Phi^{-1}(z_1) - \Phi^{-1}(z_2)\| \le \|z_1 - z_2\|$.

Пусть $\{x_i\} \subset D_R$ и $x_i \to x \in D_R$. Покажем что V непрерывно отображает D_R в D_R.

Для $x_i \in D_R$ точка абсолютного минимума $y_i = V(x_i)$ функционала $\varphi(x_i, y)$ удовлетворяет, шодно (3), уровнению

$$y_i + K(x_i)F(K(x_i)y_i) = 0 \tag{4}$$

Положим

$$\omega_i = y_i + K(x)F(K(x)y_i). \tag{5}$$

В силу (4) следует

$$\omega_i = -K(x_i)F(K(x_i)y_i) + K(x)F(K(x)y_i),$$
$$\omega_i = -K(x_i)F(K(x_i)y_i) - F(K(x_i)y_i)) + (K(x) - K(x_i))F(K(x)y_i).$$

В силу условия 3) теоремы и $K(x_i) \to K(x)$, то $\lim\limits_{i\to\infty} = 0$. Из (5) имеем $y_i = (E + K(x)F(K(x))^{-1}(\omega_i)$, $(\forall y \in H : Ey = y)$.

Следовательно, последовательность $\{y_i\} \subset D_R$ шодится к точке $y = (E + K(x)F(K(x))^{-1}(0)$, т. е. $y + K(x)F(K(x)y) = 0$. Этим мы показали непрерывность $V : D_R \to D_R$. Осталось показать что V переводит каждое множество из D_R в компактное множество в D_R.

Пусть $\{x_\nu\} \subset D_R$ произвольная последовательность. Тогда существует подпоследовательность $\{x_i\} \subset \{x_\nu\}$ и линейный ограниченный самосопряженный оператор $T \in L(H)$, такой что $\lim\limits_{i\to\infty} K(x_i) = T$. Положим $\psi(y) = 1/2\|y\|^2 + f(Ty)$. Функционал $\psi(y)$ слабо полунепрерывен снизу и $\lim\limits_{\|y\|\to\infty} \psi(y) = \infty$. Следовательно, $\psi(y)$ имеет абсолютный минимум на H. Отображение $y + TF(Ty) : H \to H$ сильно монотонно. Следовательно существует непрерывное отображение $(y + TF(Ty))^{-1} : H \to H$.

Пусть $\eta_i = y_i + TF(Ty_i)$. Далее,

$$\eta_i = T(F(Ty_i) - F(K(x_i)y_i)) + (T - K(x_i))F(K(x_i)y_i).$$

Очевидно $\lim\limits_{i\to\infty} \eta_i = 0$. Оцюда следует $\lim\limits_{i\to\infty}(E + TFT)^{-1}(\eta_i) = \lim\limits_{i\to\infty} y_i = y$ т. е. $y + TF(Ty) = 0$.

Этим мы показали компактность отображения $V : D_R \to D_R$. Оцюда следует $(\exists x_0 \in D_R)(x_0 = V(x_0))$. Далее, из (3) следует $x_0 + K(x_0)F(K(x_0)x_0) = 0$.

Применяя к данному равенству оператор $K(x_0)$ и учитывая что $z_0 = K(x_0)x_0$, $B(x_0) = K^2(x_0)$ получим $z_0 + B(x_0)F(z_0) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*
1) $\alpha\|y\|^2 + f(y)$ *выпуклый функционал на* H, $1 - 2\alpha\gamma^2 = \delta > 0$,
2) f – *слабо полуперерывен снизу на* H,
3) F *удовлетворяет условию Липшица на* H,
4) $(\exists r > 0)((F(y), y) \geq -\beta\|y\|^2$, *если* $\|y\| \geq r$ *и* $1 - \beta\gamma^2 > 0)$.
Тогда $(\exists x_0 \in H)(z_0 + B(x_0)F(z_0) = 0$, $z_0 = K(x_0)x_0)$.

рит Доказательство. На H рассмотрим функционал $\varphi(x,y) = 1/2 \cdot \|y\|^2 + f(K(x)y)$. Пусть $\Phi(y) = y + K(x)F(K(x)y)$, $x \in H$. Отображение $\Phi(y)$ сильно монотонно. Далее

$$(6) \qquad (\forall x \in D_R, R = r\gamma^{-1})((\Phi(y), y) = \|y\|^2 + (F(K(x)y), K(x)y) > \delta\|y\|^2, \\ \text{для } \|y\| \geq R).$$

Так как функционал $\varphi(x,y)$ слабо полунепрерывен снизу по y, то в силу (6), имеем $(\forall x \in D_R)(\exists y = V(x) \in D_R)(\varphi(x, V(x)) \leq \varphi(x,y)$, для каждого $y \in H$. Следовательно $y + K(x)F(K(x)y) = 0$. Окончание доказательства проводится повторая шему доказательства предыдущей теоремы.

Теперь рассмотрим случай разрешимости уравнения типа Гаммерштейна в вещественном гильбертовом сепарабельном пространстве H.

Пусть $\{H_n\}$ последовательность конечномерных подпространств пространства H, таких, что $H_n \subset H_{n+1}$ и $\overline{\bigcup_n H_n} = H$. Пусть S линейный ограниченый оператор действующий в H.

До сих пор (см. [**2**], [**3**], [**4**], [**5**]) функционал f обладал m-свойством а здесь это условие опускается.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия:*
1) $(\alpha + 1/2)\|y\|^2 + f(S^*y)$, $\alpha > 0$, *выпуклый функционал на* H,
2) $f(y) \geq -\beta\|y\|^2$, $\beta > 0$, $y \in H$,
3) $(1/2 - \alpha - \beta\|S\|^2) = a > 0$.
Тогда $(\exists z_0 \in H)(z_0 + BF(z_0) = 0, B = S^*S)$.

Доказательство. На подпространстве H_n рассмотрим функционал $\psi_n(x,y) = \varepsilon_n\|y\|^{2+\delta} + \psi(x,y)$, где $\delta > 0$, $0 < \varepsilon_n \to 0$, при $n \to \infty$ и $\psi(x,y) = (\alpha + 1/2)\|y\|^2 - 2\alpha(x,y) + f(S^*y)$. Для любого фиксированого $x \in H_n$ функционал $\psi_n(x,y)$ строго выпуклый по y и обладает m-свойством, ибо $\lim\limits_{\|y\| \to \infty} \psi_n(x,y) = \infty$. Следовательно, для $x \in H_n$ существует единственная точка абсолютного минимума функционала $\psi_n(x,y)$ по y. Обозначим эту точку через $y = V_n(x)$, т. е.

$$(7) \qquad \psi_n(x, V_n(x)) \leq \psi_n(x,y), \text{ для любого } y \in H_n.$$

Пусть $x \in H_n$и $\|x\| \leq r$, $r > 0$. Далее,

$$\psi_n(x,y) - \psi_n(x,0) = \varepsilon_n\|y\|^{2+\delta} + (\alpha + 1/2)\|y\|^2 + f(S^*y) - 2\alpha(x,y) - f(0) \geq \\ \geq \varepsilon_n\|y\|^{2+\delta} + (\alpha + 1/2)\|y\|^2 - 2\alpha\|y\|r - \beta\|S\|^2\|y\|^2 - f(0).$$

Пусть $\|y\| = r$, $y \in H_n$. Можно выбрать $r = r_n > 0$ такое, что $\varepsilon_n r_n^{2+\delta} + (\alpha + 1/2)r_n^2 - 2\alpha r_n^2 - \beta\|S\|^2 r_n^2 > f(0)$. Следовательно $(\forall n \in N)(\exists r_n > 0)(V_n : D_{r_n} \to D_{r_n})$, где $D_{r_n} = \{u \in H_n : \|u\| \leq r_n\}$.

Далее, можно полазать что V_n непрерывно отображает D_{r_n} в D_{r_n}. По известной теореме Брауэра (а можно и по теореме Шаудера) о неподвижных точках имеем $(\exists x_n \in D_{r_n})(V_n(x_n) = x_n)$. Оцюда и из (7) следует

$$(\forall y \in H_n)(\psi_n(x_n, x_n) \leq \psi_n(x_n, y)). \tag{8}$$

Покажем что последовательность $\{x_n\}$ ограничена в H. Положим в (8) $y = 0$, получим $\varepsilon_n \|y\|^{2+\delta} + (1/2 - \alpha)\|x_n\|^2 + f(S^* x_n) \leq f(0)$. т. е. $\|x_n\| \leq a^{-1} f(0)$, a – постоянная.

Так ка последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то $(\exists x_0 \in H)(x_{n_k} \rightharpoonup x_0, n_k \to \infty)$, где $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ и $\rightharpoonup$ слабая шодимость в H. Из предельного перехода в (8) получим $(\forall y \in H)(\psi(x_0, x_0) \leq \psi(x_0, y))$, или

$$x_0 + SF(S^* x_0) = 0. \tag{9}$$

Применяя к данному равенству (9) оператор S^* получим $z_0 + BF(z_0) = 0$, $z_0 = S^* x_0$, $B = S^* S$. Теорема доказана.

Замечение. Отметим, что из условия теоремы 3 не следует монотонность отображения $\Phi = E + SFS^* : H \to H$. Действительно,

$$\begin{aligned}(\forall u_1, u_2 \in H)((\Phi(u_1) - \Phi(u_2) &= \|u_1 - u_2\|^2 + (F(S^* u_1) - F(S^* u_2), S^* u_1 - S^* u_2) \\ &\geq \|u_1 - u_2\|^2 - 2\alpha\|u_1 - u_2\|^2 - \|u_1 - u_2\|^2 = -2\alpha\|u_1 - u_2\|^2).\end{aligned}$$

Если $\alpha < 0$ Φ будет строго монотонный оператор и точка x_0 в (9) будет единствена.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М.М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов*, Наука, Москва, 1972.

[2] Р. Шчепанович, *Вариационный метод и нелинейные уравнения*, Мат. Балканика, **9** (1979).

[3] Р. Шчепанович, *Вариационный метод и уравнения типа Гаммерштейна*, Мат. Бал-каника, **9** (1979).

[4] R. Šćepanović, *Varijacioni metod i nepokretne tačke*, Mat. Vesnik, **4**(**17**)(**32**) (1980), 251–254.

[5] R. Šćepanović, *O minimumu nekih funkcionala*, Mat. Vesnik, **4**(**18**)(**33**) (1981), 115–118.

Univerzitet,,Veljko Vlahović“
Institut za matematiku i fiziku
81000 Titograd, Jugoslavija

(Поступила 10 11 1980)