PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 39 (53), 1986, pp. 153–160

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

Б. Лакович

Резюме. Рассматриваются некоторые классы функций типа Бесова в метрике L_p, $p = (p_1 \dots, p_n)$ и доказываются теоремы вложения и совпадания для этих классов. Для $p_1 = p_2 = \dots = p_n$ полученные результаты совпадают с известными результатами.

В этой статье рассматривается один класс функций типа Бесова в смешанной метрике и доказываются теоремы вложения по векторным параметрам p и k, с помощью которых определяется этот класс.

Пространство $L_p([0, 2\pi]^n)$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $1 \leq p_i \leq \infty$, $i = 1, 2, \dots, n$ определяется [**1**] как множество измеримых функций $f(x_1, \dots, x_n)$, 2π-периодических по каждому переменному и таких, что

$$\|f\|_p([0, 2\pi]^n) \equiv \|f\|_p = \| \dots \| \| \|f\|_{p_1}\|_{p_2} \dots _{p_n}$$

Если $\int_0^{2\pi} f dx_i = 0$ почти для всех $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ и для всех $i = 1, 2, \dots, n$ то для пространств L_p будем использовать и обозначение L_p^0.

Через $\omega_{k_{i1}, \dots, k_{im}}(f, \delta_{i1}, \dots, \delta_{im})_p$ обозначим смешанный m-мерный ($m \leq n$) модуль гладкости порядков K_{ij} по переменным x_{ij} функции $f \in L_p([0, 2\pi]^n)$:

$$\omega_{k_{i1}, \dots, k_{im}}(f, \delta_{i1}, \dots, \delta_{im})_p = \sup_{|h_{i1}| \leq \delta_{i1}, \dots, |h_{im}| \leq \delta_{im}} \left\| \Delta_{h_{i1} \dots h_{im}}^{k_{i1} \dots k_{im}} \right\|_p$$

где

$$\Delta_{hi}^{ki} f = \sum_{\nu i = 0}^{ki} (-1)^{ki - \nu i} C_{ki}^{\nu i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \nu_i h_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

$$\Delta_{h_{i1} \dots h_{ij}}^{k_{i1} \dots k_{ij}} F = \Delta_{k_{i1}}^{k_{i1}} (\Delta_{k_{i2} \dots k_{ij}}^{k_{i2} \dots k_{ij}} F)$$

AMS Subject Classification (1980): Primary 41A10.

Следуя М. К. Потапову, определим наилучшее приближение m-мерным "углом" функции f по переменным $x_{i1},\ldots,x_{im}$ как величину

$$Y_{l_{i1}\ldots l_{im}}(f)_p=\inf_{T_{l_{i1}},\ldots,T_{l_{im}}}\left\|f-\sum_{j=1}^{m}T_{l_{ij}}\right\|_p;\quad l_{ij}\in N\cup\{0\}$$

где каждая функция $T_{l_{ij}}\in L_p$ и является тригонометрическим полиномом порядка l_{ij} только по одной переменой x_{ij}.

Пусть функции $\alpha_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$ удовлетворяют условиям: Каждая функция $\alpha_i(t)$ 1° измерима на $[0,2\pi]^n$ 2° суммируема на $[\delta_i,2\pi]$ длја каждого $\delta_i\in(0,2\pi)$.

Класс функции $SB(p,\theta,k,\alpha)$, $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_n)$, $\theta_i\in(0,\infty)$, $k=(k_1,\ldots,k_n)$, $k_i\in N$, $\alpha=(\alpha_1(t_1),\alpha_2(t_2),\ldots,\alpha_n(t_n))$, определим как множество функций $f(x_1,\ldots,x_n)\in L_p([0,2\pi]^n)$ и таких, что для каждого набора чисел $i_1,i_2,\ldots,i_m$, $1\le i_j\le n$, $1\le j\le m\le n$ величина.

$$I_1^{\theta_{im}}=\int_0^{2\pi}\alpha_{in}(t_{im})\left\{\ldots\left\{\int_0^{2\pi}\alpha_{i1}(t_{i1})\omega_{k_{i1}\ldots k_{im}}(f,t_{i1},\ldots,\right.\right.$$
$$\left.\left.t_{im})_p dt_{i1}\right\}^{\theta_{i2}/\theta_{i1}}dt_{im-1}\right\}^{\theta_{im}/\theta_{im-1}}dt_{im}$$

конечна.

Будем говорить, что вектор α удовлетворяет $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ условию, если существуют действительные числа σ_i, $i=1,\ldots n$ такие, что для каждого $\delta_i\in(0,2\pi)$ и $\varepsilon_i>0$

$$\int_0^{\delta_i}\alpha_i(t)t^{\sigma_i}dt=\infty\ \text{ и }\ \int_0^{\delta_i}\alpha_i(t)t^{\sigma_i-\varepsilon_i}dt=\infty.$$

Если еще выполнены условия

$$\int_0^{\delta_i}\alpha_i(t)t^{\sigma_i^*}dt\ll\int_{\delta_i}^{2\delta_i}\alpha_i(t)^{\sigma_i^*}dt,\ \ i=1,\ldots,n,\ \ \sigma_i\le\sigma_i^*$$

то будем говорить, что вектор α удовлетворяет σ^* условию, причем запись $A(f)\ll B(f)$ будет обозначать, что для функционалов $A(f)$ и $B(f)$ существует постоянная C – может быть, даже зависящая от некоторых фиксированных параметров, но не зависящая от f – такая что $A(f)\le C\cdot B(f)$.

Будем говорить, что вектор α удовлетворяет $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, λ_i-действительные числа, условию, если для каждого $\delta\in(0,\pi)$

$$\int_{2\delta}^{2\pi}\alpha_i(t)t^{\lambda_i}dt\ll\int_{\delta}^{2\delta}\alpha_i(t)t^{\lambda_i}dt.$$

Целью статьи является доказательство следующих теорем:

Теорема 1. *Пусть вектор* α *удовлетворяет* $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ *условию* $1 \le p_i \le \infty$, $0 < \theta_i < \infty$. *Тогда:*

а. *если* $k_i\theta_i < \sigma_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$ *то класс* $SB(p, \theta, k, \alpha)$ *содержит все константы и только их;*

б. *если существуют числа* $i_1, \ldots, i_l$, $1 \le l < n$ *такие, что* $ki_s\theta i_s < \sigma i_s$, $s = 1, \ldots, l$ *и* $j_1, \ldots, j_{n-1}$ *такие, что* $ki_\nu\theta i_\nu \ge \sigma i_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n-l$, *то класс* $SB(p, \theta, k, \alpha)$ *содержит все функции, зависящие от* $x_j, \ldots, x_{jn-l}$ *и только эти функции;*

в. *если* $k_i\theta_i \ge \sigma_i^*$ *и* $k_i^{(1)}\theta_i \ge \sigma_i^*$ *для каждого* $i = 1, 2, \ldots, n$ *то классы* $SB(p, \theta, k, \alpha)$ *и* $SB(p, \theta, k^{(1)}, \alpha)$ *совпадают для всех* k *и* $k^{(1)}$*;*

г. *если* $\sigma_i \le k_i^{(2)}\theta_i < \sigma_i^*$, *для каждого* $i = 1, 2, \ldots, n$ *то класс* $SB(p, \theta, k^{(1)}, \alpha)$ *не совпадает ни с оним из класса* в.

Теорема 2. *Пусть векторы* p, q, σ^*, λ, k, k^* *такие что* $1 \le p_i < q_i \le \infty$, $0 < \theta_i < \infty$, $k_i\theta_i \ge \sigma_i^*$, $k_i^* \ge \sigma_i^*/\theta_i - 1/p_i - 1/q_i$, $\lambda_i/\theta_i \ge R_i$ *(где здесь и в дальнейшем пользуемся обозначением* $R_i = 1/p_i - 1/q_i$*), вектор* α *удовлетворяет* σ^* *и* λ *условиям и* $\alpha^*(t_1, \ldots, t_n) = (\alpha_1^*(t_1), \ldots, \alpha_n^*(t_n))$ *где* $\alpha_i^*(t_i) = \alpha_i(t_i)t_i^{\theta_i R_i}$. *Тогда справедливо вложение*

$$SB(p, \theta, k, \alpha) \subset SB(q, \theta, k^*, \alpha^*)$$

Аналогичные результаты для функции одной переменной получены Потаповым [**2**] и [**3**].

Доказательство утверждений а. и б. теоремы можно провести как и доказательство аналогичных утверждений для функций одной переменной и мы его опускаем. Для доказательства утверждения г. достаточно на случай функции n переменных перенести следующий пример: Непрерывная функция $f(x) = \sum_{n-1}^{\infty} a^n \cos a^{-n}x$ $0 < a, 1$ имеете модули непрерывности [**4**] $\omega_(f, t)_c = O(t)$ и $\omega_1(f, t) > A \ln t^{-1}$ где A некоторая положительная константа. Если положить

$$\alpha(t) = t^{-\theta-1}(\ln t^{-1})^{-\gamma} \text{ где } 1 < \gamma \le 1 + \theta, \text{ то } \int_0^\delta \alpha(t)\omega_1^0(f, t)_c dt = \infty$$

и $\int_0^\delta \alpha(t)\omega_2^0(f, t)_c dt < \infty$ и, значит, $f \in B(p, \theta, 2, \alpha)$, но $f \notin B(p, \theta, 1, \alpha)$.

Для доказательства части в. теоремы 1 и теоремы 2 нам нужны некоторые леммы.

Если обозначить $\mu_i(n) = \int_{2^{-n}}^{2\cdot 2^{-n}} \alpha_i(t_i)dt_i$. то справедлива

Лемма 1. [**2**] *Пусть вектор* $\alpha(t_1, \ldots, t_n)$ *удовлетворяет* σ^* *условию и* $k_i\theta_i \ge \sigma_i^*$, $\forall i = 1, \ldots, n$. *Тогда, для* $m \ge 0$

$$S \equiv \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\mu_i(n)}{2^{nk_i\theta_i}} \ll \frac{\mu(m)}{2^{mk_i\theta_i}}$$

Лемма 2. *Если $f \in L_p([0,2\pi]^n)$, $i_1,\dots,i_m (1 \le i_j \le m \le n)$ данные натуральные числа, то*

$$Y_{l_{i1}\dots l_{im}}(f)_p \le \omega_{k_{i1}\dots k_{im}}(f, 1/l_{ij}+1, \dots 1/l_{im}+1)_p \ll$$
$$\ll \prod_{j=1}^{m}(l_{ij}+1)^{k^{ij}} \sum_{\nu_{ij}=0}^{l_{i1}} \cdots \sum_{\nu_{im}=0}^{l_{im}} \prod_{j=1}^{m} (\nu_{ij}+1)^{kij-1} Y_{\nu_{i1}\dots\nu_{im}}(f)_p$$

Для функции одной переменной лемма 2 доказана в [**4**], а для функций многих переменных в [**5**].

Лемма 3. [**1**] *и* [**3**]:

а. *Если $a_n \ge 0$, $0 < \alpha < \beta < \infty$, то $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\beta})^{1/\beta} \le (\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha})^{1/\alpha}$.*

б. *Пусть $a_n \ge 0$, $b_n \ge 0$, $1 \le \theta < \infty$, $\sum_{n=m}^{\infty} a_n = a_m\beta_m$. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{m=1}^{n} b_m\right)^{\theta} \ll \sum_{n=m}^{\infty} a_n (b_n\beta_n)^{\theta}$$

в. *Пусть $a_n \ge 0$, $b_n \ge 0$, $1 \le \theta < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_m\gamma_m$. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{m=n}^{\infty} b_m\right)^{\theta} \ll \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\gamma_n b_n)^{\theta}.$$

Через $SY(p,\theta,\alpha)$ обозначим класс функций $f \in L_p([0,2\pi]^n)$ таких что для всех $i1,\dots im$, $1 \le ij \le n$, $1 \le j \le m \le n$.

$$\sum_{im=0}^{\infty} \mu_{im}(im) \left\{ \dots \left\{ \sum_{i1=0}^{\infty} \mu_{i1}(i1) Y_{I_1,\dots,I_m}^{\theta_{i1}}(f)_p \right\}^{\theta_{i2}/\theta_{i1}} \dots \right\}^{\theta_{im}/\theta_{im-1}} < \infty,$$

где для краткости положено $I_k = 2^{i_k^{-1}}$, $k = 1,\dots,m$.

Лемма 4. *Пусть функция $\alpha(t_1,\dots,t_n)$ удовлетворяет σ^* условию и $k_i\theta_i \ge \sigma_i^*$, $\forall i = 1,\dots,n$. Тогда: $SY(p,\theta,\alpha) \subset SB(p,\theta,k,\alpha)$.*

Для простоты доказательства, лемму 4 проведем для случая $n = 2$. Так как модуль гладкости непрерывная неубывающая функция, то

$$I_2^{\theta_1} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) \omega_{k_1k_2}^{\theta_1}(f, 2^{-n_1}2^{-n_2})_p \right\}^{\theta_2/\theta_1} \equiv I_2^{\theta_2}$$

учитывая лемму 2, получим, что

$$I_2^{\theta_2} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2k_2\theta_2} \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) 2^{-n_1k_1\theta_1} P^{\theta_1} \right\}^{\theta_1/\theta_2},$$

где

$$P = \sum_{m_1=1}^{n_1} \sum_{m_2=0}^{n_2} 2^{m_1k_1} 2^{m_2k_2} Y_{M_1M_2}(f)_p$$

и где, как и выше, $M_i = 2^{m_i - 1}$, $i = 1, 2$.

Пусть $0 < \theta_1 < 1$. Применаяя лемму 3а, потом лемму 1 получим:

$$I_2^{\theta_2} \ll$$

$$\ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 k_2 \theta_2} \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) 2^{-n_1 k_1 \theta_1} \sum_{m_1=0}^{n_1} \sum_{m_2=0}^{n_1} 2^{m_1 k_1 \theta_1} 2^{m_2 k_2 \theta_2} Y^{\theta_1} \right\}^{\theta_2/\theta_1} =$$

$$= \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 k_2 \theta_2} \left\{ \sum_{m_2=0}^{n_2} 2^{m_2 k_2 \theta_1} \sum_{m_1=0}^{\infty} 2^{m_1 k_1 \theta_1} y^{\theta_1} \sum_{n_1=m_1}^{\infty} \mu_1(n_1) 2^{-n_1 k_1 \theta_1} \right\}^{\theta_2/\theta_1} \ll$$

$$\ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 k_2 \theta_2} \left\{ \sum_{m_2=0}^{n_2} 2^{n_2 k_2 \theta_1} \sum_{m_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) Y^{\theta_1}_{M_1 M_2}(f)_p \right\}^{\theta_2/\theta_1}.$$

Если $\theta_2 < \theta_1$, то, применяя еще раз лемму 3а, а потом лемму 1 имеем:

$$I_2^{\theta_2} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 k_2 \theta_2} \sum_{m_2=0}^{n_2} 2^{m_2 k_2 \theta_2} \left\{ \sum_{m_1=0}^{\infty} \mu_1(m_1) Y^{\theta_1} \right\}^{\theta_2/\theta_1} \ll$$

$$\ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(m_2) \left\{ \sum_{m_1=0}^{\infty} \mu_1(m_1) Y^{\theta_1}_{M_1 M_2}(f)_p \right\}^{\theta_2/\theta_1} \tag{1}$$

Для $\theta_2 \geq \theta_1$ то же неравенство следует после применения лемм 3б и 1. Пусть теперь, $\theta_1 \geq 1$. Учитивая лемму 3б, а потом лемму 1, имеем:

$$I_2^{\theta_2} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 k_2 \theta_2} \left\{ \sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) 2^{-n_1 k_1 \theta_1} \left[\sum_{m_2=0}^{n_2} 2^{n_1 k_1} 2^{m_2 k_2} Y \right]^{\theta_1} \right\}^{\theta_2/\theta_1}$$

Так как $\theta_1 \geq 1$, можно применить неравенство Минковского для сумм:

$$I_2^{\theta_2} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 k_2 \theta_2} \left\{ \sum_{m_2=0}^{n_2} \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) 2^{m_2 k_2} Y \right]^{1/\theta_1} \right\}^{\theta_2}$$

откуда если $\theta_2 > 1$, применяя лемму 3б, аесли $\theta_2 \leq 1$ лемму 3а, а потом лемму 1 получим неравенство (1). Лемма 4 этим доказана.

Лемма 5. *Если* $1 \leq p_i \leq \infty$, $0 < \theta_i < \infty$, *то* $SB(p, \theta, k, \alpha) \subset SY(p, \theta, \alpha)$.

Доказательство леммы следует непосредственно из определений рассматриваемых классов и леммы 2.

Лемма 6. [**2**]*Если вектор* $\alpha(t_1, \ldots, t_n)$ *удовлетворяет* λ *условию то*

а. $2^{n\lambda_i} \ll \mu_i(n)$ б. $\sum_{n=0}^{m} \mu_i(n) 2^{-n\lambda_i} \ll \mu_i(m) 2^{-m\lambda_i}$.

Лемма 7. [**6**] *Пусть* $f \in L_p([0,2\pi]^n)$, $1 \le p_i \le q_i \le \infty$, $\rho_i = q_i$ *если* $q_i < \infty$ *и* $\rho_i = 1$, *если* $q_i = \infty$. *Тогда, если величина*

$$I^{\rho_n} = \sum_{m_n=0}^{\infty} \left\{ \dots \left\{ \sum_{m_2=0}^{\infty} \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} S \right)^{\rho_2/\rho_1} \right\}^{\rho_3/\rho_2} \dots \right\}^{\rho_n/rho_{n-1}},$$

где

$$S = \prod_{i=1}^{n} 2^{m_i R_i} \rho Y_{M_1 M_2}^{\rho_1}(f)_p,$$

конечна, то $f \in L_q^0([0,2\pi]^n)$ *и кроме того, справедливо неравенство*

$$Y_{k_1\dots k_n}^{\rho_n}(f)_q \ll \sum_{m_n=k_n}^{\infty} \left\{ \dots \left[\sum_{m_2=k_2}^{\infty} \left(\sum_{m_1=k_1}^{\infty} S \right)^{\rho_2/\rho_1} \right]^{\rho_3/\rho_2} \dots \right\}^{\rho_n/\rho_{n-1}}$$

Лемма 8. *Пусть* $f \in L_p([0,2\pi]^n)$. *Тогда* $f = \sum_{i \le ij \le n} F_{i1\dots ij\dots im} + F_0$ *где* F_0 *константа, а* $\int_0^{2\pi} F_{i1\dots ij\dots im} dx_{ij} = 0$ *для почти всех* $i1, dots, ij-1, ij+1, dots, im$ *и всех* $j = 1, 2, \dots, m$ *и* $F_{i1\dots ij\dots im} \in L_{p^*}([0,2\pi]^m)$, $p^* = (p_{i1}, \dots p_{im})$.

Утверждение леммы 8 есть следствие аналогичной леммы Лизоркина-Никольского [**7**] для случая $p_1 = p_2 = \dots = p_n$.

Лемма 9. *Если* $f \in L_p^0([0,2\pi]^n)$, *то*

$$\omega_{k_1\dots k_s}(t, \delta_1, \dots, \delta_s)_{p^*} \ll \omega_{k_1\dots k_s \dots k_n}(f, \delta_1, \dots, \delta_s, 1, \dots, 1)_p$$

В метрике L_p лемма 9 доказана в [**8**], а в метрике L_p^0 доказательство аналогично.

Через $\sum SB^0(p, \theta\alpha)$ обозначим класс функций $f(x_1, \dots, x_n) \in L_p([0, 2\pi]^n)$ и таких, что для всех функций $F_{i1\dots im}$ из леммы 8 справедливо неравенство

$$I_1^{\theta_{im}} = \int_0^{2\pi} \alpha_{im}(t_{im}) \left\{ \dots \left\{ \int_0^{2\pi} \alpha_{i1}(t_{i1}) \omega_{k_{i1}\dots k_{im}}(F_{i1\dots im}, t_{i1}, \dots, t_{im})_{p^*} dt_{i1} \right\}^{\theta_{i2}/\theta_{i1}} \dots \right\}^{\theta_{im}/\theta_{im-1}} dt_{in} < \infty \tag{2}$$

При выполнении условия (2) для функции $F_{i1\dots im}$ из леммы 8 будем писать, что $F_{i1\dots im} \in SB_0(p^*, \theta^*, \alpha^*, k, m^*)$, $p^* = (p_{i1}, \dots, p_{im})$, $\theta^a st = (\theta_{i1}, \dots, \theta_{im})$, $\alpha^* = (\alpha_{i1}(t_{i1}), \dots \alpha_{im}(t_{im}))$, $k^* = (k_{i1}, \dots, k_{im})$.

Лемма 10. *Классы* $SB(p, \theta, \alpha, n)$ *и* $\sum SB^0(p, \theta, \alpha, n)$ *совпадают.*

Утверждение леммы следует из леммы 9 и того обстоятельства, что

$$\omega_{k_{i1}\dots k_{is}}(F_{i1\dots is}, \delta_{i1}, \dots, \delta_{is})_{p^*} = \omega_{k_{i1}\dots k_{is}}(f - \Phi, \delta_{is}, \dots, \delta_{is})_{p^*}$$

где Φ – сумма всех функций из леммы 8 зависящих от всех x_{ij} дља выбранных индексов.

Лемма 11. [**9**] *Если функция* $\alpha(t)$ *удовлетворяет* λ *условию,* $0<\theta<\infty$, $0<\rho<\infty$, $A_n \geq 0$ *для всех* $n=1,2,\dots,$ *то справедливо неравенство*

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\lambda\rho/\theta} A_{2^n}^{\rho}\right\}^{1/\rho} \ll \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) A_{2^n}^{\theta}\right\}^{1/\theta}.$$

Доказательство теоремы 1 в. Из лемм 4 и 5 следует, что если вектор $\alpha(t_1,\dots,t_n)$ удовлетворяет σ^* условию, то для каждого k_i, $k_i\theta_i \geq \sigma_i^*$, $\forall i=1,\dots,n$ классы $SB(p,\theta,k,\alpha)$ совпадают с классом $SY(p,\theta,\alpha)$ но тогда совпадают и между собой, а это и есть утверждение теоремы 1в.

Доказательство теоремы 2. И эту теорему мы докажем для случая $n=2$. Пусть $f(x,y) \in SB(p,\theta,k,\alpha)$. Тогда, по лемме 10, $f \in \sum SB^0(p,\theta,k,\alpha)$ и для функций F_{12}, F_1 и F_2 из леммы 8 справедливы неравенства:

$$I_3^{\theta_2} = \int_0^{2\pi} \alpha_2(t_2)\left\{\int_0^{2\pi} \alpha_1(t_1)\omega_{k_1k_2}^{\theta_1}(F_{12},t_1,t_2)_p dt_1\right\}^{\theta_2/\theta_1} dt_2 < \infty$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} \alpha_1(t)\omega_{k_1}^{\theta_1}(F_1,t)_{p_1} dt < \infty$$

$$I_5 = \int_0^{2\pi} \alpha_2(t)\omega_{k_2}^{\theta_2}(F_2,t)_{p_2} dt < \infty.$$

Надо доказать, что $f \in SB(q,\theta,k^*,\alpha^*)$ или $f \in \sum SB^0(q,\theta\alpha^*.n)$. Докажем сначала, что $F \equiv F_{12} \in L_q^0$. Для этого, по лемме 7, достаточно прверить, что шодится ряд

$$A = \sum_{n_2=0}^{\infty}\left\{\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1R_1\rho_1} 2^{n_2(1/p_2-1/q_1)\rho_1} Y_{N_1N_2}^{\rho_1}(F)_p\right\}^{\rho_1/\rho_2}.$$

так как $\lambda_i \geq \theta_i R_i$, то

$$A \ll \sum_{n_2=0}^{\infty}\left\{\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1R_1\rho_1/\theta_2} 2^{n_2\lambda_2\rho_1/\theta_2} Y_{N_1N_2}^{\rho_1}(F)_p\right\}^{\rho_2/\rho_1}.$$

Применяя два раза лемму 11, получим:

$$A \ll \left\{\sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2)\left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) Y_{N_1N_2}^{\theta_1}(F)_p\right]^{\theta_2/\theta_1}\right\}^{\rho_2/\rho_1}.$$

Из предположения, что $I_3 < \infty$ и леммы 5 следует шодимость ряда

$$\sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2)\left\{\sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) Y_{N_1N_2}^{\theta_1}(F)_p\right\}^{\theta_2/\theta_1}.$$

Этим доказано, что и $A<\infty$, т.е. $F_{12}\in L_q^0$. Тем же способом можно доказать, что $F_1\in L_{q_1}^0$ и $F_2\in L_{q_2}^0$ и, значит, $f\in L_q([0,2\pi]^n)$. Вектор α удовлетворяет σ^* условию. Нетрудно видеть, что вектор α^* удовлетворяет σ'^* условию, где $\sigma'^*=(\sigma_i'^*,\dots,\sigma_n'^*)$ и $\sigma_i'^*=\sigma_i^*-R_i\theta_i$. Тогда для $k_i^*\geq\sigma_i^*/\theta_i$ на основании теоремы 1 следует:

$$I_6^{\theta_2}=\int_0^{2\pi}\alpha_2^*(t_2)\left\{\int_0^{2\pi}\alpha_1^*(t_1)\omega_{k_1^*k_2^*}^{\theta_1}(F_{12}t_1,t_2)_p\right\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2\ll$$
$$\ll\sum_{n_2=0}^{\infty}\mu_2(n_2)2^{-n_2R_2\theta_2}\left\{\sum_{n-1=0}^{\infty}\mu_1(n_1)2^{-n_1R_1\theta_1}B^{\theta_1/\rho_2}\right\}^{\theta_2/\theta_1}$$

где $B=\sum_{m_2=n_2}^{\infty}2^{m_2R_2\rho_2}\left[\sum_{m_1=n_1}^{\infty}2^{m_1R_1\theta_1}Y^{\rho_1}(F)_p\right]^{\rho_1/\rho_2}$.

I. Пусть $\theta_1\leq\rho_2$. Применяя лемму 3а, а затем меняя порядок суммирования, имеем $I_6^{\theta_2}\ll\sum_{n_2=0}^{\infty}\mu_2(n_2)2^{-n_2R_2\theta_2}\left\{\sum_{n_1=0}^{\infty}\mu_1(n_1)2^{-n_1R_1\theta_1}C\right\}^{\theta_2/\theta_1}$ $\ll\sum_{n_2=0}^{\infty}\mu_2(n_2)2^{-n_2R_2\theta_2}\left\{\sum_{n_2=0}^{\infty}2^{m_2R_2\theta_1}\sum_{n_1=0}^{\infty}\mu_1(n_1)2^{-n_1R_1\theta_1}D^{\theta_1/\rho_1}\right\}^{\theta_2/\theta_1}$ где $C=\sum_{m_2=n_2}^{\infty}2^{m_2R_2\theta_1}\left[\sum_{m_1=n_1}^{\infty}2^{n_1R_1\theta_1}Y^{\rho_1}\right]^{\theta_1/\rho_1}$, $D=\sum_{m_1=n_1}^{\infty}2^{m_1R_1\theta_1}Y^{\rho_1}$.

Ia. Пусть $\rho_1\geq\theta_1$. Применяя лемму 3а, меняя порядок суммирования, и применяя лемму 6, получим что

$$E=\sum_{n_1=0}^{\infty}\mu_1(n_1)2^{-n_1R_1\theta_1}\cdot D^{\theta_1/\rho_1}\ll\sum_{n_1=0}^{\infty}\mu_1(n_1)2^{-n_1R_1\theta_1}\cdot\sum_{m_1=n_1}^{\infty}2^{m_1\mathbf{R}_1\theta_1}Y^{\theta_1}=$$
$$=\sum_{m_1=0}^{\infty}2^{m_1R_1\theta_1}Y^{\theta_1}\sum_{n_1=0}^{m_1}\mu_1(n_1)2^{-m_1\lambda_1}2^{n_1[\lambda_1-R_1\theta_1]}\ll$$
$$\ll\sum_{m_1=0}^{\infty}\mu_1(m_1)Y_{M_1M_2}^{\theta_1}(F)_p$$

Iб. Если $\rho_1<\theta_1$, то, применяя лемму 3в, а затем лемму 6, получим, что и в этом случае

$$E\ll\sum_{m_1=0}^{\infty}\mu_1(m_1)Y_{M_1M_2}^{\theta_1}(F)_p$$

Тогда $I_6^{\theta_2}\ll\sum_{n_2=0}^{\infty}\mu_2(n_2)2^{-n_2R_2\theta_2}\left\{\sum_{m_2=n_2}^{\infty}2^{m_2R_2\theta_1}\sum_{m_1=0}^{\infty}\mu_1(m_1)Y^{\theta_1}\right\}^{\theta_2/\theta_1}$. Если $\theta_2\geq\theta_1$, то применяя лемы 3б и 6 получим, что

$$I_6^{\theta_2}\ll\sum_{n_2=0}^{\infty}\mu_2(n_2)\left\{\sum_{m_1=0}^{\infty}\mu_1(m_1)Y_{M_1M_2}^{\theta_1}(F)_p\right\}^{\theta_1/\theta_2}\tag{3}$$

Если $\theta_2<\theta_1$, то применяя лемму 3а, меняя порядок суммирования, и применяя затем лемму 6, получим справедливость неравенства (3).

II. Пусть $\theta_1 > \rho_1$. Применяя неравенство Минковского получим:

$$I_6^{\theta_2} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 R_2 \theta_2} \left\{ \sum_{m_2=0}^{\infty} 2^{m_2 R_2 \theta_2} G^{\rho_2/\theta_1} \right\}^{\theta_2/\rho_2}, \quad \text{где}$$

$$G = \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_1(n_1) 2^{-n_2 R_2 \theta_1} \cdot D.$$

Если $\rho_1 > \theta_1$, то по лемме 3а имеем:

$$I_6^{\theta_2} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 R_1 \theta_2} \left\{ \sum_{m_2=n_2}^{\infty} 2^{m_2 R_2 \theta_2} H^{\rho_2/\theta_1} \right\}^{\theta_2/\rho_2}, \quad \text{где}$$

$$H = \sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) 2^{-n_2 R_1 \theta_1} \sum_{m_1=n_1}^{\infty} 2^{m_1 R_1 \theta_1} Y^{\theta_1}(F).$$

Изменяя порядок суммирования, учитивая, что $\lambda_i \geq R_i \theta_i$ и применяя лемму 6, получим:

$$I_6^{\theta_2} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 R_2 \theta_2} \left\{ \sum_{m_2=n_2}^{\infty} 2^{m_2 R_2 \theta_2} \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) Y^{\theta_1} \right]^{\rho_2/\theta_1} \right\}^{\theta_2/\rho_2}$$

Если $\rho_2 > \theta_2$, то на основании леммы 3а,

$$I_6^{\theta_2} \ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu_2(n_2) 2^{-n_2 R_2 \theta_2} \sum_{m_2=n_2}^{\infty} 2^{m_2 R_2 \theta_2} \left\{ \sum_{m_1=0}^{\infty} \mu_1(m_1) Y^{\theta_1} \right\}^{\theta_2/\theta_1}$$

Из этого неравенства следует справедливоость неравенства $I_6^{\theta_2} \ll \infty$. Неравенство $I_6^{\theta_2} \ll \infty$ и в остальных случаях можно получить применением лемм 3а.б.в леммы 6.

Аналогично получаются и оценки

$$I_7 = \int_0^{2\pi} \alpha_1^*(t) \omega_{k_1^*}^{\theta_1}(F_1, t)_q dt < \infty, \quad I_8 = \int_0^{2\pi} \alpha_2^*(t) \omega_{k_2^*}^{\theta_2}(F_2, t)_{q_2} dt < \infty.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ц. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения* Наука, Москва 1969.

[2] М. К. Потапов, *О вложении и совпадании некоторых классов функций*, Известия АН СССР, серия матем. **33** (1969), 840–860.

[3] М. К. Потапов, *Об одной теореме вложения*, Mathematica **14 (37)** (1972), 123–146.

[4] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменно*, Москва, 1960.

[5] М. К. Потапов, *Приближение "углом" и теоремы вложения*, Math. Balkanica **2** (1972), 183–198.

[6] М. К. Потапов, *Теоремы вложения в смешанной метрике*, Труды МИААН СССР, **156** (1980), 143–156.

[7] П. И. Лизоркин, Ц. М. Никольский, *Классификация дифференцируемых функций на основе пространств с доминирующей смешанной производной*, МИАН СССР (1965), 77–143.

[8] М. К. Потапов, *Теоремы Харди-Литтлвуда, Марцинкевича-Литтлвуда-Пэли, приближение "углом" и вложение некоторых классов функций*, Математика **14 (37)**, (1972), 339–362.

[9] Б. Лакович, М. К. Потапов, *К вопросу о взаимовсязи некоторых классов функций*, Мат. Весник **3** (16) (31), (1979), 295–310.

Институт за математику и физику,
81000 Титоград, Југославија

(Поступила 01 03 1985)