PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 42 (56), 1987, pp. 167–173

SUR LA MÉTHODE DES DOMAINES FICTIFS POUR UNE ÉQUATION ELLIPTIQUE QUASILINÉAIRE DU QUATRIÈME ORDRE

B. Jovanović

Résumé. En utilisant la méthode des domaines fictifs on a construit un schéma aux différences finies pour le premier problème aux limites pour une équation elliptique quasilinéaire du quatrième ordre. Si la solution généralisé du problème appartient à l'espace de Sobolev $H^4(\Omega)$, on obtient une estimation du type $||u^* - U_h||_{2,\omega} = O(h^{0.5})$.

1. Introduction. Dans l'approximation des solutions généralisées des équations aux dérivées partielles par la méthode des différences finies on rencontre certains problèmes. Par exemple, si la solution n'a pas de dérivées continues, on ne peut pas démontrer la convergence par la technique classique des séries de Taylor.

Un autre groupe de problèmes est provoqué par l'approximation de la frontière. Dans la méthode des domaines fictifs on évite ces problèmes en complétant le domaine primordial jusqu' à un certain domaine "canonique". Dans ce nouveau domaine on substitute le problème initial par un problème qui lui est proche.

Dans cet article on considére la combinaison des méthodes des domaines fictifs et des différences finies dans le cas d'un problème aux limites elliptique quasilinéaire du quatrième ordre. Pour le schéma aux différences finies nous avons obtenu une estimation d'ordre de la convergence compatible avec la régularité de la solution. De cette facon, le résultat de [14] est amélioré.

2. Le problème aux limites. L'approximation par la methode des domaines fictifs. Soit Ω un ouvert borné de R^2, avec la frontière S de classe C^4. Nous considérons le problème aux limites suivant:

$$\begin{aligned} &\Delta^2 u + a(x,u) = f(x), \qquad x = (x_1, x_2) \in \Omega \\ &u(x) = \partial u/\partial n = 0, \qquad x \in S \end{aligned} \tag{1}$$

AMS Subject Classification (1980): Primary 65N10.

(Δ - l'opérateur de Laplace). Nous supposons que $f \in L_2(\Omega)$, $a \in C(\overline{\Omega} \times (-\infty, \infty))$ et que les conditions suivantes sont vérifiées:

$$(a(x,u) - a(x,v))(u - v) \geq 0, \qquad \forall (x,u,v), \tag{2}$$

$$|a(x,u) - a(x,v)| \leq L|u - v|, \qquad \forall (x,u,v). \tag{3}$$

Sans limiter la généralité, nous pouvons supposer que $a(x,0) = 0$.

Par $||\cdot||_{s,E}$ nous désignons la norme, et par $|\cdot|_{s,E}$ la seminorme de l'espace de Sobolev $H^s(E)$ ($s \geq 0$, réel) [1]. M désigne la constante générique.

Le problème (1) a une solution unique $u \in H^4(\Omega)$, et l'estimation à priori

$$||u||_{4,\Omega} \leq M||f||_{0,\Omega} \tag{4}$$

est accomplie [14].

Pour l'approximation du problème (1) nous utilisons la méthode des domaines fictifs [11]. Soit Ω_1 un autre domaine de R^2, tel que $\overline{\Omega} \cup \Omega_1 = \Omega^* = (-r,r)^2$, ou $r = \text{const} > 0$. Dans le domaine Ω^* nous considérons un nouveau problème au limite:

$$\begin{aligned} &\Delta^2 U + cU + a^*(x,U) = f^*(x), \quad x \in \Omega^* \\ &U = \Delta U = 0, \qquad x \in \partial\Omega^* \end{aligned} \tag{5}$$

où

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \Omega_1 \end{cases} \qquad a^*(x,u) = \begin{cases} a(x,u), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \Omega_1 \end{cases}$$

$$c(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega, \\ \varepsilon^{-1}, & x \in \Omega_1 \end{cases} \qquad \varepsilon > 0, \text{ réel arbitrairement petit.}$$

Suivant [2, 14], nous avons remplacé la condition $\partial u/\partial n|_S = 0$ par $\Delta U|_{\partial\Omega^*} = 0$. Notons que la fonction prolongée a^* satisfait aussi à (2) et (3).

D'après [14], le problème (5) a une solution unique $U \in H^4(\Omega^*)$ satisfaisant

$$||U||_{2,\Omega^*} \leq M||f||_{0,\Omega} \quad \text{et} \tag{6}$$

$$||U||_{4,\Omega^*} \leq M(||f||_{0,\Omega} + \varepsilon^{-1}||U||_{0,\Omega_1}). \tag{7}$$

LEMME. *La solution du problème* (5) *converge vers la solution du problème* (1), *quand* $\varepsilon \to 0$, *au sens des estimations suivantes:*

$$||u^* - U||_{2,\Omega^*} \leq M(\varepsilon^{1/8}||\Delta u||_{0,S} + \varepsilon^{3/8}||\partial\Delta u/\partial n||_{0,S}), \tag{8}$$

$$||u^* - U||_{2,\Omega_1^*} \leq M(\varepsilon^{5/8}||\Delta u||_{0,S} + \varepsilon^{7/8}||\partial\Delta u/\partial n||_{0,S}). \tag{9}$$

où

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \Omega_1. \end{cases}$$

Démonstration. L'erreur $w = u^* - U$ satisfait aux conditions:

$$\begin{gathered} \Delta^2 w + cw + a^*(x, u^*) - a^*(x, U) = 0, \quad x \in \Omega \cup \Omega_1 \\ w = \Delta w = 0, \quad x \in \partial\Omega^* \\ [w]_S = 0, \quad [\Delta w]_S = \Delta u|_S. \end{gathered} \tag{10}$$

Utilisant la formule de Green et la condition (2) on obtient:

$$\int_{\Omega^*} [(\Delta w)^2 + cw^2]\, dx \le - \int_S \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial n} w - \Delta u \frac{\partial w}{\partial n} \right) dS.$$

Alors:

$$|w|^2_{2,\Omega^*} + \varepsilon^{-1} ||w||^2_{0,\Omega_1} \le ||\partial \Delta u / \partial n||_{0,S} ||w||_{0,S} + ||\Delta u||_{0,S} ||\partial w / \partial n||_{0,S}$$

D'ici, utilisant les inégalités [8]:

$$||w||^2_{0,S} \le M(\delta |w|^2_{1,\Omega_1} + \delta^{-1} ||w||^2_{0,\Omega_1}), \tag{11}$$

$$|w|^2_{1,\Omega_1} \le M(\delta |w|^2_{2,\Omega_1} + \delta^{-1} ||w||^2_{0,\Omega_1}), \tag{12}$$

($\delta > 0$, arbitraire, suffisamment petit), et l'estimation [11]:

$$(\pi^2/2r^2)\, ||w||_{0,\Omega^*} \le (\pi/\sqrt{2}\, r)\, |w|_{1,\Omega^*} \le |w|_{2,\Omega^*}$$

on obtient immediatement (8) et (9).

3. Le shema aux différences finies. Dans le domaine $\overline{\Omega}^* = \Omega^* \cup \partial\Omega^*$ nous introduisons un réseau uniforme $\overline{\omega}$ avec le pas h. Posons $\omega = \overline{\omega} \cap \Omega^*$, $\gamma = \overline{\omega} \backslash \omega$, $\gamma_{\pm i} = \{x \in \gamma \,|\, x_i = \pm r, -r < x_{3-i} < r\}$, $\omega_i = \omega \cup \gamma_{-i}$ $(i = 1, 2)$, $\omega_0 = \omega \cup \gamma_{-1} \cup \gamma_{-2} \cup \{(-r, -r)\}$ et $\gamma^+ = \{(-r-h, x_2), (r+h, x_2), (x_1, -r-h), (x_1, r+h) \,|\, x_1, x_2 = -r, -r+h, -r+2h, \ldots, r\}$. Si v est une fonction discrète sur le réseau, posons

$$v^{\pm i}(x) = v(x \pm h e_i), \quad i = 1, 2,$$

ou $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

Les opérateurs des différences finies seront définis de manière habituelle:

$$\Delta_i v = (v^{+i} - v)/h, \quad \nabla_i v = (v - v^{-i})/h, \quad i = 1, 2.$$

Nous introduisons aussi le produit scalaire:

$$(v, y) = h^2 \sum_{x \in \omega} v(x) y(x)$$

et les normes et seminormes suivantes:

$$||v||^2 = ||v||^2_{0,\omega} = (v, v), \quad ||[v||^2_i = h^2 \sum_{x \in \omega_i} v^2(x), \ i = 0, 1, 2$$

$$|v|^2_{1,\omega} = \sum_{i=1}^{2} ||[\Delta_i v||^2_i,$$

$$|v|^2_{2,\omega} = \sum_{i=1}^{2} ||\Delta_i \nabla_i v||^2 + ||[\Delta_1 \Delta_2 v||^2_0,$$

$$||v||^2_{2,\omega} = ||v||^2_{0,\omega} + |v|^2_{1,\omega} + |v|^2_{2,\omega}.$$

Enfin, par $T_i^{\pm}$ nous désignons les opérateurs avérage de Steklov:

$$T_i^+ f(x) = \int_0^1 f(x + she_i)\, ds = T_i^- f(x + he_i), \quad i = 1, 2.$$

Notons que ces opérateurs transforment les dérivées en différences finies:

$$T_i^+ \partial f / \partial x_i = \Delta_i f, \quad T_i^- \partial f / \partial x_i = \nabla_i f.$$

Pour l'approximation du problème (5) nous considérons le schema aux différences finies suivant:

$$\begin{gathered} \Delta_h^2 U_h + (Tc) U_h + T a^*(\cdot, U_h) = T f^*, \quad x \in \omega \\ U_h = 0, \quad x \in \gamma \\ \Delta_i \nabla_i U_h = 0, \quad x \in \gamma \backslash (\gamma_{-(3-i)} \cup \gamma_{+(3-i)}), \quad i = 1, 2 \end{gathered} \tag{13}$$

où

$$\begin{gathered} \Delta_h^2 v = \Delta_h(\Delta_h v), \quad \Delta_h v = \Delta_1 \nabla_1 v + \Delta_2 \nabla_2 v, \\ T = T_1^2 T_2^2, \quad \text{et} \quad T_i^2 = T_i^+ T_i^- \quad (i = 1, 2). \end{gathered}$$

De la théorie des opérateurs monotones [5] on déduit facilement que le schéma (13) a une solution unique.

L'erreur $z = U - U_h$ satisfait aux conditions:

$$\begin{gathered} \Delta_h^2 z + (Tc) z = \sum_{i=1}^{2} (\Delta_i \nabla_i \eta_i, \sqrt{Tc}\, \zeta_i + \xi_i), \quad x \in \omega \\ z = 0, \quad x \in \gamma; \quad \Delta_h z = \eta_i, \quad x \in \gamma_{\pm i}, \quad i = 1, 2 \end{gathered} \tag{14}$$

où

$$\begin{gathered} \eta_i = \Delta_i \nabla_i U - T_{3-i}^2 \partial^2 U / \partial x_i^2, \quad i = 1, 2, \\ \zeta_1 = \sqrt{Tc}\, (U - TU), \quad \zeta_2 = \sqrt{Tc}\, (TU) - T(cU)/\sqrt{Tc}, \\ \xi_1 = T[a^*(\cdot, U_h) - a^*(\cdot, U)], \quad \xi_2 = T[a^*(\cdot, U) - a^*(\cdot, U(\cdot))]. \end{gathered}$$

De (14) on a

$$(\Delta_h^2 z, z) + ((Tc) z, z) = \sum_{i=1}^{2} [(\Delta_i \nabla_i \eta_i, z) + (\sqrt{Tc}\, \zeta_i, z) + (\xi_i, z)].$$

Utilisant la sommation partielle, l'inégalité de Cauchy-Schwartz et la condition (2) on obtient l'estimation à priori (voir aussi [6]):

$$|z|_{2,\omega} + ||\sqrt{Tc}\, z|| \leq M\, (||\eta_1|| + ||\eta_2|| + ||\zeta_1|| + ||\zeta_2|| + ||\xi_2||). \tag{15}$$

THÉORÈME. *Pour $\varepsilon \asymp h^4$ (c'est-à-dire $M_1h^4 \le \varepsilon \le M_2h^4$) la solution du schéma aux différences finies* (13) *converge vers la solution du probléme au limite* (1), *quand $h \to 0$, et l'estimation*

$$||u^* - U_h||_{2,\omega} \le M(h^{0.5}\ln h^{-1}||u||_{2.5,\Omega} + \\ + h^{0.5}||\Delta u||_{0,S} + h^{1.5}||\partial\Delta u/\partial n||_{0,S} + h^2||u||_{4,\Omega}) \tag{16}$$

est accomplie.

Démonstration. Evidement

$$|u^* - U_h|_{2,\omega} \le |u^* - U|_{2,\omega} + |U - U_h|_{2,\omega}. \tag{17}$$

D'après [14]

$$|g|_{2,\omega} \le M|g|_{2,\Omega^*} \text{ pour } g \in H^2(\Omega^*).$$

D'ici et de (8) résulte:

$$|u^* - U_h|_{2,\omega} \le M(\varepsilon^{1/8}||\Delta u||_{0,S} + \varepsilon^{3/8}||\partial\Delta u/\partial n||_{0,S} \tag{18}$$

D'apres (15) on a:

$$|U - U_h|_{2,\omega} \le M(||\eta_1|| + ||\eta_2|| + ||\zeta_1|| + ||\zeta_2|| + ||\xi_2||). \tag{19}$$

Utilisant le lemme de Dupont-Scott [4] et la méthodologie de [6, 7, 9 et 13] on obtient les estimations:

$$||\eta_i|| \le Mh^2|U|_{4,\Omega^*}, \quad i = 1, 2 \tag{20}$$

$$||\zeta_1|| \le Mh^2\varepsilon^{-1/2}|U|_{2,\Omega_1\cup S_h} \text{ et} \tag{21}$$

$$||\zeta_2|| \le Mh\varepsilon^{-1/2}|U|_{1,S_h} \tag{22}$$

où

$$S_h = \bigcup_{x\in S}\{x' \mid |x' - x|^2 = (x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 \le M^2h^2\}.$$

De (20), (7) et (9) résulte:

$$||\eta_i|| \le M(h^2\varepsilon^{-3/8}||\Delta u||_{0,S} + \\ + h^2\varepsilon^{1/8}||\partial\Delta u/\partial n||_{0,S} + h^2||u||_{4,\Omega}), \quad i = 1, 2. \tag{23}$$

Utilisant l'inégalité évidente

$$|U|_{2,\Omega_1\cup S_h} \le |u^* - U|_{2,\Omega^*} + |u^*|_{2,\Omega_1\cup S_h},$$

l'égalité $|u^*|_{2,\Omega_1\cup S_h} = |u|_{2,S_h\cap\Omega}$, et l'inégalité [12]:

$$|u|_{2,S_h\cap\Omega} \le M\varphi(h,\alpha)||u||_{k+\alpha,\Omega} \tag{24}$$

où $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $0 < \alpha \leq 1$, et

$$\varphi(h, a) = \begin{cases} h, & 0 < \alpha < 0.5 \\ h^{0.5} \ln h^{-1}, & \alpha = 0.5 \\ h^{0.5}, & 0.5 < \alpha \leq 1, \end{cases}$$

de (21) et (8) on obtient:

$$\begin{aligned} ||\zeta_1|| \leq M h^2 \varepsilon^{-1/2} (\varepsilon^{1/8} ||\Delta u||_{0,S} + \\ + \varepsilon^{3/8} ||\partial \Delta u / \partial n||_{0,S} + h^{0.5} \ln h^{-1} ||u||_{2.5,\Omega}). \end{aligned} \tag{25}$$

On démontre facilement que

$$|U|_{1.S_h} \leq M(h|U|_{2,S_h} + h^{0.5}||\partial U/\partial x_1||_{0,S} + h^{0.5}||\partial U/\partial x_2||_{0,S}).$$

D'ici, utilisant (11) et (12), résulte:

$$\begin{aligned} |U|_{1,S_h} &\leq M(h|U|_{2,S_h} + h|U|_{2,\Omega_1} + |U|_{1,\Omega_1}) \\ &\leq M(h|U|_{2,S_h \cup \Omega_1} + h^{-1}||U||_{0,\Omega_1}). \end{aligned}$$

Utilisant (22), (9) et les résultaits précédents on obtient:

$$\begin{aligned} ||\zeta_2|| \leq M h \varepsilon^{-1/2} [(h + h^{-1} \varepsilon^{1/2}) \varepsilon^{1/8} ||\Delta u||_{0,S} + \\ + (h + h^{-1} \varepsilon^{-1/2}) \varepsilon^{3/8} ||\partial \Delta u / \partial n||_{0,S} + h^{1.5} \ln h^{-1} ||u||_{2.5,\Omega}]. \end{aligned} \tag{26}$$

De la condition de Lipschitz (3) et de l'inégalité de Cauchy-Schwartz résulte:

$$\begin{aligned} |\xi_2(x)| = &\left| h^{-2} \iint\limits_E \left(1 - \frac{|s_1 - x_1|}{h}\right) \left(1 - \frac{s_2 - x_2}{h}\right) [a^*(s, U(x)) - \right. \\ &\left. - a^*(s, U(s))] \, ds_1 \, ds_2 \right| \leq \frac{M}{h} \left\{ \iint\limits_E [U(x) - U(s)]^2 \, ds_1 \, ds_2 \right\}^{1/2} = \\ &= \frac{M}{h} \left\{ \iint\limits_E \left[\int_{s_2}^{x_2} \frac{\partial U(s_1, t_2)}{\partial t_2} \, dt_2 + \int\limits_{s_2}^{x_2} \int\limits_{s_1}^{x_1} \frac{\partial^2 U(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \, dt_1 \, dt_2 \; + \right. \right. \\ &\left. \left. + \int\limits_{s_2}^{x_2} \frac{\partial U(t_1, s_2)}{\partial t_1} \, dt_1 \right]^2 ds_1 \, ds_2 \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq M \left\{ \iint\limits_E \left[\left(\frac{\partial U}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial s_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial s_1 \partial s_2}\right)^2 \right] \right\} ds_1 \, ds_2, \end{aligned}$$

ou on a pose $E = E(x) = (x_1 - h, x_1 + h) \times (x_2 - h, x_2 + h)$.

Par la sommation par les noeuds du réseau on obtient:

$$||\xi_2|| \leq Mh||U||_{2,\Omega^*}.$$

Par contre:

$$||U||_{2,\Omega^*} \leq ||u^* - U||_{2,\Omega^*} + ||u^*||_{2,\Omega^*} = ||u^* - U||_{2,\Omega^*} + ||u||_{2,\Omega}.$$

D'ici et de (8) on obtient:

$$||\xi_2|| \leq Mh(||u||_{2,\Omega} + \varepsilon^{1/8}||\Delta u||_{0,S} + \varepsilon^{3/8}||\partial\Delta u/\partial n||_{0,S}). \tag{27}$$

De (17-19), (23), (25–27) et de l'inégalité évidente $||u||_{2,\Omega} \leq ||u||_{2.5,\Omega}$ en prenant que $\varepsilon = Mh^4$, on obtient:

$$\begin{aligned} |u^* - U_h|_{2,\omega} \leq M(h^{0.5} \ln h^{-1}||u||_{2.5,\Omega} + \\ + h^{0.5}||\Delta u||_{0,S} + h^{1.5}||\partial u/\partial n||_{0,S} + h^2||u||_{4,\Omega}) \end{aligned} \tag{28}$$

Enfin, dans l'espace des fonctions discrètes verifiant $v(x) = 0$ sur γ la semi-norme $|\cdot|_{2,\omega}$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{2,\omega}$ [3], d'ou résulte (16).

Remarque. Utilisant le théorème des traces [10] et l'inégalité (24) avec $\alpha > 0.5$, on obtient une estimation plus simple:

$$||u^* - U_h||_{2,\omega} \leq M(h^{0.5}||u||_{2.5+\delta,\Omega} + h^{1.5}||u||_{3.5+\delta,\Omega} + h^2||u||_{4,\Omega})$$

($\delta > 0$, arbitraire). D'ici, on a aussi:

$$||u^* - U_h||_{2,\omega} \leq Mh^{0.5}||f||_{0,\Omega}.$$

REFERENCES

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] А. Х. Бугров, *Метод фиктивных областей для уравнений с частными производными еллиптического типа*, В. кн.: *Численные методы решения задач теории упругости и пластичности*, Ч. II, Новосибирск, 1978, 24–35

[3] Е. Г. Дьяконов, *Разностные методы решения краевых задач, Вып. 1*, МГУ, Москва, 1975

[4] T. Dupont, R. Scott, *Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces*, Math. Comput. **34** (1980), 441–463.

[5] H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias, *Nichtlineare operatorgleichungen und operatordifferentialgleichungen*, Akademie verlag, Berlin, 1974.

[6] Л. Д. Иванович, Б. С. Йованович, Э. Э. Шили, *О сходимости разностных схем для бигармонического уравнения*, Ж. Вычисл. Мат. Мат. Физ. **26** (1986), 776–780.

[7] B. S. Jovanović, L. D. Ivanović, E.E. Süli, *Convergence of finite-difference schemes for elliptic equations with variable coefficients*, IMA J. Numer. Anal. **7** (1987), 301–305.

[8] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, Москва, 1973.

[9] R. D. Lazarov, V. L. Makarov, W. Weinelt, *On the convergence of difference schemes for the approximation of solutions $u \in W_2^m$ $(m > 0.5)$ of elliptic equations with mixed derivatives*, Numer. Math. **44** (1984), 223–232.

[10] J. L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, *Vol.* 1, Dunod Paris, 1968.

[11] И. Г. Марчук, *Методы вычислительной математики*, Наука, Москва, 1980.

[12] L. A. Oganesyan, L. A. Ruhovec, *Вариационно-разностные методы решения элиптических уравнений*, Akad. Nauk Arm. SSR, Erevan, 1979.

[13] E. Süli, B. Jovanović, L. Ivanović, *Finite difference approximations of generalized solutions*. Math. Comput. **45** (1985), 319–327.

[14] С. А. Войцеховский, И. П. Гаврилюк, *О сходимости разностных решений к обобщенным решениям первой краевой задачи для квазилинейного уравнения четвертого порядка в областях произвольной формы*, Диффернциальные Уравнения **21** (1985), 1582–1590.

Institut za matematiku
Prirodno-matematički fakultet
11000 Beograd
Jugoslavija

(Reçu le 12 12 1986)