PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 40 (54), 1986, pp. 143–146

О СООТВЕТСТВИИ ГАЛУА ДЛЯ ОДНОМЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАДЕРЖКАМИ

Милош Миличич

Резюме. В [10] и [11] данна характеризация замкнутых классов фукций k-значной логики с задержками при помощи временных отношений, т.е. показылвается, что существует антиизоморфизм решеток замкнутых классов функций с задержками (содержаюих селекторы) и замкнутых классов временных отношений. В данной работе результаты полученны в [10] и [11] уточняются для случая одноместных функций с задержками.

Все неопределенные понятия могут быть найдены в работах [10] и [11].

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ алфавит переменных, принимающих в качестве значений злементы из множества $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Множество всех функций алгебры k-значной логики, зависящих от переменных из множества, X, обозначим через P_k. Пару $(f(x_1, x_2, \dots, x_n), t)$ где $f(x_1, x_2, \dots,\ x_n) \in P_k$, t-параметр, принимающй одно из значений $0, 1, 2, \dots$, будем называть функцией f с задержкоий t. Обозначим через P'_k множество всех пар вида (f, t), где $f \in P_k$, $t = 0, 1, 2, \dots$.

В P'_k вводятся операция синхроной суперпозиции и понятия замыкания и замкнутого класса (алгебры) относительно операции синхронной суперпозиции ([8], [9]). В [10] операция синхронной суперпозиции выражается через операции на множестве функций с задержками, аналогично операциям на множестве функций алгебры логики, предложеным А.И. Мальцевым.

Определение. Функцию $R\colon \{0\} \cup N \to M$, где M некоторое множество m-арних отношений на E_k, будем называть m-арним временным отношением на E_k.

Временное отношение можно записать так:

$$R = \{(0, \rho_0), (1, \rho_1), (2, \rho_2), \dots, (i, \rho_i), \dots\}, \text{ где } \rho_i \subset E_k^m (i = 0, 1, 2, \dots).$$

AMS Subject Classification (1980): Primary 68E99.

Определение. Будем говорить, что фунция с задержкой $(f(x_1, x_2, \dots, x_n)t)$ сохраняет (стабилизирует) временное отношение R, или что R инвариантно (устойчиво) для $(f(x_1, x_2, \dots x_n), t)$, если для каждого $(i, \rho_i) \in R$ существует $(i{+}t, \rho_{i+t}) \in R$ так, что для любого набора $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n)$ точек из ρ_i, $f(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n)$ принадлежит ρ_{i+t}.

Напомним, что под $f(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n)$ понимается точка арности m, j-ая координата которой равна значению функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от j-ых координат точек $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n (j = 1, 2, \dots, m)$.

В [11] определяются операции над временными отношениями, что позволяет рассматривать замкнутые классы (коалгебры) временных отношений. Это следующие операции: 1. переименования координат, 2. отождествления координат, 3. приписывание фиктивной переменной, 4. свертка (суперпозиция), 5. сверх-суперпозиция, 6. операция сдвига, 7. пересечгние, 8. проекция или вычеркивания строк, 9. Декартово произведение, 10. приписивание строк и 11. диагонализация.

Показывается, что множество функций с задержками, сохраняющих множество временных отношений $\mathcal{R}$, образует замкнутый класс (обозначим его через $\mathcal{P}(\mathcal{R})$) и, что множество всех временных отношений которые сохраняются заданным множеством $\mathcal{F}$ функций k-значной логики с задержкми образует замкнутый класс временных отношений (обозначим его через $J(\mathcal{F})$). Отсюда следует, что пара отображений $\mathcal{F} \to \mathcal{J}(\mathcal{F})$ и $\mathcal{R} \to \mathcal{P}(\mathcal{R})$ является соответствием Галуа.

Введем еще две операции над временными отношениями.

Объединение. Для двух временных отношений $R = \{(0, \rho_0), (1, \rho_1), (2, \rho_2), \dots\}$ и $S = \{(0, \sigma_0), (1, \sigma_1), (2, \sigma_2), \dots\}$ арности m их объединение $R \cup S = \{(0, \rho_0 \cup \sigma_0), (1, \rho_1 \cup \sigma_1), (2, \rho_2 \cup \sigma_2), \dots\}$, где

$$\forall i \in \{0\} \cup N \;\; (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \rho_i \cup \sigma_i \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow ((\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \rho_i \vee (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \sigma_i).$$

Обьединение-частичная операция. Однако ее можно распространить и на любые пары временных отношений R и S. Пусть R и S временные отношения арности m и p соответственно и $m < p$. Тогда можно положить $R \cup S = (R \times E_k^{p-m}) \cup S$.

Если функция с задержкой (f, t) сохраняет временные отношения R и S, то она, вообще говоря, не будет сохранять отношение $R \cup S$. Но, если функция f одноместная, это обстоятельство имеет место.

Дополнение. Если $R = \{(0, \rho_0), (1, \rho_1), (2, \rho_2), \dots\}$ временное отношение арности m, то под дополнением отношения понимаем временное отношение арности $\rceil R = \{(0, \rceil\rho_0), (1, \rceil\rho_1), (2, \rceil\rho_2), \dots\}$ где

$$\forall i \in \{0\} \cup N (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m) \in \rceil\rho_i \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \notin \rho_i.$$

Одноместная функция с задержкой, сохраняющая некоторое временное отношение R, вообще говоря, не будеть сохранять отношение $\rceil R$. Но, если $f(x)$ подстановка и

$$(*) \qquad \forall (i,\rho_i) \ \ ((i,\rho_i) \in R \Rightarrow f(\rho_i) = \rho_{i+t})$$

т.е. $(f(x),t)$ переводит (погружает) пару (i,ρ_i) на пару $(i+t,\rho_{i+t})$, $(i = 0,1,2,3,\dots)$, то это обстоятельство имеет место.

Подчеркнем, ито если $\mathfrak{A}$ замкнутый класс (алгебра) одноместных функций с задержками, тогда коалгебра $J(\mathfrak{A})$ замкнута не только относительно операций 1–11 [11], но и относительно операции объединения. Если $\mathfrak{A}$ алгебра перестановок с задержкам, и если выполнено $(*)$, тогда коалгебра $J(\mathfrak{A})$ замкнута даже относительно операции дополнения.

Теперь мы докажем обратные утверждения.

Теорема 1. *Если $\mathcal{S}$ коалгебра временных отношений замкнутая относительно операций* 1.–11. *и операции объединения, то $\mathcal{S} = \mathcal{J}(\mathcal{E}(\mathcal{S}))$, где $\mathcal{E}(\mathcal{S})$ обозначает совокупность всех одноместных функций с задержками, которые сохроняют все временные отношения $R_i \in \mathcal{S}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{A}$ алгебру всех полиморфизмов коалгебры $\mathcal{S}$, т.е. $\mathfrak{A} = \mathcal{P}(\mathcal{S})$. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{E}(\mathcal{S})$ алгебра одноместных полиморфизмов коалгебры $\mathcal{S}$. Покажем, что $\mathfrak{A} = \mathcal{B}$. Поставим $\mathcal{J}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}$. Ясно, что $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{A}$ и $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$. Покажем, что $\mathcal{S} = \mathcal{D}$. Для этого достаточно показать, что $G_n(\mathcal{B}) \in \mathcal{S}$, для любого $n \in N$, где

$$G_n(\mathcal{B}) = \{(0,G_n^{(0)}),(1,G_n^{(1)}),(2,G_n^{(2)}),\dots\}$$

n-ый временный график коалгебры $\mathcal{B}$ [10]. Очевидно, что

$$G_1(\mathcal{B}) \in \mathcal{S} \ \ (G_1(\mathcal{B}) = G_1(\mathfrak{A})).$$

Для $n \geq 2$, n-график $G_n^{(p)}$ $(p = 0,1,2,\dots)$ состоит из ординат функций местности n с задержками p алгебри $\mathcal{B}$, которые зависят существенно не больше чем от одного аргумента. Каждой этой функции отвечает одноместная функция с задержкой p, ордината которой входит в $G_1^{(p)}$ алгебры $\mathfrak{A}$. Поставим $G_n(\mathcal{B}) = \bigcup_{j=1}^{n} G_n^j(\mathcal{B})$, где $G_n^j(\mathcal{B}) = \{(0,G_n^{j,(0)}),(1,G_n^{j,(1)}),\dots\}$ причем $G_n^{j,(p)}$ состоит из ординат тех функций с задержками которые существенно зависят от j-го аргумента и констант, которые содержатся в $\mathfrak{A}$. Но, n-ый временный график $G_n^j(\mathcal{B})$ получается из $G_1(\mathfrak{A})$ с помощью операций приписывания строк и переименования координать. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если $\mathcal{S}$ коалгебра временных отношений замкнутая относительно операций* 1.–11. *и операции дополнения, то $\mathcal{S} = \mathcal{J}(\mathcal{A}(\mathcal{S}))$, где $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ обозначает совокупность всех подстановок с задержками, сохраняющих все временные отношения $R_i \in \mathcal{S}$.*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что коалгебра $\mathcal{S}$ замкнута относительно и оп рации объединения, так как объединение выражается через пересечение и дополнение. Согласно теореме 1 полиморфизмы коалгебры $\mathcal{S}$ должны быть одноместными функциями с задержками. Коалгебра $\mathcal{S}$ должна содержать временное отношение $D = \{(0,\Delta),(1,\Delta),(2,\Delta),\dots\}$, где $\Delta = \{(0,0),(1,1),(2,2),\dots,(k-1,k-1)\}$ и его дополнение $\rceil D = \{(0,N),(1,N),(2,N),\dots\}$, где $N = \{(\alpha,\beta)|\alpha,\beta \in E_k k\alpha \neq \beta\}$. Если $(f,t) \in \mathcal{E}(\mathcal{S})$, то $\alpha \neq \beta$ влечет $f(\alpha) \neq f(\beta)$, т.е. фунция f является подстановкой. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л.А. Биржкова, В.Б. Кудрявцев,*О полноте функций с задержками*, Проблемы кибернетики **23** (1970), 5–25.

[2] Л.А. Бирюкова,*Вопросы l-полноты для функций с задержками*, Проблемы кибернетики **31** (1976), 53–77.

[3] Л.А. Бирюкова, В.Б. Кудрявцев,*Некоторые задачи о полноте для функций с задержками*, Иследование операций **4** (1974), 88–102.

[4] В.Г. Боднарчук, Л.А. Калужнин, В.Н. Котов, Б.А. Ромов,*Теория Галуа для алгебр Поста, I*, Кибернетика, 3, Киев, 1969.

[5] В.Г. Боднарчук, Л.А. Калужнин, В.Н. Котов, Б.А. Ромов,*Теория Галуа для алгебр Поста, II*, Кибернетика 5, Киев, 1969.

[6] С.В. Яблонский,*Функциональные построения в k-значной логике*, Труды Инст. Стеклова **51** (1958).

[7] С.В. Яблонский, Г.П. Гаврилов, В.Б. Кудрявцев,*Функции алгебры логики и классы Поста*, Наука, Москва, 1966.

[8] В.Б. Кудрявцев,*Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных свяэей*, Проблемы кибернетики **8** (1962), 91–115.

[9] А.И. Мальцев,*Итеративные алгебры и многобразия Поста*, Алгебра и логика **5**, вып 2 (1966) 5–24.

[10] М.И. Миличич,*Соответствия Галуа для замкнутых классов функций с задержками, I*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **36 (50)** (1984), 119–124.

[11] М.И. Миличич,*Соответствия Галуа для замкнутиых классов функций с задержками, II*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **36 (50)** (1984), 125–136.

[12] A. Nozaki, *Réalisation des functionns définies dans un ensemble fini a l'aide des organes élémentaires d'entré-sortie*, Proc. Japan Acad. **46** (1970), 478–482.

[13] T. Hikita and A. Nozaki, *A completeness criterion for spectra*, SIAM J. Comput. **6** (1977), 285–297.

[14] T. Hikita, *Completeness criterion for functions with delay defined over a domain of three elements*, Proc. Japan Acad. **54** (1978).

Rudarsko-geoloxki fakultet
11000 Beograd
Jugoslavija

(Поступила 16 12 1987)