PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 74(88) (2003), 103–110

UBER DIE EXPLIZIT-LOSBAREN VEKUASCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Miloš Čanak

Communicated by Vojislav Marić

Zusammenfassung. Man untersucht die sgn. explizit–lösbaren Vekuaschen komplexen Differentialgleichungen $w'_{\bar{z}} = A(z,\bar{z})\bar{w} + B(z,\bar{z})$ wessen Koeffizienten $A(z,\bar{z})$ und $B(z,\bar{z})$ stetige Funktionen in einem Gebiet Ω sind. In früheren Arbeiten wurde die allgemeine Lösung dieser Gleichung mit Hilfe der singulären Doppelintegrale vom Cauchyschen Typus, der unendlichen Reihen und Rekurrenzen ausgedrückt. In dieser Arbeit wird zum ersten mal (für $A(z,\bar{z}) \neq 0$) die allgemeine Lösung einer breiten Klasse der Vekuaschen Differentialgleichungen in einem endlichen, geschlossenen und expliziten Form $w = w(z,\bar{z},Q(z),\overline{Q(z)},Q'(z))$ entdeckt, wobei $Q(z)$ beliebige, analytische Funktion ist. Diese sgn. $\mathcal{F}$-allgemeine Lösung ermöglicht die Trennung des reellen und imaginären Teiles und dadurch die Anwendungen in der Physik und Mechanik, wie auch das Auflösen verschiedener Randwertaufgaben.

1. Einführung

In seiner bekannten Monographie [1] hat I. Vekua ausführlich das elliptische System partieller Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} u'_x - v'_y &= a(x,y)u + b(x,y)v + c(x,y) \\ u'_y + v'_x &= b(x,y)u - a(x,y)v + d(x,y) \end{aligned} \tag{1.1}$$

untersucht, wobei $a(x,y), b(x,y), c(x,y)$ und $d(x,y)$ gegebene, stetige Funktionen in einem endlichen, einfach-zusammenhängenden Gebiet T sind. Dieses System hat eine grosse theoretische und praktische Bedeutung, wie auch zahlreiche Anwendungen in verschiedenen Gebieten der Mechanik. Wenn man die zweite Gleichung (1.1) mit i multipliziert und mit der ersten addiert, so erhält man die kanonische Form der Vekuaschen komplexen Differentialgleichung

$$w'_{\bar{z}} = A\bar{w} + B \tag{1.2}$$

mit

$$A = (a+ib)/2, \quad B = (c+id)/2.$$

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 35J99; Secondary 30G20.

In vielen Fällen kann man durch verschiedene Verfahren eine partikuläre Lösung w_0 der Gleichung (1.2) bestimmen. Mit Hilfe der Substitution $w = w_0 + V$ wobei V eine neue unbekannte Funktion ist, geht die Gleichung (1.2) in die homogene Gleichung

$$V'_{\bar{z}} = A\bar{V} \tag{1.3}$$

über.

Die allgemeine Lösung von (1.2) oder (1.3), (siehe [1]) ist praktisch unanwendbar, weil sie, neben den unendlichen Reihen und Rekurrenzen auch die singulären Doppelintegrale vom Cauchyschen Typus enthält und diese lassen sich im allgemeinen Fall nicht in einer endlichen Form ausrechnen. Darum hefassen sich viele Mathematiker mit dieser Problematik, einerseits mit der qualitativen Theorie und andererseits mit verschiedenen Auflösensverfahren. In vielen Problemen der Physik, Mechanik und Technik besitzt der reelle und imaginäre Teil der Lösung eine bestimmte physikalische Bedeutung. Wenn die allgemeine Lösung der Vekuaschen Differentialgleichung in einer "schönen", endlichen, geschlossenen und expliziten Form

$$w = w(z, \bar{z}, Q(z), \overline{Q(z)}) \tag{1.4}$$

dargestellt wird, wobei $Q(z)$ eine beliebige analytische Funktion ist, dann ist es möglich, ihren reellen und imaginären Teil zu trennen. Aber man kann solche Beispiele in der Literatur nicht finden.

Darum untersucht man in dieser Arbeit die sgn. explizit-lösbaren Vekuaschen Differentialgleichungen, wessen allgemeine Lösung in endlicher Form (1.4) darstellbar ist. Man weist auch auf einige Anwendungen hin.

2. Erstes Beispiel einer explizit-losbaren Vekuaschen Differentialgleichung

Am Anfang soll man ein Beispiel der Vekuaschen Differentialgleichung konstruieren, wessen allgemeine Lösung in endlicher Form (1.4) darstellbar ist. Das machen wir in folgenden Schritten.

(I) Man betrachtet die Vekuasche homogene Gleichung

$$w'_{\bar{z}} = Aw + B\bar{w}. \tag{2.1}$$

Nehmen wir an, dass die rechte Seite der Gleichung (2.1) real ist. Das gilt z.B. im Falle $A = A(x, y) = B(x, y)$, wobei A und B reelle Funktionen sind. Aber dann muss in der Gleichung

$$w'_{\bar{z}} = Aw + A\bar{w} \tag{2.2}$$

auch die linke Seite real sein.

(II) In seiner Arbeit [2] hat S. Fempl gezeigt, dass der Ausdruck $w'_{\bar{z}}$ dann und nur dann real ist, wenn die Funktion w folgende Form

$$w = \psi'_x - i\psi'_y$$

besitzt, wobei $\psi = \psi(x,y)$ eine beliebige, reelle, differenzierbare Funktion in einem einfach-zusammenhängenden Gebiet Ω ist. Dann gilt auch

$$w'_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\psi''_{xx} + \frac{1}{2}\psi''_{yy}$$

und die Gleichung (2.2) geht in die reelle elliptische partielle Differentialgleichung

$$\psi''_{xx} + \psi''_{yy} = 4A\psi'_x \tag{2.3}$$

über.

(III) Wir wollen die allgemeine Lösung der Gleichung (2.3) mittels einer beliebigen, harmonischen Funktion ausdrücken. Durch Substitution $\psi = vx^k$ wobei $v = v(x,y)$ eine neue unbekannte, reelle Funktion ist und k eine unbekannte reelle Zahl darstellt, geht die Gleichung (2.3) in

$$v''_{xx}x^k + 2v'_x kx^{k-1} + vk(k-1)x^{k-2} + x^k v''_{yy} = 4Av'_x x^k + 4Avkx^{k-1} \tag{2.4}$$

über. Durch Vergleich der Koeffizienten bei v und v'_x erhält man $k = -1$, $A = -1/(2x) = -1/(z+\bar{z})$ und die Gleichung (2.4) geht in die harmonische Gleichung

$$v''_{xx} + v''_{yy} = 0 \tag{2.5}$$

über. Die allgemeine Lösung von (2.5) ist $v = h(x,y)$ und die allgemeine Lösung der Gleichung (2.3), $(A = -1/2x)$ ist

$$\psi(x,y) = h(x,y)/x \tag{2.6}$$

wobei $h(x,y)$ beliebige harmonische Funktion ist. Der Wert (2.6) lässt sich auch in der komplexen Form

$$\psi(x,y) = h(x,y)/x = (Q+\bar{Q})/(z+\bar{z}), \quad (Q = Q(z) = h(x,y) + ih_1(x,y))$$

schreiben und nach einer kürzeren Rechnung erhält man

$$w(z,\bar{z}) = \frac{Q'(z)(z+\bar{z}) - (Q+\bar{Q})}{(z+\bar{z})^2} \tag{2.7}$$

was die allgemeine Lösung der Vekuaschen Differentialgleichung

$$w'_{\bar{z}} = -(w+\bar{w})/(z+\bar{z}) \tag{2.8}$$

darstellt, wobei $Q(z)$ eine beliebige analytische Funktion ist[1].

Bemerkung 2.1. Auf eine ähnliche Art und Weise kann man auch andere Vekuasche Gleichungen, wessen rechte Seite rein real oder rein imaginär ist, lösen. Andererseits geht die Gleichung (2.8) durch Substitution $w = W/(z+\bar{z})$ in die homogene Gleichung

$$W'_{\bar{z}} = -\bar{W}/(z+\bar{z}) \tag{2.9}$$

über und ihre allgemeine Lösung besitzt die Form

$$W = Q'(z) - (Q+\bar{Q})/(z+\bar{z}) \tag{2.10}$$

[1] Dieses Beispiel hat der Verfasser den 22-VIII-2002 gelöst. Es ist das erste bekannte Beispiel einer Vekuaschen Gleichung, wessen allgemeine Lösung in der endlichen Form (1.4) darstellbar ist.

wobei $Q(z)$ eine beliebige analytische Funktion ist. Aber wir wollen eine breitere Klasse der explizit-lösbaren Vekuaschen Differentialgleichungen bestimmen, wobei die Gleichung (2.9) nur einen speziellen Fall darstellt.

3. Eine Klasse der explizit-lösbaren Vekuascben Differentialgleichungen

Es sei $\mathcal{A}$ die Menge der analytischen Funktionen in einem Gebiet Ω. Auf Grund des allgemeinen Prinzips, dass die allgemeine Lösung einer komplexen Differentialgleichung erster Ordnung eine beliebige analytische Funktion enthält, führen wir die folgenden Definitionen ein.

Definition 3.1. Die Funktion $w = w(z, \bar{z}, Q(z))$ stellt die $\mathcal{F}$-allgemeine Lösung der Vekuaschen Differentialgleichung (1.2) in einem Gebiet Ω dar, wenn sie in diesem Gebiet stetig und differenzierbar nach $\bar{z}$ ist und genügt identisch dieser Gieichung. In der Funktion w kann neben der beliebigen analytischen Funktion $Q(z)$ auch $\bar{Q}$ und $Q'(z)$ erscheinen.

Definition 3.2. Die Vekuasche komplexe Differentialgleichung (1.2) ist $\mathcal{F}$-explizit-lösbar, wenn sie die $\mathcal{F}$-allgemeine Lösung in der endlichen und geschlossenen Form $w = w(z, \bar{z}, Q(z))$ besitzt. Dabei enthält natürlich diese Gleichung keine unendliche Reihen, Rekurrenzen u.ä.

Jetzt führt man eine Klasse der $\mathcal{F}$-explizit-lösbaren Vekuaschen Differentialgleichungen ein.

Es ist bekannt, dass man in vielen Fällen eine partikuläre Lösung der Vekuaschen Gleichung bestimmen kann. Leider kann man im allgemeinen Fall mit Hilfe der partikulären Lösung, keine allgemeine Lösung finden. Darum führen wir hier eine Klasse diejeniger Gleichungen ein, wo die partikuläre Lösung auch die Bestimmung der allgemeinen Lösung ermöglicht.

Man betrachtet die homogene Vekuasche Differentialgleichung

$$w'_{\bar{z}} = A(z, \bar{z})\bar{w} \tag{3.1}$$

wobei der Koeffizient $A(z, \bar{z})$ differenzierbar nach $\bar{z}$ in einem Gebiet Ω ist. Suchen wir auf Grund der Formel (2.10), die allgemeine Lösung der Gleichung (3.1) in der Form

$$w = CQ'(z) + (Q + \bar{Q})u \tag{3.2}$$

wobei C eine heliebige reelle Konstante ist, $u = u(z, \bar{z})$ eine unbekannte komplexe Funktion darstellt und $Q(z) \in \mathcal{A}$. Daraus folgt

$$\bar{w} = C\overline{Q'(z)} + (Q + \bar{Q})\bar{u}, \quad w'_{\bar{z}} = \bar{Q}'_{\bar{z}}u + (Q + \bar{Q})u'_{\bar{z}}$$

und durch Substitution in (3.1) auch

$$\bar{Q}'_{\bar{z}}u + (Q + \bar{Q})u'_{\bar{z}} = AC\overline{Q'(z)} + A(Q + \bar{Q})\bar{u}, \quad (\bar{Q}'_{\bar{z}} = \overline{Q'(z)}).$$

Durch Vergleich der entsprechenden Koeffizienten erhält man

$$u'_{\bar{z}} = A\bar{u} \tag{3.3}$$

$$u = CA. \tag{3.4}$$

Die Bedingung (3.3) zeigt, dass die Funktion $u = u(z,\bar{z})$ eine partikuläre Lösung der Gleichung (3.1) sein muss. Durch Substitution des Wertes $A = u/C$ aus (3.4) in (3.3) ersieht man, dass diese partikuläre Lösung auch der Bedingung

$$u'_{\bar{z}} = \frac{1}{C} u\bar{u}$$

genügt.

Wählen wir wegen Einfachheit $C = -2$ und lösen wir die Differentialgleichung

$$u'_{\bar{z}} = -\frac{1}{2} u\bar{u}. \tag{3.5a}$$

Da die rechte Seite der Gleichung (3.5a) real ist, so muss auch die linke Seite real sein. Das gilt im Falle, wenn die Funktion u folgende Form

$$u = \psi'_x - i\psi'_y$$

besitzt, wobei $\psi = \psi(x,y)$ eine beliebige, reelle, differenzierbare Funktion ist. Dann gilt auch

$$u'_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\psi''_{xx} + \frac{1}{2}\psi''_{yy}$$

und die Gleichung (3.5a) geht in die reelle, elliptische, partielle Differentialgleichung

$$\psi''_{xx} + \psi''_{yy} = -(\psi'^2_x + \psi'^2_y) \tag{3.6}$$

über. Weitere Substitution $\psi = \ln(h(x,y))$ transformiert die Gleichung (3.6) in die harmonische Gleichung $h''_{xx} + h''_{yy} = 0$. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist eine beliebige harmonische Funktion, die sich in der Form $h = h(x,y) = \varphi(z) + \bar{\varphi}(z)$ schreiben lässt, wobei φ eine beliebige analytische Funktion ist. Dann besitzt die allgemeine Lösung der Gleichung (3.6) die Form $\psi = \ln(\varphi(z) + \bar{\varphi}(z))$ und die allgemeine Lösung der Gleichung (3.5a) auch die Form

$$u(z,\bar{z}) = 2\psi'_z = \frac{2\varphi'(z)}{\varphi(z) + \overline{\overline{\varphi(z)}}}, \quad (\varphi + \bar{\varphi} \neq 0). \tag{3.7}$$

Auf Grund der Formel (3.7) suchen wir die allgemeine Lösung der Gleichung (3.5) der Form

$$u = k\varphi'(z)/(\varphi + \bar{\varphi}).$$

Durch Substitution dieses Wertes in (3.5) erhält man $k = -C$ und die allgemeine Lösung dieser Gleichung besitzt die Form

$$u(z,\bar{z}) = -C\varphi'(z)/(\varphi + \bar{\varphi}), \quad (\varphi + \bar{\varphi} \neq 0). \tag{3.8}$$

Dann gilt auch $A(z,\bar{z}) = u/C = -\varphi'(z)/(\varphi + \bar{\varphi})$ und man kann den folgenden Satz formulieren:

Satz 3.1. *Es sei $\varphi(z)$ eine gegebene analytische Funktion. Dann besitzt die allgemeine Lösung der Vekuaschen Differentialgleichung*

$$w'_{\bar{z}} = -\frac{\varphi'(z)}{\varphi + \bar{\varphi}}\bar{w}, \quad (\varphi + \bar{\varphi} \neq 0) \tag{3.9}$$

folgende Form

$$w(z,\bar{z}) = CQ'(z) - C(Q+\bar{Q})\frac{\varphi'(z)}{\varphi+\bar{\varphi}}$$

oder

$$w(z,\bar{z}) = Q_1'(z) - (Q_1+\bar{Q}_1)\frac{\varphi'(z)}{\varphi+\bar{\varphi}}, \quad (Q_1 = CQ) \tag{3.10}$$

wobei $Q_1(z)$ *beliebige analytische Funktion ist.*

Bemerkung 3.1. Vekuasche Gleichung (2.9) stellt einen speziellen Fall der Gleichung (3.9), ($\varphi(z) = z$) dar und ihre allgemeine Lösung (2.10) lässt sich auch mit Hilfe der Formel (3.10) erhalten.

Bemerkung 3.2. Führen wir in die Gleichung (3.9) folgende Substitution $w = \Theta(z)v$ ein, wobei $\Theta(z)$ gegebene, analytische Funktion ist und $v = v(z,\bar{z})$ neue, unbekannte Funktion darstellt. Dann geht diese Gleichung in

$$v'_{\bar{z}} = -\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)+\bar{\varphi}(z)}\frac{\bar{\Theta}(z)}{\Theta(z)}\bar{v} \tag{3.11}$$

über und ihre allgemeine Lösung hat die Form

$$v(z,\bar{z}) = w(z,\bar{z})/\Theta(z). \tag{3.12}$$

Dadurch erhält man eine Klasse der $\mathcal{F}$-explizit-lösbaren Vekuaschen Gleichungen und es gilt der folgende

Satz 3.2. *Jedem geordneten Paar* $\{\varphi(z), \theta(z)\}$ *der analytischen Funktionen entspricht eine* $\mathcal{F}$*-explizit-lösbare Vekuasche Differentialgleichung der Form* (3.11), *wessen allgemeine Lösung die Form* (3.12) *hat. Jede* $\mathcal{F}$*-explizit-lösbare Vekuasche Gleichung*

$$w'_{\bar{z}} = A(z,\bar{z})\bar{w}$$

kann eine unendliche Zahl neuer $\mathcal{F}$*-explizit-lösbaren Vekuaschen Gleichungen mit Hilfe der Substitution* $w = \theta(z)v$ *erzeugen.*

4. Schlussfolgerung

Die Untersuchung der explizit-lösbaren Vekuaschen Differentialgleichungen hat, neben der theoretischen, auch eine praktische Bedeutung, wie auch verschiedene Anwendungsmöglichkeiten. Hier erwähnen wir vier möglichen Richtungen einer weiteren Verarbeitung.

1. In den verschiedenen Anwendungen der Vekuaschen Gleichungen in der Mechanik besitzen der reelle und imaginäre Teil der Lösung eine wichtige physikalische Interpretation. Darum hat die Bestimmung der allgemeinen Lösung in der endlichen Form eine grosse Bedeutung, weil diese Form die Trennung des reellen und imaginären Teiles ermöglicht und weiterhin kann man auch die entsprechende physikalische Interpretation geben.

2. Die explizit-lösbaren Differentialgleichungen sind auch in der Theorie der verallgemeinerten polyanalytischen Funktionen wichtig. M.Čanak und Lj. Protić [3] haben die allgemeine Lösung der verallgemeinerten polyanalytischen Gleichung

$$\mathcal{F}^n_{A,B} w = 0$$

mit

$$\mathcal{F}_{A,B} w = w'_{\bar{z}} + A(z,\bar{z})w + B(z,\bar{z})$$

gefunden, wobei $A(z,\bar{z})$ und $B(z,\bar{z})$ gegebene stetige Funktionen sind. P. Berglez [4] hat die Gleichung

$$D^n w = 0 \tag{4.1}$$

mit

$$D_w = w'_{\bar{z}} + a(z,\bar{z})w + b(z,\bar{z})\bar{w}$$

untersucht. Die $\mathcal{F}$-allgemeine Lösung der Vekuaschen Gleichung ermöglicht eine weitere Verarbeitung der polyanalytischen Gleichung (4.1).

3. Darstellung der Lösung der Vekuaschen Differentialgleichung in der endlichen Form spielt eine wichtige Rolle bei Auflösen der Randwertaufgaben. Das gilt besonders bei den Randbedingungen, wo die Ableitung der unbekannten Funktion erscheint.

4. Die explizit-lösbaren Vekuaschen Differentialgleichungen lassen sich auch in der Theorie der p-analytischen Funktionen, die durch das folgende Gleichungssystem

$$u'_x = v'_y/p, \quad u'_y = -v'_x/p, \quad (p = p(x,y)) \tag{4.2}$$

definiert sind /siehe [5]/, anwenden. Durch Substitution $v = v_1 p$ geht das System (4.2) in

$$u'_x - v'_{1_y} = \frac{p'_y}{p} v_1, \quad u'_y + v'_{1_x} = -\frac{p'_x}{p} v_1 \tag{4.3}$$

über. Wenn man die zweite Gleichung (4.3) mit i multipliziert und mit der ersten addiert, so erhält man folgende Vekuasche Differentialgleichung

$$f'_{\bar{z}} = -\frac{p'_{\bar{z}}}{2p}(f - \bar{f}), \quad (f = u + iv_1).$$

So besitzt z.B. die allgemeine Lösung des Systems

$$u'_x = v'_y/x^2, \quad u'_y = -v'_x/x^2, \quad (p = x^2)$$

die Form

$$u(x,y) = -q'_{2_x}/x, \quad v(x,y) = xq'_{1_x} - q_1 \quad (Q(z) = q_1 + iq_2)$$

wobei $Q(z)$ beliebige analytische Funktion ist.

Alle diese Argumente bieten die Motivierung für die Entwicklung einer vollständigen Theorie der explizit-lösbaren Vekuaschen Differentialgleichungen

Literatur

[1] I. Vekua, *Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus*, VEB Verlag, Berlin, 1956.

[2] S. Fempl, *Jedna interpretacija Cauchy-Riemann-ovih uslova*, Glas Acad. Serbe **31** (1969), 73–78.

[3] M. Čanak, Lj. Protić, *Einige Ergebnisse zur Theorie polyanalytischer Differentialgleichungen*, Mat. Vesnik **52** (2000), 10–25.

[4] P. Berglez, *On the solutions of the iterated Bers–Vekua equation*, in: *Functional-analytic and complex methods*, World Scientific, New Jersey, London, Singapore, 2001, pp. 266–275.

[5] G. Položij, *Teorija i primenenie p-analitičeskih i (p, q)-analitičeskih funkcij̆*, Naukova Dumka, Kiev, 1973.

Katedra za matematiku
Poljoprivredni fakultet
Zemun – Beograd
Serbia

(Received 28 11 2002)
(Revised 31 10 2003)