PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 54 Fasc. 3 – 1997

SUR LA STABILISATION D'UN COUPLAGE ONDES–ADVECTION

F. Ammar Khodja, A. Benabdallah et D. Teniou

Presented by Hugo Beirão da Veiga

I – Preliminaires

On étudie le comportement d'un couplage "ondes–advection". On montre que même si l'équation des ondes n'est pas initialement amortie, ce couplage est dans certains cas asymptotiquement stable. Ce système est par contre exponentiellement stable si l'équation des ondes est amortie et une estimation du taux de décroissance est proposée. Cet exemple ne rentre pas dans le cadre étudié dans [A-B-T] du fait du caractère non autoadjoint de l'opérateur d'advection (noter aussi que cet opérateur n'est pas de résolvante compacte en dimension supérieure à un). Le comportement asymptotique est cependant similaire à celui d'un couplage "ondes–chaleur" par un opérateur borné (voir [A-B]).

Soit Ω un ouvert borné simplement connexe de $\mathbb{R}^n$ de frontière lipschitzienne, C^2 par morceaux. Soit d un champ de vecteurs défini dans un voisinage de $\overline{\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et de classe C^1. On note Γ la frontière de Ω, ν la normale unitaire extérieure à Ω. On définit

$$\begin{cases} \Gamma_+ = \Big\{x \in \Gamma;\ d(x).\nu(x) > 0\Big\} \\ \Gamma_- = \Big\{x \in \Gamma;\ d(x).\nu(x) < 0\Big\} \\ \Gamma_0 = \Big\{x \in \Gamma;\ d(x).\nu(x) = 0\Big\} . \end{cases}$$

Dans ce qui suit on fait l'hypothèse (H) suivante:

i) $\operatorname{div} d \geq 0$;

Received: June 22, 1996.

ii) $\exists T > 0$ tel que $\forall z \in \overline{\Omega}$, $\exists x_0 \in \Gamma_+$ et $s \in (0,T)$ tels que la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = d(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

vérifie $x(s) = z$.

Remarque. L'ypothèse (H) est trivialement vérifiée si d est un champ constant.

On considère le système

$$(1) \quad \begin{cases} u_{tt} = \Delta u - a\, u_t + b\, w & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ w_t = d.\nabla w - b\, u_t & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma_+ \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad w(x,0) = w_0(x) & \text{dans } \Omega\ , \end{cases}$$

où $a \in L^\infty(\Omega)$ avec $a \geq 0$ p.p. dans Ω, $b \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Dans toute la suite on posera

$$X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

que l'on munit du produit scalaire

$$\left\langle \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \end{bmatrix} \right\rangle = \int_\Omega (\nabla u.\nabla f + v.g + w.h)\, dx\ .$$

$\|\cdot\|$ désigne la norme induite sur X et $|\cdot|$ la norme dans $L^2(\Omega)$. On définit sur X l'opérateur

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ \Delta & -a & b \\ 0 & -b & d.\nabla \end{pmatrix}$$

de domaine

$$D(A) = \Big(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\Big) \times H_0^1(\Omega) \times W(\Omega)$$

où

$$W(\Omega) = \Big\{ w \in L^2(\Omega);\ d.\nabla w \in L^2(\Omega) \text{ et } w = 0 \text{ sur } \Gamma_+ \Big\}\ .$$

D'aprés [Ba], si $w \in L^2(\Omega)$ et $d.\nabla w \in L^2(\Omega)$ alors la trace $w|_{\Gamma_+}$ est bien définie dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\Gamma_+)$ et ainsi $W(\Omega)$ est bien défini. Il n'est pas difficile de voir que $(-A, D(A))$ est maximal monotone. Il définit donc un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, de contractions sur X. D'aprés le théorème de Hille–Yosida, pour tout $(u_0, v_0, w_0) \in D(A)$, le système

$$\left\{\begin{aligned} &Y'(t) = A\,Y(t), \\ &Y(0) = Y_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

admet une unique solution $Y \in C([0, +\infty[, D(A)) \cap C^1([0, +\infty[, X)$. De plus pour tout $(u_0, v_0, w_0) \in X$ (2) admet une unique solution faible Y dans $C([0, +\infty[, X)$ (voir [P]). On a le résultat de régularité suivant:

Proposition 1. *Pour tout $Y_0 \in X$, la solution $Y = S(t)\,Y_0$ du sytème (2) est telle que*

$$\sqrt{-d.\nu}\, w \in L^2(\mathbb{R}^+ \times \Gamma_-)$$

avec

$$|\sqrt{-d.\nu}\, w|^2_{L^2(\mathbb{R}^+, \Gamma_-)} \leq \|Y_0\|^2 \ . \tag{3}$$

Preuve: Si $Y_0 \in D(A)$, alors

$$\frac{d}{dt}\|Y(t)\|^2 = 2\Big[-|\sqrt{a}\,v|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_-} |w|^2\,(d\nu)\,d\gamma - \frac{1}{2}|\sqrt{\operatorname{div} d}\,w|^2\Big]$$

ainsi

$$\|Y_0\|^2 - \|Y(t)\|^2 = 2\Big[\int_0^t |\sqrt{a}\,v|^2\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_-} |w|^2\,(-d\nu)\,d\gamma\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t |\sqrt{\operatorname{div} d}\,w|^2 ds\Big],$$

d'où (3) pour $Y_0 \in D(A)$. Par densité, on a le résultat pour $Y_0 \in X$. ∎

II – Stabilité

Le système (2), avec A générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions, est dit exponentiellement stable s'il existe deux constantes $\omega > 0$ et $M \geq 1$ telles que

$$\|S(t)\| \leq M\,e^{-\omega t} \qquad \forall\, t \geq 0 \ . \tag{4}$$

Remarque. La propriété (4) équivaut à l'existence d'un opérateur P unique $\in L(X)$ positif et auto-adjoint tel que

$$\mathrm{Re}\langle PAY, Y\rangle = -\|Y\|^2 \quad \forall Y \in D(A) \tag{5}$$

(voir [P-Z] ou [Z]).

L'hypothèse (H) fait que l'opérateur $(d.\nabla, W(\Omega))$ est générateur d'un semi-groupe exponentiellement stable. On va expliciter l'opérateur P dans ce cas particulier.

Proposition 2. *La solution de l'équation de Lyapunov (5) associée à l'opérateur $(d.\nabla, W(\Omega))$ est l'unique opérateur $P \in L(L^2(\Omega))$, autoadjoint, positif, défini par*

$$(Pw)(x) = k(x)\, w(x)\,, \qquad x \in \Omega, \quad w \in L^2(\Omega)\ ,$$

où $k \in W^*(\Omega)$,

$$W^*(\Omega) = \Big\{k \in L^2(\Omega);\ d.\nabla k \in L^2(\Omega),\ k|_{\Gamma_-} = 0\Big\}$$

est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \mathrm{div}(kd) = 1 & \textit{dans } \Omega, \\ k = 0 & \textit{sur } \Gamma_-\ . \end{cases} \tag{6}$$

De plus k est positif sur Ω.

Preuve: On remarque d'abord que le domaine de l'opérateur adjoint de $(d.\nabla w, W(\Omega))$ est $W^*(\Omega)$. Les hypothèses faites sur d font que 0 appartient à la résolvante de $(d.\nabla w, W(\Omega))$ donc à la résolvante de son adjoint, d'où l'existence et l'unicité de $k \in W^*(\Omega)$ solution de (6). La positivité de k est une conséquence directe du fait que sur chaque trajectoire $(x(t))$ issue de Γ_- la solution k a comme expression

$$k(x(t)) = e^{-\int_0^t (\mathrm{div}\, d(x(\tau)))\, d\tau} \int_0^t e^{\int_0^s (\mathrm{div}\, d(x(\tau)))\, d\tau} ds\ .$$

Comme ces trajectoires couvrent $\overline{\Omega}$, k est positif sur Ω.

D'autre part

$$2\langle Pd.\nabla w, w\rangle_{L^2(\Omega)} = 2\int_\Omega k(d.\nabla w)\, w\, dx = -\int_\Omega \mathrm{div}(kd)\, w^2\, dx = -|w|^2\ .$$

D'où la proposition. ∎

Remarque. Dans le cas unidimensionnel, l'équation (6) donne

$$k(x)\,d(x) = x + c\ .$$

Comme $d'(x) \geq 0$, deux cas se présentent:

i) $d(0)\,d(1) > 0$. Alors:

– **si** $d(0) > 0$. On a $\Gamma_- = \{0\}$ et donc $k(0) = 0$. Ce qui donne

$$k(x) = \frac{x}{d(x)}\ ;$$

– **si** $d(0) < 0$. Dans ce cas $d(1) < 0$, donc $\Gamma_- = \{1\}$ et $k(1) = 0$. Ce qui implique

$$k(x) = \frac{x-1}{d(x)}\ .$$

ii) $d(0)\,d(1) < 0$. Cette condition avec l'hypothèse que d' est non négative impose que $d(0) < 0$ et $d(1) > 0$. Ceci entraine que Γ_- est vide, ce qui est contraire à l'hypothèse (H). On remarquera que dans ce cas, la norme $L^2(\Omega)$ de la solution de l'équation d'avection

$$\begin{cases} w_t = d.\nabla w \\ w \in W \end{cases}$$

est conservée.

Dans la suite, P désignera l'opérateur défini par la Proposition 2.

Le résultat principal est le suivant:

Théorème 3.

1) *S'il existe $a_0 > 0$ tel que $a \geq a_0$, il existe $\omega > 0$ et $M \geq 1$ tels que*

$$\|S(t)\| \leq M e^{-\omega t} \qquad \forall\, t \geq 0\ .$$

2) *Si* $\operatorname{div} d \geq 0$ *p.p. sur* Ω *et si* $\operatorname{supp}(a) \cup \operatorname{supp}(b)$ *est d'intérieur non vide, alors* $(S(t))_{t\geq 0}$ *est asymptotiquement stable: pour tout $Y_0 \in X$,*

$$\lim_{t\to+\infty} \|S(t)\,Y_0\| = 0\ .$$

Démonstration:

1) La démonstration de 1) est basée sur le lemme suivant:

Lemme 4. *Pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ suffisament petits, la fonction*

$$\rho_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(t) = \frac{1}{2}\|Y(t)\|^2 + \varepsilon_1 \int_\Omega Pw\, w\, dx + \varepsilon_2 \int_\Omega u\, v\, dx$$

(où Y est solution forte du système (2)) est telle que

$$\rho_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(t) \le \rho_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(0)\, e^{-C(\varepsilon_1,\varepsilon_2)t} \qquad \forall\, t \ge 0 \ ,$$

où $C(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est un nombre positif indépendant de Y.

Preuve:

$$\frac{d}{dt}\rho_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(t) = (Y', Y) + 2\,\varepsilon_1 \int_\Omega Pw'\, v\, dx + \varepsilon_2 |v|^2 + \varepsilon_2 \int_\Omega u\, v'\, dx$$

on a

$$(Y', Y) = -\int_\Omega a\, v^2\, dx - \int_\Omega (\operatorname{div} d)\, w^2\, dx + \int_{\Gamma_-} w^2 (d.\nu)\, d\Gamma \ ,$$

$$2 \int Pw'\, w\, dx = -|w|^2 - \int_\Omega P(bv)\, w\, dx$$

et

$$\int u\, v'\, dx = -|\nabla u|^2 - \int_\Omega a\, u\, v\, dx + \int_\Omega b\, ubw\, dx \ ,$$

comme

$$\Big|\int_\Omega P(bv)\, w\, dx\Big| \le \frac{1}{2}\|P\|^2\, |b|_\infty^2\, |v|^2 + \frac{1}{2}|w|^2 \ ,$$

$$\Big|\int_\Omega a\, u\, v\, dx\Big| \le \alpha |a|_\infty^2\, c_0^2 |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\alpha}|v|^2 \ ,$$

$$\Big|\int_\Omega b\, u\, w\, v\, dx\Big| \le \alpha |b|_\infty^2\, c_0^2 |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\alpha}|w|^2 \ ,$$

où c_0 est la constante de Poincaré, $|\cdot|_\infty$ désigne la norme dans $L^\infty(\Omega)$ et α est un nombre positif arbitraire. Comme

$$\operatorname{div} d \ge 0, \quad d\nu \le 0 \ \text{ sur } \Gamma_- \quad \text{ et } \quad a \ge a_0 > 0$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(t) &\le \varphi_2 \Big[\alpha\, c_0^2 \Big(|a|_\infty^2 + |b|_\infty^2\Big) - 1\Big]\, |\nabla u|^2 \\ &\quad + \Big[\frac{\varepsilon_1}{2}\|P\|^2\, |b|_\infty^2 + \varepsilon_2 \Big(1 + \frac{1}{4\alpha}\Big) - a_0\Big] |v|^2 + \Big[\frac{\varepsilon_2}{4\alpha} - \frac{1}{2}\,\varepsilon_1\Big] |w|^2 \ .\end{aligned}$$

On choisit alors α assez petit pour que le coefficient de $|\nabla u|^2$ soit négatif. Puis on choisit ε_2 pour que celui de $|v|^2$ soit négatif et on termine par le choix de ε_1 tel que le coefficient de $|w|^2$ soit encore négatif. On obtient alors

$$\frac{d}{dt}\rho_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(t) \leq -D(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\,\|Y(t)\|^2 \ . \tag{7}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\rho_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(t)&\|Y(t)\|^2\Big(\frac{1}{2}+\max\Big(2\,\varepsilon_1\|P\|^2,\ \frac{\varepsilon_2}{2}\,c_0^2,\ \frac{\varepsilon_2}{2}\Big)\Big)\\ &\leq \overline{D}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\,\|Y(t)\|^2 \ .\end{aligned} \tag{8}$$

Il s'ensuit

$$\frac{d}{dt}\rho_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(t) \leq -\frac{D(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{\overline{D}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}\,\rho_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(t) = -C(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\,\rho_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(t) \ . \tag{9}$$

D'où la décroissance exponentielle de $\rho_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(t)$. Comme, de plus

$$\begin{aligned}\rho_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(t) \geq \|Y(t)\|^2&\Big(\frac{1}{2}-\max\Big(2\,\varepsilon_1\|P\|^2,\ \frac{\varepsilon_2}{2}\,c_0^2,\ \frac{\varepsilon_2}{2}\Big)\Big)\\ &\underline{D}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\,\|Y(t)\|^2 \ ,\end{aligned} \tag{10}$$

où $\underline{D}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ est une constante positive pour ε_1 et ε_2 suffisamente petits, la décroissance exponentielle de $\rho_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(t)$ et les inégalités (9)–(10) donnent la première partie du théorème. ∎

2) Pour montrer la stabilité asymptotique de $(S(t))$, on procède comme dans Dafermos [D]. On a d'abord

Lemme 5. *L'orbite de tout $Y_0 \in D(A)$,*

$$\gamma(Y_0) = \Big\{S(t)\,Y_0,\ t \geq 0\Big\}$$

est faiblement relativement compacte dans X. De plus, la projection de $\gamma(Y_0)$ sur $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times\{0\}$ est relativement compacte.

Preuve: Comme $Y_0 \in D(A)$, $\gamma(Y_0) \subset D(A)$. Il suffit donc de montrer que $\gamma(Y_0)$ est bornée dans $D(A)$ pour la norme du graphe. En dérivant par rapport à t les deux premières équations de (1), on obtient

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = b\,w_t - a\,v_t \ , \\ w_{tt} - d.\nabla w_t = -b\,v_t \ . \end{cases}$$

Après multiplication de la première équation par v_t et de la seconde par w_t, et après intégration par parties on obtient

$$\frac{d}{dt}\Big(|v_t|^2+|\nabla v|^2+|w_t|^2\Big)=\int_{\Gamma_-}|w_t|^2\,d.\nu\,d\Gamma-|\sqrt{\operatorname{div}d}\,dw_t|^2-|\sqrt{a}\,v_t|^2\le 0\ .$$

On en déduit que $(v(t,\cdot))_{t\ge 0}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, il s'ensuit que $(\Delta u(t,\cdot))_{t\ge 0}$ est borné dans $L^2(\Omega)$. De la même manière, comme $(w_t(t,\cdot))_{t\ge 0}$ est borné dans $L^2(\Omega)$, on en déduit que $(d.\nabla w(t,\cdot))_{t\ge 0}$ est borné dans $L^2(\Omega)$. Donc $\gamma(Y_0)$ est bornée dans $D(A)$ muni de la norme du graphe. La projection de $\gamma(Y_0)$ sur $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times\{0\}$ étant continue et bornée sur $(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\times H_0^1(\Omega)\times\{0\}$, on a le résultat. ∎

Par ailleurs, $\Psi(Y(t))=\|Y(t)\|^2$ est une fonction de Lyapunov semi-continue inférieurement. Le théorème du à Ball [B], cité dans [D], implique que pour tout Y_0 et tout $\overline{Y}$ appartenant à $\omega(Y_0)$, l'ensemble ω — *limite* de Y_0, on a:

$$\Psi(S(t)\,\overline{Y})=\Psi(\overline{Y})\ .$$

Donc:

$$\frac{d}{dt}\Psi(S(t)\,\overline{Y})=-\frac{1}{2}|\sqrt{\operatorname{div}d}\,w|^2+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_-}|w|^2\,d.\nu-|\sqrt{a}\,v|^2=0$$

et

$$w(t,\cdot)=0\quad\text{dans}\ \ \Omega=\operatorname{supp}(\operatorname{div}d),\ \ \forall\,t\ge 0\ ,$$

$$v(t,\cdot)=0\quad\text{dans}\ \ \operatorname{supp}(a),\ \ \forall\,t\ge 0\ ,$$

de la deuxième équation de (1), on déduit que

$$v(t,\cdot)=0\quad\text{dans}\ \ \operatorname{supp}(b),\ \ \forall\,t\ge 0\ .$$

Comme $O=\operatorname{supp}(a)\cup\operatorname{supp}(b)$ est d'intérieur non vide, on a

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0 & \text{dans } \Omega,\\ u_t(t,x)=0 & \forall\,x\in O,\\ u=0 & \text{sur } \mathbb{R}^+\times\Gamma\ ,\end{cases}$$

a pour unique solution $u\equiv 0$ dans Ω. Donc

$$\omega(Y_0)=\{0\}\qquad \forall\,Y_0\in D(A)$$

ainsi quand t tend vers l'infini, on a

$$\begin{cases} u(\cdot,t)\to 0 & \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ fort},\\ v(\cdot,t)\to 0 & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort},\\ w(\cdot,t)\rightharpoonup 0 & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible},\end{cases}$$

mais

$$w_t - d.\nabla w = -b\, u_t$$

et $(d.\nabla, W(\Omega))$ est exponentiellement stable. On déduit donc, d'après Pazy [P], théorème 4.4, p.119, que

$$w(\cdot, t) \to 0 \quad \text{dans} \;\; L^2(\Omega) \text{ fort}$$

et ceci implique la stabilité asymptotique. ∎

On définit

$$\overline{\omega}(A) = \inf\Big\{\omega \in \mathbb{R};\;\; \exists\, M \geq 1,\;\; \|S(t)\| \leq M e^{\omega t}\; \forall\, t \geq 0\Big\}\ .$$

De la démonstration du théorème précédent, on déduit immédiatement l'estimation:

Corollaire 6. *S'il existe $a_0 > 0$ tel que $a \geq a_0$ p.p. dans Ω, alors*

$$\overline{\omega}(A) \leq -C(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

où $C(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est la constante définie dans le Lemme 4.

BIBLIOGRAPHIE

[A-B] Ammar Khodja, F. et Benabdallah, A.F. – Stabilisation de l'équation des ondes par un contrôleur dynamique, *C. R. Acad. Sci.,* 321 (1995), 195–198.

[A-B-T-] Ammar Khodja, F., Benabdallah, A.F. et Teniou, D. – *Stability of coupled systems*, Prépublications de l'equipe de mathématiques de Besançon, 96/01.

[B] Ball, J.M. – On the asymptotic behaviour of generalized processes, with applications to nonlinear evolution equations, *J. Diff. Eqs.,* 27(2) (1978).

[Ba] Bardos, C. – Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.,* 3 (1970), 185–233.

[D] Dafermos, C. – *Asymptotic behaviour of solutions of evolution equations*, in "Nonlinear Evolution Equations" (M.G. Grandall, Ed.), 103–123, Academic Press, New York, 1978.

[P] Pazy, A. – *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 1983.

[P-Z] Pritchard, A. et Zabczyk, J. – Stability and stabilizability of infinite dimensional systems, *S.I.A.M. Review,* 23 (1981), 25–61.

[Z] Zabczyk, J. – *Mathematical Control Theory: An Introduction*, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhauser, 1992.

Farid Ammar Khodja,
Laboratoire de Calcul Scientifique, Groupe Matériaux Intelligents, URA C.N.R.S. 741,
16, route de Gray, 25030 Besançon Cedex – FRANCE

and

Assia Benabdallah,
Laboratoire de Calcul Scientifique, Groupe Matériaux Intelligents, URA C.N.R.S. 741,
16, route de Gray, 25030 Besançon Cedex – FRANCE

and

Djamel Teniou,
Institut de Mathématiques, U.S.T.H.B.,
B.P. 32, 16110 Alger – ALGÉRIE