PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 56 Fasc. 2 – 1999

FORMES LINEAIRES D'APPROXIMATION ET IRRATIONALITE DE VALEURS DE q-FONCTIONS

D. Duverney

Abstract: Let q be a rational integer, with $|q| \geq 2$. Let f be a complex function, analytic in $|x| < R$, and satisfying a Poincaré-type equation of the form

$$f(qx) = P(x)\, f(x) + Q(x)\ ,$$

where P and Q are rational fractions. We prove, under some conditions on f, that the set:

$$\mathbb{E}(d) = \Big\{\alpha \in \mathbb{Q} \,/\; R|q|^{-1} \leq |\alpha| < R\,;\; [\mathbb{Q}[f(\alpha)] : \mathbb{Q}] \leq d\Big\}$$

is finite, and give an upper bound (depending on d and f) for the number of its elements.

1 – Introduction

Dans [8], P. Bundschuh et M. Waldschmidt ont démontré des résultats d'irrationalité au sujet de fonctions *entières* vérifiant des équations de Poincaré du type suivant:

$$f(qx) = P(x)\, f(x) + Q(x)\ , \tag{1}$$

où P et Q sont des polynômes.

Le but de ce travail est d'étudier les propriétés arithmétiques de fonctions non nécessairement entières vérifiant (1), dans le cas où P et Q sont des fractions rationnelles. Alors que P. Bundschuh et M. Waldschmidt travaillaient au voisinage de l'infini en utilisant la méthode de Gel'fond–Schneider, nous travaillerons au voisinage de l'origine en construisant une forme linéaire d'approximation des nombres 1, $f(\alpha)$, $f(\alpha)^2$, ..., $f(\alpha)^k$. Nous obtiendrons ainsi une fonction auxiliaire avec "beaucoup de zéros"; le lemme de zéros que nous utiliserons sera particulièrement simple: une fonction analytique non nulle ne peut admettre que des zéros isolés.

Received: September 24, 1997; *Revised*: July 5, 1997.

Pour simplifier l'exposé et les énoncés, dans toute la suite de l'article, q désigne un *entier rationnel*, avec $|q| \geq 2$.

Les résultats obtenus pour $q \in \mathbb{Z}$ se généralisent sans difficulté au cas où q est algébrique, avec $|q| > 1$.

Nous allons considérer des fonctions f analytiques pour $|x| < R$, avec $R \in]0, 1[$ fixé, et vérifiant en outre les propriétés suivantes:

Propriété 1. Il existe une fonction $g(x, y)$ analytique pour $|x| < R$ et $|y| < 1$, telle que:

$$f(x) = g(x, 1/q)\,, \qquad |x| < R\,, \tag{3}$$

$$g(x, y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} g_{ij}\, x^i\, y^j\,, \qquad g_{ij} \in \mathbb{Z}\,. \tag{4}$$

Propriété 2. f n'est pas algébrique.

Propriété 3. Il existe deux réels $\mu \geq 0$ et $\nu \geq 0$ tels que, si $\alpha \in \mathbb{Q}$ $(|\alpha| < R)$ et $f(\alpha) \in \mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ est un corps de nombres algébriques de degré d, alors pour tout entier naturel n, $f(\alpha\, q^{-n}) \in \mathbb{K}$ et:

$$\mathrm{den}[f(\alpha\, q^{-n})] \leq |q|^{\mu n^2 + 0(n)}\,, \tag{5}$$

$$\overline{|f(\alpha\, q^{-n})|} \leq |q|^{\nu n^2 + 0(n)}\,. \tag{6}$$

On notera que, si f est analytique pour $|x| < R$ et vérifie (1) avec $P, Q \in \mathbb{Q}(x)$, alors f vérifie la propriété 3.

Nous démontrerons le résultat suivant:

Théorème 1. *Soit une fonction f analytique pour $|x| < R$, avec $R \in]0, 1[$ fixé, et vérifiant les propriétés 1, 2 et 3.*

Soit d un entier naturel non nul, et soit:

$$\mathbb{E}(d) = \left\{ \alpha \in \mathbb{Q}^* \;/\; R|q^{-1}| \leq |\alpha| < R;\; f(\alpha) \text{ algébrique de degré } \leq d \right\}.$$

Alors $\mathbb{E}(d)$ est fini, et:

$$\mathrm{card}(\mathbb{E}(d)) \leq 128(2\mu + 2\nu + 1)^3\, d^3\,. \tag{7}$$

Cette majoration est moins bonne que celle obtenue par P. Bundschuh et M. Waldschmidt dans [8] pour les fonctions entières vérifiant (1). En effet, celle-ci était un $0(d^2)$. Le facteur 128 $(2\mu+2\nu+1)^3$ dans (7) pourrait d'ailleurs être diminué sans effort, mais au prix de complications techniques sans grand intérêt.

Le plan de l'article est le suivant: dans le paragraphe 2, nous donnerons des exemples classiques de fonctions vérifiant les propriétés 1, 2 et 3. Dans le paragraphe 3, nous rappellerons quelques lemmes utiles. Dans le paragraphe 4, nous démontrerons le théorème 1. Enfin, dans le paragraphe 5, nous proposerons une variante "à la Siegel-Shidlovskii" de la méthode employée pour démontrer le théorème 1; cette variante s'applique seulement dans certains cas, et donne de moins bons résultats: la majoration de $\mathbb{E}(d)$ est un $0(d^4)$. Il m'a semblé utile de la signaler tout de même, car une combinaison de différentes attaques pourra peut-être permettre, un jour, d'obtenir des résultats plus intéressants que ceux présentés ici.

2 – Exemples de fonctions vérifiant les propriétés 1, 2, 3

a) Fonction q-exponentielle et q-binôme de Cauchy

Soient a et b des entiers rationnels vérifiant:

$$\forall\, n\in\mathbb{Z}\,,\qquad a\neq -b\,q^n\;. \tag{8}$$

Considérons, pour $|x|<|a|^{-1}$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(aq+b)\,(aq^2+b)\cdots(aq^n+b)}{(q-1)\,(q^2-1)\cdots(q^n-1)}\;x^n\;. \tag{9}$$

Il est facile de voir que f vérifie l'équation fonctionnelle

$$f(qx)=\frac{1+bx}{1-aqx}\;f(x)\;. \tag{10}$$

On en déduit immédiatement que f admet le développement en produit infini:

$$f(x)=\frac{\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}(1+bx\,q^{-n})}{\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty}(1-ax\,q^{-n})} \tag{11}$$

(formule du q-binôme de Cauchy, [14], page 7).

Il résulte de (8) et (11) que f se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$, admettant une infinité de zéros simples ou une infinité de pôles simples. Elle n'est donc pas algébrique sur $\mathbb{C}(x)$, et la propriété 2 est vérifiée.

La propriété 1 est immédiate, avec:

$$g(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+by)\,(a+by^2)\cdots(a+by^n)}{(1-y)\,(1-y^2)\cdots(1-y^n)}\; x^n \; . \tag{12}$$

La propriété 3 résulte de (10), et on a:

$$\mu = \frac{1}{2}\,; \qquad \nu = 0 \; .$$

Le cas où $a = 0$ et $b = 1$ est celui de la *fonction q-exponentielle*:

$$\exp_q x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(q-1)\,(q^2-1)\cdots(q^n-1)} = \prod_{n=1}^{+\infty}(1 + x\,q^{-n}) \; . \tag{14}$$

Les propriétés arithmétiques de cette fonction ont été étudiées dans [6], [2], [9]. On sait en particulier que $\exp_q(\alpha)$ est irrationnel lorsque $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, $\alpha \neq -q^n$ ($n \in \mathbb{N}-\{0\}$). On sait également que les nombres $\exp_q(\alpha)$ et $\exp_q(\beta)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ lorsque $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, $\beta \in \mathbb{Q}^*$, $\alpha \neq \beta\, q^n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Par conséquent, si nous revenons à la fonction f définie en (9), il résulte de (11) que $f(\alpha) = \exp_q(b\,\alpha)/\exp_q(-a\,\alpha)$ est irrationnel pour tout rationnel non nul α. Enfin, d'après un résultat récent de Y. Nesterenko, on sait que $\exp_q(-1) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{-n})$ est transcendant [16]. On peut également montrer, de manière élémentaire, que ce nombre n'est pas algébrique de degré inférieur ou égal à 2 [11]. Aucun résultat de ce type n'est connu, pour l'instant, concernant $\exp_q(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ quelconque.

b) Fonctions vérifiant $\mu = 0$

Pour $(a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ et $|x| < |a|^{-1}$, considérons:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(aq+b)\,(aq^2+b)\cdots(aq^n+b)}{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}\; x^n \; . \tag{15}$$

Le fait que f soit transcendante sur $\mathbb{C}(x)$ résulte immédiatement du théorème d'Eisenstein ([17], p. 139).

Par ailleurs, il est clair que $f(x) = g(x, \frac{1}{q})$ avec

$$g(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a+by)\,(a+by^2)\cdots(a+by^n)\,x^n\ , \tag{16}$$

de sorte que la propriété 1 est vérifiée.

Enfin, la fonction f satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(1-aqx)\,f(qx) = 1 + bx\,f(x)\ . \tag{17}$$

Il en résulte facilement que f vérifie la propriété 3, avec

$$\mu = 0\,; \qquad \nu = \frac{1}{2}\ . \tag{18}$$

Le cas particulier $a = 0,\ b = 1$ est celui de la fonction

$$\tau_q(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{q^{\frac{n(n+1)}{2}}} \tag{19}$$

étudiée par L. Tschakaloff [19]. On sait que $\tau_q(\alpha)$ est irrationnel lorsque $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ ([19], [7], [2]). Récemment, J.P. Bézivin a démontré que $\tau_q(\alpha)$ n'est pas algébrique de degré inférieur ou égal à deux [4]. Encore plus récemment, il a été démontré que $\tau_q(1)$ est transcendant ([1], [3]).

Pour ce qui concerne la fonction générale f définie en (15), on sait que $f(\alpha) \notin \mathbb{Q}$ pour $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ ([15], [12]), mais pas davantage.

c) A partir de la fonction q-logarithme

Soit P un polynôme non nul à coefficients entiers rationnels. Considérons pour $|x| < |q|$ la fonction:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P(n)}{q^n - 1}\,x^n\ . \tag{20}$$

Il est facile de voir que $f(x) = g(x, 1/q)$, avec:

$$g(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(n)\,\frac{x^n\,y^n}{1-y^n}\ , \tag{21}$$

de telle sorte que f vérifie la propriété 1.

Si nous notons $F(x)$ la fonction rationnelle:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(n)\, x^n \ , \tag{22}$$

qui peut s'écrire

$$F(x) = \frac{Q(x)}{(1-x)^{\deg P + 1}}, \qquad \text{avec} \quad \deg Q \leq \deg P \quad \text{et} \quad Q(1) \neq 0 \ ,$$

nous observons que:

$$f(qx) = f(x) + F(x) \ , \tag{23}$$

de telle sorte que $f(x)$ se développe en série de fractions rationnelles:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} F(x\, q^{-n}) \ . \tag{24}$$

Il en résulte que f se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$, admettant une infinité de pôles. Elle n'est donc pas algébrique sur $\mathbb{C}(x)$.

Enfin, de (23) on déduit que la propriété 3 est vérifiée avec:

$$\mu = \left(\frac{3}{\pi^2}\right)(\deg P + 1)\,; \qquad \nu = 0 \ . \tag{25}$$

(On a utilisé le fait que PPCM $((q-1),\,(q^2-1),\,...,\,(q^n-1)) = |q|^{\frac{3}{\pi^2}n^2 + 0(n)}$; voir par exemple [3]).

Le cas particulier le plus simple est celui où $P(x) = 1$; il s'agit de la *fonction q-logarithme* L_q:

$$L_q(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{q^n - 1} \ . \tag{26}$$

Dans le cas général (20), la fonction f s'exprime comme combinaison linéaire de la fonction L_q et de ses dérivées.

A l'heure actuelle, on ne connait presque rien sur les propriétés arithmétiques de ces fonctions. On sait seulement que $L_q(\alpha)$ est irrationnel pour $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ ([5], [9]), et que les nombres $L'_q(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^n - 1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{q^n - 1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5}{q^n - 1}$ sont transcendants [16]. On trouvera une démonstration élémentaire de l'irrationalité de $L'_q(1)$ dans [10].

3 – Trois lemmes utiles

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons ici trois lemmes classiques de la théorie des nombres transcendants. Les deux premiers se trouvent dans [20], chapitre 1. Le troisième est présenté sous forme d'exercice dans [21] (exercice 1.5.a.2, p. 39).

Lemme 1. *Soit γ un nombre algébrique non nul de degré d. Alors $|\gamma| \geq \overline{|\gamma|}^{1-d}.(den\,\gamma)^{-d}$.*

Lemme 2 (Siegel)**.** *Soient a_{ij} $(1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq M)$ des entiers rationnels, avec $N > M$. Soit A un entier naturel non nul vérifiant $\max_{ij} |a_{ij}| \leq A$. Alors il existe des entiers rationnels $x_1, x_2, ..., x_N$ vérifiant:*

$$0 < \max_{1 \leq i \leq N} |x_i| \leq (NA)^{\frac{M}{N-M}} , \tag{27}$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij}\, x_i = 0 \qquad (1 \leq j \leq M) . \tag{28}$$

Lemme 3. *Soit f une fonction holomorphe dans $|x| < R$. On suppose que $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n) = 0$, $|x_i| < \rho < R$. Alors, pour tout z vérifiant $|z| \leq \rho < R$:*

$$|f(z)| \;\leq\; \max_{|x|=\rho} |f(x)| \,\max_{|x|=\rho} \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{z - x_i}{x - x_i} \right| .$$

Le lemme 3 résulte immédiatement de l'application du principe du maximum à la fonction $g(z) = f(z) \prod_{i=1}^{n} (z - x_i)^{-1}$ dans le disque $|z| \leq \rho$.

4 – Démonstration du théorème 1

Dans ce paragraphe, nous considérons une fonction f vérifiant les propriétés 1, 2 et 3. Nous notons k un entier naturel fixé, dont nous préciserons la valeur plus loin. De même, ε désigne un (petit) réel strictement positif fixé, que nous choisirons ultérieurement. Enfin, soit n un entier naturel que nous ferons tendre vers l'infini.

a) Construction d'une fonction auxiliaire à deux variables

Soit g la fonction analytique de deux variables définie à la propriété 1. Il est clair que, $\forall\, \ell \in \mathbb{N}$:

$$[g(x,y)]^\ell = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} g_{ij}^{(\ell)}\, x^i\, y^j \ , \tag{29}$$

avec $g_{ij}^{(\ell)} \in \mathbb{Z}$.

En utilisant les inégalités de Cauchy avec $|x| = \frac{R}{2}$ et $|y| = |q|^{-\frac{\varepsilon}{k^3}}$, nous voyons qu'il existe une constante $C_1 = C_1(k, \varepsilon, R, q) > 0$ telle que:

$$|g_{ij}^{(\ell)}| \leq C_1 \left(\frac{2}{R}\right)^i |q|^{\frac{\varepsilon j}{k^3}} \quad \text{si} \ \ 0 \leq \ell \leq 2k^2 \ . \tag{30}$$

Nous cherchons maintenant des polynômes $P_{n,\ell}(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$, avec:

$$\deg_x P_{n,\ell} \leq k^2\, n \ , \tag{31}$$

$$\deg_y P_{n,\ell} \leq k^2\, n^2 \ , \tag{32}$$

et tels que la fonction:

$$G_n(x,y) = \sum_{\ell=0}^{2k^2} P_{n,\ell}(x,y)\, (g(x,y))^\ell = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} G_{ijn}\, x^i\, y^j \tag{33}$$

vérifie:

$$G_{ijn} = 0 \ \ \text{pour tout } (i,j) \text{ tel que:} \quad i < k^3\, n \ \ \text{et} \ \ j < k^3\, n^2 \ . \tag{34}$$

Ceci revient à résoudre un système de $M = k^3\, n \cdot k^3\, n^2 = k^6\, n^3$ équations, à $N = (2k^2+1)\,(k^2 n+1)\,(k^2 n^2+1)$ inconnues (les coefficients $\theta_{ijn\ell}$ des $P_{n,\ell}$), les coefficients de ce système étant les $g_{ij}^{(\ell)}$ pour $0 \leq i < k^3 n$, $0 \leq j < k^3 n^2$, $0 \leq \ell \leq 2k^2$.

Il résulte du lemme de Siegel et de (30) que l'on peut trouver des $P_{n,\ell}(x,y)$ *non tous nuls* vérifiant (31), (32), (33) et (34), tels que leur hauteur $H(P_{n,\ell}) = \max_{i,j} |\theta_{ijn\ell}|$ satisfasse:

$$H(P_{n,\ell}) \leq \left(N\, C_1 \left(\frac{2}{R}\right)^{k^3 n} |q|^{\varepsilon n^2} \right)^{\frac{M}{N-M}} \ . \tag{35}$$

Or $M/(N-M) \leq 1$, d'où:

$$H(P_{n,\ell}) \leq |q|^{\varepsilon n^2 + 0(n)} \ . \tag{36}$$

b) Un obstacle à écarter

Dans la suite, nous allons évidemment remplacer y par $\frac{1}{q}$ dans (33). Mais avant de le faire, il faut s'assurer que tout ne va pas s'annuler à cette occasion. Pour cela, écrivons:

$$P_{n,\ell}(x,y) = \sum_{i=0}^{k^2 n} Q_{n,\ell,i}(y)\, x^i \ . \tag{37}$$

Les $Q_{n,\ell,i}$ ne sont pas tous identiquement nuls. Notons $\omega(n)$ *le plus grand entier* tel que $(1-qy)^{\omega(n)}$ divise *tous* les $Q_{n,\ell,i}$. On a $\omega(n) \le k^2 n^2$. Posons:

$$Q^*_{n,\ell,i}(y) = Q_{n,\ell,i}(y)/(1-qy)^{\omega(n)} \ , \tag{38}$$

$$P^*_{n,\ell}(x,y) = \sum_{i=0}^{k^2 n} Q^*_{n,\ell,i}(y)\, x^i = P_{n,\ell}(x,y)/(1-qy)^{\omega(n)} \ . \tag{39}$$

$$G^*_n(x,y) = \sum_{\ell=0}^{2k^2} P^*_{n,\ell}(x,y)\,(g(x,y))^\ell = G_n(x,y)/(1-qy)^{\omega(n)} \ . \tag{40}$$

On peut évaluer facilement $H(P^*_{n,\ell})$ grâce aux inégalités de Cauchy appliquées avec $|x| = |y| = 1$, en utilisant la majoration (36) et le fait que $|q| - 1 \ge 1$:

$$H(P^*_{n,\ell}) \le \max_{|x|=|y|=1} |P^*_{n,\ell}(x,y)| \ \le\ |q|^{\varepsilon n^2 + 0(n)} \ . \tag{41}$$

De plus, il est clair que $P^*_{n,\ell} \in \mathbb{Z}[x,y]$, puisqu'on l'obtient en multipliant $P_{n,\ell}(x,y)$ par $(1-qy)^{-\omega(n)}$ et en ne conservant que les termes de degrés inférieurs à k^2n^2 en y. On a donc obtenu:

$$G^*_n(x,y) = \sum_{\ell=0}^{2k^2} P^*_{n,\ell}(x,y)\,(g(x,y))^\ell = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} G^*_{ijn}\, x^i\, y^j \tag{42}$$

avec $G^*_{ijn} = 0$ pour tout (i,j) tel que $0 \le i < k^3 n$ et $0 \le j < k^3 n^2$, et *l'un au moins des* $P^*_{n,\ell}(x, q^{-1})$ *est non nul.*

Nous majorons maintenant les $|G^*_{ijn}|$ en utilisant une fois de plus les inégalités de Cauchy.

Soit $\chi = R/2$ et $\eta = |q|^{-\varepsilon/k^3}$.

En utilisant la première égalité de (42), et (41), on a:

$$\max_{\substack{|x|=\chi \\ |y|=\eta}} |G^*_n(x,y)| \ \le\ |q|^{\varepsilon n^2 + 0(n)} \ , \tag{43}$$

si bien que:

$$|G^*_{ijn}| \;\leq\; |q|^{\varepsilon n^2+0(n)}\, \chi^{-i}\, \eta^{-j}\ . \tag{44}$$

Enfin, puisque $G^*_{ijn}=0$ pour tout (i,j) tel que $0\leq i<k^3n$ et $0\leq j<k^3n^2$, on peut écrire $G^*_n(x,y)$ sous la forme:

$$G^*_n(x,y) \;=\; \sum_{i=0}^{+\infty}\;\sum_{j=k^3n^2}^{+\infty} G^*_{ijn}\, x^i\, y^j + \sum_{i=k^3n}^{+\infty}\;\sum_{j=0}^{k^3n^2-1} G^*_{ijn}\, x^i\, y^j$$

$$G^*_n(x,y) \;=\; y^{k^3n^2} H_n(x,y) + x^{k^3n}\, L_n(x,y)\ . \tag{45}$$

Les coefficients de H_n et L_n étant des G^*_{ijn}, on obtient aisément à partir de (44) que, pour $|x|\leq R/4$ et $|y|\leq|q|^{-1}<\eta$, on a:

$$|H_n(x,y)|\leq|q|^{2\varepsilon n^2+0(n)}\ , \tag{46}$$

$$|L_n(x,y)|\leq|q|^{\varepsilon n^2+0(n)}\ . \tag{47}$$

D'où finalement: *si* $|x|\leq R/4$ *et* $|y|\leq|q|^{-1}$:

$$|G^*_n(x,y)| \;\leq\; |q|^{2\varepsilon n^2+0(n)}\Big(|y|^{k^3n^2}+|x|^{k^3n}\Big)\ . \tag{48}$$

c) Une fonction auxiliaire d'une seule variable

Nous remplaçons maintenant y par $\frac{1}{q}$ dans (38), (39), (40), (42):

$$P^*_{n,\ell}\Big(x,\frac{1}{q}\Big)=\sum_{i=0}^{k^2n} Q^*_{n,\ell,i}\Big(\frac{1}{q}\Big)\, x^i\ .$$

Soit $R_{n,\ell}(x)=q^{k^2n^2}P^*_{n,\ell}(x,\frac{1}{q})$. Il est clair que $R_{n,\ell}\in\mathbb{Z}[x]$; d'après (41), sa hauteur $H(R_{n,\ell})$ vérifie:

$$H(R_{n,\ell})\leq|q|^{(\varepsilon+k^2)n^2+0(n)}\ . \tag{49}$$

Il résulte alors de (48) que, si nous posons:

$$F_n(x)=\sum_{\ell=0}^{2k^2} R_{n,\ell}(x)(f(x))^{\ell}\ , \tag{50}$$

on a pour $|x|<R/4$:

$$|F_n(x)| \;\leq\; |q|^{(2\varepsilon+k^2)n^2+0(n)}\Big(|q|^{-k^3n^2}+|x|^{k^3n}\Big)\ . \tag{51}$$

d) Formes linéaires d'approximation

Soit $m \in \mathbb{N}$, avec:

(52) $$n \leq m \leq 2n \quad \text{et } n \text{ assez grand} .$$

Il résulte immédiatement de (51) que l'on a, pour $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ fixé:

(53) $$|F_n(\alpha q^{-m})| \leq |q|^{(2\varepsilon+k^2-k^3)n^2+0(n)} .$$

Supposons maintenant que $f(\alpha) \in \mathbb{K}$, avec $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq d$. Alors $F_n(\alpha q^{-m}) \in \mathbb{K}$ puisque f vérifie la propriété 3, et à partir de (5), (6) et (50) on obtient facilement:

(54) $$\operatorname{den}(F_n(\alpha\, q^{-m})) \leq |q|^{(8\mu k^2+2k^2)n^2+0(n)} ,$$

(55) $$\overline{|F_n(\alpha\, q^{-m})|} \leq |q|^{(\varepsilon+k^2+8\nu k^2)n^2+0(n)} .$$

Si nous supposons que $F_n(\alpha\, q^{-m}) \neq 0$, le lemme 1 et les majorations (53), (54), (55) impliquent:

(56) $$\Big(-(8\mu+2)\, k^2 d-(\varepsilon+k^2+8\,\nu k^2)\,(d-1)\Big)\, n^2+0(n) \leq (2\,\varepsilon+k^2-k^3)\, n^2+0(n) .$$

C'est à dire:

(57) $$\left(-(d+1)\,\varepsilon - \Big(d(8\mu+3)+8\nu(d-1)\Big)\, k^2 + k^3\right) n^2 \leq 0(n) .$$

Nous choisissons maintenant $k = [(8\mu + 8\nu + 4)\, d]$, où $[\ \ ]$ désigne la partie entière. Alors $k^3 - (d(8\mu+3)+8\nu(d-1))k^2 > 0$.

On peut ensuite choisir $\varepsilon > 0$ tel que le facteur de n^2 dans (57) soit *strictement positif*; l'inégalité (57) devient alors intenable pour n assez grand.

On en conclut que $F_n(\alpha\, q^{-m})$ *est nul pour tout* m *tel que* $n \leq m \leq 2n$ *et* n *assez grand*.

e) Démonstration du théorème 1

Supposons qu'il existe h rationnels $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_h$, vérifiant $R\,|q^{-1}| \leq |\alpha_i| < R$, et $f(\alpha_i)$ algébrique de degré au plus d pour $i = 1, 2, ..., h$.

Il résulte de ce qui précède que, pour tout n assez grand, on a $F_n(\alpha_i\, q^{-m}) = 0$ pour tout $i = 1, 2, ..., h$, et tout $m = n, n+1, ..., 2n$, avec en outre:

(58) $$\max_{|x|=R|q^{-n}|} |F_n(x)| \leq 1 .$$

(La majoration (58) résulte de (51) et du choix de k.)

Soit n vérifiant ces conditions; on observe que la fonction F_n n'est pas identiquement nulle (propriété 2). Il existe donc un entier $r \geq n$ vérifiant:

(59) $\quad F_n(\alpha_i\, q^{-m})=0 \quad$ pour tout $\; i=1,...,h \;$ et tout $\; m=r,r+1,...,2r\,$;

$\exists\,(i_0,m_0)\in\{1,...,h\}\times\{2r+1,2r+2\}, \quad$ tel que

(60) $\quad F_n(\alpha_{i_0}\, q^{-m_0})\neq 0\;.$

Nous utilisons le lemme 3 avec $z=\alpha_{i_0}\, q^{-m_0}$ et $\rho=R\,|q|^{-r}$. Il vient:

$$|F_n(\alpha_{i_0}\, q^{-m_0})|\leq \max_{|x|=R|q^{-r}|}|F_n(x)|\prod_{i=1}^{h}\prod_{m=r+1}^{2r}\frac{|\alpha_{i_0}|\,|q|^{-m_0}+|\alpha_i|\,|q|^{-m}}{R\,|q|^{-r}-|\alpha_i|\,|q|^{-m}}\;.$$

En vertu de (58), on a $\max\limits_{|x|=R|q^{-r}|}|F_n(x)|\leq 1$ car $r\geq n$; donc:

$$\begin{aligned}|F_n(\alpha_{i_0}\, q^{-m_0})| &\leq \prod_{i=1}^{h}\prod_{m=r+1}^{2r}\frac{|q|^{-m_0}+|q|^{-m}}{|q|^{-r}-|q|^{-m}}\\ &\leq \frac{\left(\prod_{m=r+1}^{2r}|q|^{-m}\right)^h}{(|q|^{-r})^{rh}}\left(\prod_{m=r+1}^{2r}\frac{1+|q|^{m-m_0}}{1-|q|^{r-m}}\right)^h.\end{aligned}$$

On remarque que $\prod_{m=r+1}^{2r}(1+|q|^{m-m_0})\leq\prod_{i=0}^{+\infty}(1+|q|^{-i})$, et que $\prod_{m=r+1}^{2r}(1-|q|^{r-m})\geq\prod_{i=1}^{+\infty}(1-|q|^{-i})$.

On a donc:

(61) $$|F_n(\alpha_{i_0}\, q^{-m_0})|\;\leq\;|q|^{-\frac{h}{2}r^2+0(r)}\;.$$

Par ailleurs, $F_n(\alpha_{i_0}\, q^{-m_0})$ est algébrique de degré au plus d, et on a grâce à (5) et (50):

$$\mathrm{den}\Big(F_n(\alpha_{i_0}q^{-m_0})\Big)\;\leq\;|q|^{2\mu k^2m_0^2+0(m_0)}\,|q|^{k^2nm_0}\;.$$

Puisque $m_0\leq 2r+2$ (voir (60)) et $n\leq r$, il vient:

(62) $$\mathrm{den}\Big(F_n(\alpha_{i_0}\, q^{-m_0})\Big)\;\leq\;|q|^{2k^2(4\mu+1)r^2+0(r)}\;.$$

Enfin, grâce à (6) et (50):

$$\overline{|F_n(\alpha_{i_0}\, q^{-m_0})|}\;\leq\;|q|^{2k^2\nu m_0^2+0(m_0)}\,|q|^{(\varepsilon+k^2)n^2+0(n)}\;.$$

Donc:

(63) $$\overline{|F_n(\alpha_{i_0}\, q^{-m_0})|}\;\leq\;|q|^{(\varepsilon+(8\nu+1)k^2)r^2+0(r)}\;.$$

Nous utilisons maintenant le fait que $F_n(\alpha_{i_0}\, q^{-m_0}) \neq 0$ (voir (60)), le lemme 1 et les inégalités (61), (62), (63), pour obtenir:

$$\frac{h}{2}\, r^2 \;\leq\; \Big(2k^2\,(4\mu+1)\,d + (d-1)\,(\varepsilon + k^2 + 8\,\nu k^2)\Big)\, r^2 + 0(r)\ .$$

Pour n assez grand, cette inégalité implique:

$$\frac{h}{2} \;\leq\; 2k^2\,(4\mu+1)\,d + (d-1)\,(\varepsilon + k^2 + 8\,\nu k^2)\ .$$

Et comme on peut choisir ε arbitrairement petit à la fin du paragraphe d), il vient:

$$h \;\leq\; 2k^2\,\Big((8\mu+2)\,d + (8\nu+1)\,(d-1)\Big)\ ,$$

et *a fortiori*: $h \leq 2k^2\,(8\mu+8\nu+3)\,d$.

Le théorème 1 est démontré, puisque $k \leq (8\mu+8\nu+4)\,d$. ∎

5 – Variante "à la Siegel–Shidlovskii"

Dans ce dernier paragraphe, nous nous limitons au cas où f est la *fonction q-exponentielle* (voir paragraphe 2-a), vérifiant:

$$f(qx) = (1+x)\,f(x)\ . \tag{65}$$

Nous démontrons le résultat suivant:

$$\operatorname{card}\mathbb{E}(d) \;\leq\; 8256\ d^4\ , \tag{66}$$

en utilisant la méthode de Siegel–Shidlovskii [18]; nous aurons besoin du lemme de zéros ci-dessous:

Lemme 4. *Soient R_{n,ℓ_1}, R_{n,ℓ_2}, ..., R_{n,ℓ_e} les $R_{n,\ell}$ non nuls dans (50), avec $\ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_e$. Pour g entier, soit:*

$$T_g(x) = (1+x)\,(1+qx)\cdots(1+q^{g-1}x)\ . \tag{67}$$

Alors il existe des entiers $k_1 < k_2 < \cdots < k_e$, bornés indépendamment de n, tels que le déterminant suivant ne soit pas identiquement nul:

$$\Delta_n(x) \;=\; \begin{vmatrix} R_{n,\ell_1}(q^{k_1}x)(T_{k_1}(x))^{\ell_1} & \dots & R_{n,\ell_e}(q^{k_1}x)(T_{k_1}(x))^{\ell_e} \\ R_{n,\ell_1}(q^{k_2}x)(T_{k_2}(x))^{\ell_1} & \dots & R_{n,\ell_e}(q^{k_2}x)(T_{k_2}(x))^{\ell_e} \\ \vdots & & \\ R_{n,\ell_1}(q^{k_e}x)(T_{k_e}(x))^{\ell_1} & \dots & R_{n,\ell_e}(q^{k_e}x)(T_{k_e}(x))^{\ell_e} \end{vmatrix}\ .$$

Démonstration du Lemme 4: Le terme de plus haut degré de $\Delta_n(x)$ sera le même que le terme de plus haut degré du déterminant obtenu en ne conservant que les termes de plus haut degré des R_{n,ℓ_i}, si ce déterminant est non nul.

Il suffit donc de démontrer que le déterminant $D_{n,e}(x)$ suivant est non nul (on pose $\delta_i = \deg R_{n,\ell_i}$):

$$D_{n,e}(x) = \begin{vmatrix} q^{k_1\delta_1}(T_{k_1}(x))^{\ell_1} & \dots & q^{k_1\delta_e}(T_{k_1}(x))^{\ell_e} \\ q^{k_2\delta_1}(T_{k_2}(x))^{\ell_1} & \dots & q^{k_2\delta_e}(T_{k_2}(x))^{\ell_e} \\ \vdots & & \\ q^{k_e\delta_1}(T_{k_e}(x))^{\ell_1} & \dots & q^{k_e\delta_e}(T_{k_e}(x))^{\ell_e} \end{vmatrix} .$$

Un raisonnement par récurrence sur e permet de montrer que $D_{n,e}(x)$ n'est pas nul pour un choix convenable des k_i. En effet, en développant $D_{n,e}(x)$ par rapport à sa dernière ligne, on obtient:

$$D_{n,e}(x) = q^{k_e\delta_e}(T_{k_e}(x))^{\ell_e}\, D_{n,e-1}(x) + E_{n,e}(x) \ , \tag{68}$$

où $E_{n,e}(x)$ est un polynôme dont le degré $\theta_{n,e}$ est borné par:

$$\theta_{n,e} \le \ell_{e-1}\, k_e + \omega(k_1, ..., k_{e-1}) \ . \tag{69}$$

La fonction $\omega(k_1, ..., k_{e-1})$ ne dépend pas de k_e. Il en résulte immédiatement que l'on peut choisir k_e de telle sorte que $\deg((T_{k_e}(x))^{\ell_e} D_{n,e-1}(x)) > \theta_{n,e}$.

Donc $D_{n,e} \neq 0$.

Le lemme 4 est démontré. ∎

On en déduit facilement la majoration (66); en remplaçant dans (50) x par $q^{k_1}x$, $q^{k_2}x$, ..., $q^{k_e}x$, on obtient les fonctions F_{n,k_i} pour $i = 1, 2, ..., e$:

$$F_{n,k_i}(x) = \sum_{j=1}^{e} R_{n,\ell_j}(q^{k_i}x)\,(T_{k_i}(x))^{\ell_j}\,(f(x))^{\ell_j} \ . \tag{70}$$

Il est immédiat que, pour le même choix de k que dans le paragraphe 4-d):

$$k = \Big[(8\mu + 8\nu + 4)\, d\Big] = 8d \ , \tag{71}$$

les fonctions F_{n,k_i} vérifient pour n assez grand:

$$F_{n,k_i}(\alpha\, q^{-m}) = 0 \quad \text{pour} \;\; m = n, n{+}1, ..., 2n \ , \tag{72}$$

dès lors que α est algébrique de degré inférieur ou égal à d.

On a alors:

$$\Delta_n(\alpha\, q^{-m}) = 0 \quad \text{pour} \quad m = n, n+1, ..., 2n \ . \tag{73}$$

Or en vertu du lemme 4, Δ_n est un polynôme non nul, et son degré est majoré par $(2k^2+1)\,k^2 n + C_2$, où C_2 ne dépend pas de n. Il a donc au plus $(2k^2+1)\,k^2 n + C_2$ racines distinctes, d'où (66) en majorant d^2 par d^4.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Bertrand, D. – Theta functions and transcendence, "Madras Number Theory Symposium", 1996, *The Ramanujan J. Math.* (à paraître).

[2] Bézivin, J.P. – Indépendance linéaire des valeurs des solutions transcendantes de certaines équations fonctionnelles I, *Manuscripta Math.,* 61 (1988), 103–129.

[3] Bézivin, J.P. – Plus petit commun multiple des termes consécutifs d'une suite récurrente linéaire, *Collect. Math.,* 40(1) (1989).

[4] Bézivin, J.P. – Sur les propriétés arithmétiques d'une fonction entière, *Math. Nachr.* (à paraître).

[5] Borwein, P. – On the irrationality of certain series, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.,* 112 (1992), 141–146.

[6] Bundschuh, P. – Arithmetische Untersuchungen unendlicher Produkte, *Inventiones Math.,* 6 (1969), 275–295.

[7] Bundschuh, P. and Shiokawa, I. – A measure for the linear independence of certain numbers, *Result. Math.,* 7 (1984), 130–144.

[8] Bundschuh, P. and Waldschmidt, M. – Irrationality results for theta functions by Gel'fond–Schneider's method, *Acta Arith.,* 53 (1989), 289–307; *Erratum Acta Arith.,* 78 (1996), 99.

[9] Bundschuh, P. and Väänänen, K. – Arithmetical investigations of a certain infinite product, *Compositio Math.,* 91 (1994), 175–201.

[10] Duverney, D. – Irrationalité d'un q-analogue de $\zeta(2)$, *C.R.A.S. Paris,* 321, Série I, (1995), 1287–1289.

[11] Duverney, D. – Propriétés arithmétiques d'un produit infini lié aux fonctions thêta, *J. Reine Angew. Math.,* 477 (1996), 1–12.

[12] Duverney, D. – Propriétés arithmétiques des solutions de certaines équations fonctionnelles de Poincaré, *J. Théorie des Nombres Bordeaux,* 8 (1996), 443–447.

[13] Duverney, D., Nishioka, Ke., Nishioka, Ku. and Shiokawa, I. – Transcendence of Jacobi's theta series, *Proc. Japan Acad. Sc.,* 72(9), Ser. A (1996).

[14] Gasper, G. and Rahman, M. – *Basic hypergeometric series*, Cambridge University Press, 1990.

[15] Matala-Aho, T. – Remarks on the arithmetic properties of certain hypergeometric series of Gauss and Heine, *Acta Universitatis Oulensis,* 219, Series A (1991).

[16] Nesterenko, Y. – Modular functions and transcendence problems, *Sbornik Math.,* 187(9–10) (1996), 1319–1348.

[17] Pólya, G. und Szegö, G. – *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II,* Vierte Auflage, Springer-Verlag, 1971.

[18] SHIDLOVSKII, A.B. – *Transcendental Numbers*, de Gruyter, 1989.

[19] TSCHAKALOFF, L. – Arithmetische Eigenschaften der unendlichen Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} a^{-\frac{1}{2}\nu(\nu-1)}$, *Math. Ann.*, 80 (1921), 62–74.

[20] WALDSCHMIDT, M. – Transcendence Methods, *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics,* 52 (1979).

[21] WALDSCHMIDT, M. – *Nombres Transcendants*, Springer-Verlag, 1974.

Daniel Duverney,
24 Place du Concert, 59800 Lille – FRANCE