PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 58 Fasc. 4 – 2001
Nova Série

CRITÈRE DE BOCCE ET CONVERGENCE EN NORME DE PETTIS DANS $P^1_E(\mu)$

A. Amrani, A. Bourass and K. Elamri

1 – Introduction

Dans [BGJ], les auteurs établissent plusieurs critères de passage de la convergence faible à une convergence de type fort dans l'espace L^1_E des fonctions Bochner intégrables. Ces critères sont basés sur une condition d'oscillation dite oscillation de Bocce. Ils donnent en particulier une condition nécessaire et suffisante de convergence dans L^1_E muni de la norme de Pettis, et montrent que dans L^1_E la convergence de type faible, $\sigma(L^1_E, L^\infty_{E'})$, et la convergence en norme de Pettis sont équivalentes.

Dans ce papier, nous donnons une extention de ce dernier résultat à l'espace $P^1_E(\mu)$ des fonctions Pettis intégrables. Notre démarche suit de près celle de [BGJ]. Ensuite, nous inspirant du fait bien connu ([Vi], [ACV1], [Bn], [Va]), que sous des conditions d'extrémalité, la convergence faible peut impliquer la convergence forte, nous établissons que le critère d'oscillation de Bocce est, à son tour, conséquence dans $P^1_E(\mu)$ d'une convergence de type faible, plus exactement la convergence simple sur $L^\infty_{\mathbb{R}} \otimes E'$, et d'une condition d'extrémalité.

Dans ce qui suit, E désigne un espace de Banach séparable, de dual E'. On note $\bar{B}_E$ et $\bar{B}_{E'}$ les boules unités fermées respectives de E et de E', $f(E)$ (resp. $csk(E), cwk(E)$) les parties non vides de E qui sont fermées (resp. convexes fortement compactes, convexes faiblement compactes), et $\mathcal{R}_k(E)$ (resp. $\mathcal{R}_w(E)$), l'ensemble des convexes fermés dont l'intersection avec toute boule fermée de E est fortement (resp. faiblement) compacte. Pour $A \subset E$, on note $\bar{co}(A)$ l'envelop-

Received: May 3, 2000; *Revised*: October 17, 2000.
AMS Subject Classification: 46E30, 28A20, 60B12.
Keywords: Pettis; Multifonction; Bocce.

pe convexe fermée de A et $ext(A)$ (resp. $dent(A)$) l'ensemble des points extrémaux (resp. de dentabilité) de A ($x \in ext(A)$ si pour tout $y, z \in A$ tel que $1/2(y+z) = x$ alors $x = y = z$; $x \in dent(A)$ si pour tout $\varepsilon > 0$, $x \notin \bar{co}(A/B(x,\varepsilon))$).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie. Pour $B \in \mathcal{F}$, on note $\mathcal{F}^+(B) = \{A \subset B,\, A \in \mathcal{F},\, \mu(A) > 0\}$, l'ensemble $\mathcal{F}^+(\Omega)$ sera noté $\mathcal{F}^+$.

Une fonction $f\colon \Omega \mapsto E$ mesurable et scalairement intégrable i.e., pour tout $x' \in E'$, la fonction $\Omega \mapsto x'.f(\omega)$ est intégrable, est dite Pettis intégrable si pour tout $A \in \mathcal{F}$, il existe $x_A \in E$ tel que, $x'.x_A = \int_A x'.f\, d\mu$, $x' \in E'$. La dualité entre E et E' est notée ici par: $x.x'$, pour $x \in E$ et $x' \in E'$. L'élément x_A noté $\int_A f\, d\mu$, est appelé l'intégrale de Pettis de f sur A. L'application $f \in P^1_E(\mu) \mapsto \|f\|_{Pe} = \sup_{x' \in \bar{B}_{E'}} \int_\Omega |x'.f|\, d\mu$ définit une norme sur $P^1_E(\mu)$.

Une multifonction Γ de Ω dans $f(E)$ est mesurable si pour tout ouvert O de E, l'ensemble $\Gamma^-(O) = \{\omega \in \Omega,\ \Gamma(\omega) \cap O \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}$. Lorsque $\mathcal{F}$ est μ-complète, Γ est mesurable si et seulement si $graphe(\Gamma) = \{(\omega, x) \in \Omega \times E,\ x \in \Gamma(\omega)\} \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_E$, où $\mathcal{B}_E$ est la tribu Borélienne de E ([CV], 3.30), elle est dite scalairement mesurable (resp. scalairement intégrable) si pour tout $x' \in E'$, la fonction scalaire $\omega \mapsto \delta^*(x', \Gamma(\omega)) = \sup_{x \in \Gamma(\omega)} x'.x$ est mesurable (resp. intégrable). Une multifonction scalairement intégrable Γ sera dite Pettis intégrable si toute sélection f de Γ i.e., $f(\omega) \in \Gamma(\omega)$ $\mu - p.p$, scalairement intégrable est Pettis intégrable. On note $\mathcal{S}^{Pe}_\Gamma$, l'ensemble des sélections de Γ qui sont Pettis intégrables, et pour tout $A \in \mathcal{F}$, l'ensemble

$$\int_A \Gamma = \left\{ \int_A f\, d\mu,\ f \in \mathcal{S}^{Pe}_\Gamma \right\},$$

désigne l'intégrale de Pettis de Γ sur A.

Rappelons qu' une partie $H \subset L^1_{\mathbb{R}}$ est uniformément intégrable si

$$\lim_{a \to +\infty} \sup_{f \in H} \int_{[|f| > a]} f\, d\mu = 0 .$$

Pour une fonction $f \in L^1_E$, espace des fonctions Bochner intégrables, et pour $A \in \mathcal{F}^+$, l'oscillation de Bocce de f sur A est définie par

$$Bo(f)/_A = \frac{1}{\mu(A)} \int_A \|f - m_A(f)\|\, d\mu ,$$

où $m_A(f) = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f\, d\mu$ est la valeur moyenne de f sur A.

On rappelle les deux résultats importants suivants:

Théorème 1.1. *Une fonction mesurable scalairement intégrable $f\colon \Omega \mapsto E$ est Pettis intégrable si et seulement si l'ensemble $\{x'.f,\ x' \in B_{E'}\}$ est uniformément intégrable dans $L^1_{\mathbb{R}}$ ([Mu], Théorème 5.2).* ∎

Théorème 1.2. *Soit $\Gamma\colon \Omega \mapsto cwk(E)$ une multifonction mesurable telle que l'ensemble $\{\delta^*(x',\Gamma),\ x' \in B_{E'}\}$ est uniformément intégrable. Alors l'ensemble $\mathcal{S}_\Gamma^{Pe}$ est non vide et séquentiellement compact pour la topologie de la convergence simple sur $L^\infty_\mathbb{R} \otimes E'$. En particulier si Γ est à valeurs dans $csk(E)$ alors l'intégrale $\int_\Omega \Gamma$ est convexe compact dans E ([Ca1], théorème 4.2 et [Ca2], théorème 4.4).* ∎

2 – Définitions et résultats préliminaires

Soient $f \in P^1_E(\mu)$ et $A \in \mathcal{F}^+$. On appelle Pettis oscillation de Bocce de f sur A, le réel noté $P.Bo(f)/_A$, défini par

$$P.Bo(f)/_A \;=\; \sup_{x'\in B_{E'}} Bo(x'.f)/_A \;=\; \sup_{x'\in B_{E'}} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |x'.f - m_A(x'.f)|\; d\mu\;.$$

Les propriétés suivantes se déduisent sans difficulté des définitions.

Propriètés 2.1. Soit $f, g \in P^1_E(\mu)$ et $A \in \mathcal{F}^+$, alors

$P.Bo(f)/_A = P.Bo(-f)/_A$.

$P.Bo(f+g)/_A \;\le\; P.Bo(f)/_A + P.Bo(g)/_A$.

$P.Bo(f)/_A \;\le\; \dfrac{2}{\mu(A)} \displaystyle\sup_{x'\in B_{E'}} \int_A |x'.f|\, d\mu \;\le\; \dfrac{2}{\mu(A)} \|f\|_{Pe}$. □

Définition 2.2. Une suite $(f_k)_k$ dans $P^1_E(\mu)$ satisfait le critère séquentiel Pettis Bocce si pour toute sous-suite $(f_{k_j})_j$ de $(f_k)_k$, pour tout $\varepsilon > 0$ et $B \in \mathcal{F}^+$, il existe un ensemble $A \in \mathcal{F}^+(B)$ tel que,

$$\liminf_j P.Bo(f_{k_j})/_A < \varepsilon\;. \;\square$$

Définition 2.3. Une partie $H \subset \mathcal{P}_E$ est dite scalairement Pettis uniformément intégrable si l'ensemble $\{x'.f,\ x' \in B_{E'},\ f \in H\}$ est uniformément intégrable dans $L^1_\mathbb{R}$. Elle est dite Pettis uniformément intégrable si

$$\lim_{a\to+\infty} \sup_{f\in H} \|f\, 1_{[\|f\|>a]}\|_{Pe} \;=\; 0\;. \;\square$$

Remarque 2.4.

1. Une partie H qui est Pettis uniformément intégrable est scalairement Pettis uniformément intégrable. La réciproque n'étant pas vraie en général.

2. Une partie H est scalairemant Pettis uniformément intégrable si et seulement si elle est bornée dans $P^1_E(\mu)$ et l'ensemble $\{x'.f,\ x' \in B_{E'},\ f \in H\}$ est équi-intégrable dans $L^1_{\mathbb{R}}$ i.e.,

$$\lim_{\mu(A)\to 0^+} \sup_{x'\in B_{E'}, f\in H} \int_A |x'.f|\, d\mu = \lim_{\mu(A)\to 0^+} \sup_{f\in H} \|f1_A\|_{Pe} = 0 .$$

3. Si H et K sont deux parties de $P^1_E(\mu)$ scalairement Pettis uniformément intégrables alors $H+K$ l'est aussi. □

Les lemmes qui suivent sont des extensions à l'espace $P^1_E(\mu)$ de résultats similaires donnés, dans [BGJ], dans le cadre des fonctions Bochner intégrables.

Les démonstrations que nous proposons nécessitent une adaptation des méthodes utilisées dans [BGJ].

Lemme 2.1. *Soit $(f_k)_k$ une suite uniformément intégrable dans $P^1_E(\mu)$. On suppose que pour toute sous-suite $(f_{k_j})_j$ de $(f_k)_k$, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $B \in \mathcal{F}^+$, il existe un ensemble $A \in \mathcal{F}^+(B)$ tel que,*

$$\liminf_j \sup_{x'\in B_{E'}} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |x'.f_{k_j}|\, d\mu < \varepsilon ,$$

alors la suite $(f_k)_k$ converge vers 0 en norme dans $P^1_E(\mu)$.

Démonstration: Soit $(f_k)_k$ scalairement Pettis uniformément intégrable et supposons qu'elle ne converge pas vers 0 dans $P^1_E(\mu)$. Alors, $\exists\, \varepsilon > 0$, $\exists\, (f_{k_j})_j$ une sous-suite de $(f_k)_k$ tels que,

$$\|f_{k_j}\|_{Pe} > 2\,\varepsilon , \quad \forall\, j .$$

Il existe alors une suite $(x'_{k_j})_j \subset B_{E'}$ telle que,

$$\int_\Omega |x'_{k_j}.f_{k_j}|\, d\mu > 2\varepsilon , \quad \forall\, j .$$

Puisque $(f_k)_k$ est Pettis uniformément intégrable, l'ensemble $\{|x'.f_k|,\ x' \in B_{E'},\ k \geq 1\}$ est relativement $\sigma(L^1_{\mathbb{R}}, L^\infty_{\mathbb{R}})$ compact dans $L^1_{\mathbb{R}}$. Soit $g \in L^1_{\mathbb{R}}$ une valeur d'adhérence de la suite $(|x'_{k_j}.f_{k_j}|)_j$. On a $\int_\Omega g\, d\mu \geq 2\varepsilon$, et par conséquent l'ensemble $B = [g \geq \varepsilon]$ est de mesure > 0. Soit $A \in \mathcal{F}^+(B)$, alors on a

$$\begin{aligned}\liminf_j \sup_{x'\in B'_E} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |x'.f_{k_j}|\, d\mu &\geq \liminf_j \frac{1}{\mu(A)} \int_A |x'_{k_j}.f_{k_j}|\, d\mu \\ &= \frac{1}{\mu(A)} \int_A g\, d\mu > \varepsilon . \blacksquare\end{aligned}$$

Lemme 2.2. *Si $f \in P_E^1(\mu)$, alors pour chaque $\varepsilon > 0$ et $B \in \mathcal{F}^+$, il existe un ensemble $A_0 \in \mathcal{F}^+(B)$ tel que,*

$$P.Bo(f)/_A < \varepsilon\,, \qquad \forall\, A \subset A_0\ .$$

Démonstration: Soient $f \in P_E^1(\mu)$, $\varepsilon > 0$ et $B \in \mathcal{F}^+$. Puisque f est fortement mesurable, elle est limite $\mu - p.p.$ d'une suite $(f_n)_n$ de fonctions simples et en vertu du théorème d'Egorov, la convergence est μ-presque uniforme sur B. Ainsi, $\exists\, A_\varepsilon \in \mathcal{F}^+(B)$, $\exists\, n_0 > 0$ tels que, $\mu(A_\varepsilon^c \cap B) < \varepsilon$ et

$$(*) \qquad \sup_{x' \in B_{E'}} \sup_{\Omega \in A_\varepsilon} \Big| x'.\, [f_{n_0}(\omega) - f(\omega)] \Big| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

avec $f_{n_0} = \sum_{i=1}^k x_i\, 1_{A_i}$, et $(A_i)_{i=1}^k$ une partition finie de mesurables de B. Puisque $\mu(B) > 0$, il existe au moins un indice $i_0 \in \{1, .., k\}$ tel que, $\mu(A_{i_0} \cap A_\varepsilon) > 0$. L'ensemble $A_0 = A_\varepsilon \cap A_{i_0}$ appartient à $\mathcal{F}^+(B)$, et pour tout $A \subset A_0$ on a, $P.Bo(f_{n_0})/_A = 0$, car $m_A(x'.f_{n_0}(\omega)) = x'.f_{n_0}(\omega)$, pour $\omega \in A$ et $x' \in E'$. Et d'après les propriétés 2.1, on obtient

$$\begin{aligned}
P.Bo(f)/_A &\le P.Bo(f_{n_0} - f)/_A + P.Bo(f_{n_0})/_A \\
&= P.Bo(f_{n_0} - f)/_A \\
&\le \frac{2}{\mu(A)} \sup_{x' \in B_{E'}} \int_A |x'.f_{n_0} - x'.f|\, d\mu \\
&\le \frac{2}{\mu(A)} \sup_{x' \in B_{E'}} \int_A \sup_{\omega \in A} |x'.(f_{n_0}(\omega) - f(\omega))|\, d\mu \\
&\le \frac{2}{\mu(A)}\, \mu(A)\, \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .
\end{aligned}$$

Cette dérnière inégalité découle de $(*)$. ∎

Lemme 2.3. *Le critère séquentiel Pettis Bocce est invariant par translation.*

Démonstration: Soit $(f_k)_k \subset P_E^1(\mu)$ satisfait le critère séquentiel Pettis Bocce et soit $f \in P_E^1(\mu)$, soient $(f_{k_j})_j$ une sous-suite de $(f_k)_k$, $\varepsilon > 0$ et $B \in \mathcal{F}^+$. D'après le lemme 2.2, il existe $A_0 \in \mathcal{F}^+(B)$ tel que,

$$(1) \qquad P.Bo(f)/_A < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad \forall\, A \subset A_0\ ,$$

et par hypothèse, il existe $A_1 \in \mathcal{F}^+(A_0)$ tel que,

$$(2) \qquad \liminf_j P.Bo(f_{k_j})/_{A_1} < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

D'après les propriétés 2.1, on a

$$P.Bo(f_{k_j}+f)/_{A_1} \le \; P.Bo(f_{k_j})/_{A_1} + P.Bo(f)/_{A_1} \;,$$

$$\liminf_j P.Bo(f_{k_j}+f)/_{A_1} \;\le\; \liminf_j P.Bo(f_{k_j})/_{A_1} + P.Bo(f)/_{A_1} \;.$$

Et avec (1) et (2), on obtient

$$\liminf_j P.Bo(f_{k_j}+f)/_{A_1} < \varepsilon \;.$$

Ainsi $(f_k+f)_k$ satisfait aussi le critère séquentiel Pettis Bocce. ∎

3 – Critères de convergence en norme dans $P^1_E(\mu)$

On peut à présent énoncer le résultat principal de cette section, qui est une extention à l'espace $P^1_E(\mu)$ du théorème 5.11 de [BGJ].

Théorème 3.1. *Une suite $(f_k)_k$ dans $P^1_E(\mu)$ converge en norme de Pettis vers $f_0 \in P^1_E(\mu)$ si et seulement si:*

(**1**) *$(f_k)_k$ est scalairement Pettis uniformément intégrable;*

(**2**) *$(f_k)_k$ satisfait le critère séquentiel Pettis Bocce;*

(**3**) *Pour tout $B \in \mathcal{F}^+$, $\displaystyle\int_B f_k\,d\mu \to \int_B f_0\,d\mu$, en norme dans E.*

Démonstration: Soit $(f_k)_k, f_0$ une suite dans $P^1_E(\mu)$ telle que, $\|f_k-f_0\|_{Pe} \to 0$.

(**1**) La suite $(f_k)_k$ étant bornée dans $P^1_E(\mu)$, il suffit de vérifier que l'ensemble $\{x'.f_k,\ x' \in B_{E'}, k \ge 1\}$ est équi-intégrable. Soit $\varepsilon > 0$ et $k_0 \ge 1$ tels que, pour tout $k \ge k_0$,

$$\|f_k-f_0\|_{Pe} \le \varepsilon \;.$$

Pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a

$$\sup_{x' \in B_{E'},\, k \ge 1} \int_A |x'.f_k|\,d\mu \;\le$$

$$\le\; \sup_{k<k_0}\sup_{x' \in B'_E} \int_A |x'.(f_k)|\,d\mu \;+\; \sup_{k\ge k_0}\sup_{x' \in B_{E'}} \int_A |x'.(f_k-f_0)|\,d\mu \;+\; \sup_{x' \in B'_{E'}} \int_A |x'.f_0|\,d\mu$$

$$\le\; \sup_{k\ge k_0} \|f_k-f_0\|_{Pe} \;+\; \sup_{k<k_0}\sup_{x' \in B_{E'}} \int_A |x'.f_k|\,d\mu \;+\; \sup_{x' \in B_{E'}} \int_A |x'.f_0|\,d\mu \;.$$

L'ensemble fini $\{f_0, f_1, ..., f_{k-1}\}$ étant scalairement Pettis uniformément intégrable, les deux dérniers termes tendent vers 0 lorsque $\mu(A) \to 0$. Donc

$$\lim_{\mu(A)\to 0^+} \sup_{k\geq 1,\, x'\in B'_E} \int_A |x'.f_k|\, d\mu \ \leq\ \varepsilon\ .$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on en déduit que

$$\lim_{\mu(A)\to 0^+} \sup_{x'\in B_{E'},\, k\geq 1} \int_A |x'.f_k|\, d\mu \ =\ 0\ .$$

(**2**) Soient $(f_{k_j})_j$ une sous-suite de $(f_k)_k$, $\varepsilon > 0$ et $B \in \mathcal{F}^+$.

Comme $f_0 \in P^1_E(\mu)$, il existe par le lemme 2.2, un ensemble $A_0 \in \mathcal{F}^+(B)$ tel que,

$$P.Bo(f_0)/_A < \varepsilon\,, \qquad \forall\, A \subset A_0\ .$$

Utilisant les propriétés 2.1, on a

$$\begin{aligned} P.Bo(f_{k_j})/_{A_0} &\leq\ P.Bo(f_{k_j} - f_0)/_{A_0} + P.Bo(f_0)/_{A_0} \\ &\leq\ \frac{2}{\mu(A_0)}\, \|f_{k_j} - f_0\|_{Pe} + P.Bo(f_0)/_{A_0}\ , \end{aligned}$$

et par passage à la limite inférieure, on en déduit

$$\liminf_j P.Bo(f_{k_j})/_{A_0} \ \leq\ \frac{2}{\mu(A_0)}\ \lim_j \|f_{k_j} - f_0\|_{Pe} + P.Bo(f_0)/_{A_0} < \varepsilon\ .$$

(**3**) Soit $B \in \mathcal{F}^+$, puisque les f_k et f_0 sont dans $P^1_E(\mu)$, alors on a

$$\begin{aligned} \left\| \int_B f_k\, d\mu - \int_B f_0\, d\mu \right\| &=\ \sup_{x'\in B_{E'}} \left| x'.\Big(\int_B f_k\, d\mu - \int_B f_0\, d\mu \Big) \right| \\ &\leq\ \sup_{x'\in B_{E'}} \int_B |x'.(f_k - f_0)|\, d\mu \\ &\leq\ \|f_k - f_0\|_{Pe}\ . \end{aligned}$$

D'où $\lim_k \| \int_B f_k\, d\mu - \int_B f_0\, d\mu\| = 0$, et la convergence est même uniforme en $B \in \mathcal{F}$. Réciproquement, soit $f_0 \in P^1_E(\mu)$ et $(f_k)_k$ une suite dans $P^1_E(\mu)$ qui vérifient les conditions (1), (2) et (3), la suite $(f_k - f_0)_k$ est encore scalairement Pettis uniformément intégrable et satisfait le critère séquentiel Pettis Bocce. Donc si $(f_{k_j})_j$ est une sous-suite de $(f_k)_k$, $\varepsilon > 0$, et $B \in \mathcal{F}^+$, il existe un ensemble $A \in \mathcal{F}^+(B)$ tel que,

$$(**) \qquad \liminf_j P.Bo(f_{k_j} - f_0)/_A < \varepsilon\ .$$

On a,

$$\sup_{x'\in B_{E'}} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |x'.(f_{k_j}-f_0)|\,d\mu \;\leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{x'\in B_{E'}} \frac{1}{\mu(A)} \int_A \Big|x'.(f_{k_j}-f_0) - m_A[x'.(f_{k_j}-f_0)]\Big|\,d\mu \\
&\quad + \sup_{x'\in B'_{E'}} \frac{1}{\mu(A)} \int_A \Big|m_A[x'.(f_{k_j}-f_0)]\Big|\,d\mu \\
&= P.Bo(f_{k_j}-f_0)/_A + \sup_{x'\in B_{E'}} \Big|m_A[x'.(f_{k_j}-f_0)]\Big| \\
&= \sup_{x'\in B_{E'}} \frac{1}{\mu(A)} \left|x'.\left[\int_A f_{k_j}\,d\mu - \int_A f_0\,d\mu\right]\right| + P.Bo(f_{k_j}-f_0)/_A \\
&= P.Bo(f_{k_j}-f_0)/_A + \frac{1}{\mu(A)} \left\|\int_A f_{k_j}\,d\mu - \int_A f_0\,d\mu\right\| .
\end{aligned}$$

En passant à la limite inférieure, on obtient

$$\begin{aligned}
&\liminf_j \sup_{x'\in B_{E'}} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |x'.(f_{k_j}-f_0)|\,d\mu \;\leq \\
&\qquad \leq \liminf_j P.Bo(f_{k_j}-f_0)/_A + \lim_j \frac{1}{\mu(A)} \left\|\int_A f_{k_j}\,d\mu - \int_A f_0\,d\mu\right\| \;<\; \varepsilon .
\end{aligned}$$

Combinant la condition (3) de l'énoncé et la relation $(**)$, on obtient

$$\liminf_j \sup_{x'\in B_{E'}} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |x'.(f_{k_j}-f_0)|\,d\mu \;<\; \varepsilon .$$

On conclue alors par le lemme 2.1. ∎

Lorsque la suite $(f_k)_k$ est Pettis uniformément intégrable, on peut affaiblir la condition (3), du théorème 3.1, qui exprime la convergence en norme dans E de la suite des intégrales de Pettis $(\int_B f_k\,d\mu)_k$, pour tout $B\in\mathcal{F}$. Introduisons la définition suivante:

Une partie $H\subset P^1_E(\mu)$ est $\mathcal{R}_k(E)$-tendue (resp. $\mathcal{R}_w(E)$-tendue), si pour tout $\varepsilon>0$, il existe une multifonction mesurable Γ_ε à valeurs dans $\mathcal{R}_k(E)$ (resp. $\mathcal{R}_w(E)$) telle que,

$$\sup_{f\in H} \mu\Big(\Big\{\omega\in\omega,\; f(\omega)\notin\Gamma_\varepsilon(\omega)\Big\}\Big) \;\leq\; \varepsilon .$$

Lemme 3.1. *Si $H \subset P^1_E(\mu)$ est $\mathcal{R}_k(E)$-tendue et Pettis uniformément intégrable, alors pour tout $B \in \mathcal{F}^+$, l'ensemble $\Delta_B = \{\int_B f\,d\mu,\ f \in H\}$ est relativement compact dans E.*

Démonstration: Il suffit de vérifier le résultat pour $B = \Omega$, puisque les ensembles tronqués $H1_B = \{f1_B,\ f \in H\}$ sont également $\mathcal{R}_k(E)$-tendus et Pettis uniformément intégrables. Soit $\varepsilon > 0$, d'après la remarque 2.1, il existe $\alpha > 0$ et $\delta > 0$ tels que,

$$\sup_{f\in H}\Big\| f1_{[\|f\|>\alpha]}\Big\|_{Pe} < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{1}$$

$$\mu(A) < \delta \implies \sup_{f\in H}\Big\| f1_A\Big\|_{Pe} < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2}$$

Comme H est $\mathcal{R}_k(E)$-tendu, il existe une multifonction $\Gamma_\delta\colon\ \Omega \mapsto \mathcal{R}_k(E)$ mesurable telle que,

$$\sup_{f\in H}\mu\Big(\Big\{\omega,\ f(\omega) \notin \Gamma_\delta(\omega)\Big\}\Big) < \delta\,. \tag{3}$$

La multifonction $\Gamma_\varepsilon = \bar{co}((\Gamma_\delta \cap \bar{B}(0,\alpha)) \cup \{0\})$ est mesurable, Pettis intégrable ([He], [CV]) et à valeurs dans $csk(E)$. D'après le théorème 1.2, l'intégrale $\int_\Omega \Gamma_\varepsilon$ est convexe compact de E, et par conséquent l'ensemble

$$\Delta_\varepsilon = \Big\{\int_{[f\in\Gamma_\delta]\,\cap\,[\|f\|\le\alpha]} f\,d\mu,\ f \in H\Big\}$$

est relativement compact dans E, puisqu'il est contenu dans $\int_\Omega \Gamma_\varepsilon$. Pour montrer que Δ_Ω est relativement compact, il suffit de vérifier que $\Delta_\Omega \subset \Delta_\varepsilon + \varepsilon\,\bar{B}_E$. En effet,

$$\begin{aligned}
\Big\|\int_\Omega f\,d\mu - \int_{[f\in\Gamma_\delta]\,\cap\,[\|f\|\le\alpha]} f\,d\mu\Big\| &= \\
&= \Big\|\int_{[f\notin\Gamma_\delta]\,\cup\,[\|f\|>\alpha]} f\,d\mu\Big\| \\
&\le \sup_{x'\in B_{E'}}\int_{[f\notin\Gamma_\delta]\,\cup\,[\|f\|>\alpha]} |x'.f|\,d\mu \\
&\le \sup_{x'\in B_{E'}}\int_{[f\notin\Gamma_\delta]} |x'.f|\,d\mu + \sup_{x'\in B_{E'}}\int_{[\|f\|>\alpha]} |x'.f|\,d\mu \\
&= \Big\|f1_{[f\notin\Gamma_\delta]}\Big\|_{Pe} + \Big\|f1_{[\|f\|>\alpha]}\Big\|_{Pe} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Voici une variante "compacité faible" du lemme précédent.

Lemme 3.2. *Si $(f_n)_n \subset P^1_E(\mu)$ est une suite $\mathcal{R}_w(E)$-tendue et Pettis uniformément intégrable, alors pour tout $B \in \mathcal{F}^+$, la suite $\left(\int_B f_n \, d\mu\right)_n$ est relativement faiblement compacte dans E.*

Démonstration: La démonstration est identique à la précédente avec les modifications suivantes: Γ_ε est maintenant à valeurs dans $cwk(E)$ et la suite $(f_n 1_{[f_n \in \Gamma_\varepsilon]})_n$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence simple sur $L^\infty_{\mathbb{R}} \otimes E'$, d'après le théorème 1.2. En particulier la suite $(\int_\omega f_n 1_{[f_n \in \Gamma_\varepsilon]} \, d\mu)_n$ est relativement faiblement compacte dans E. On procéde pour la suite comme dans le lemme 3.1. ∎

Théorème 3.2. *Soient $f_0 \in P^1_E(\mu)$ et $(f_k)_k$ une suite dans $P^1_E(\mu)$. On suppose que*

$(f_k)_k$ est Pettis uniformément intégrable;

$(f_k)_k$ est $\mathcal{R}_k(E)$-tendue;

$(f_k)_k$ satisfait le critère séquentiel Pettis Bocce;

Pour tout $B \in \mathcal{F}^+$, $\int_B f_k \, d\mu \to \int_B f_0 \, d\mu$, faiblement dans E.

Alors $(f_k)_k$ converge vers f_0 en norme de Pettis.

Démonstration: Il suffit de montrer que les conditions du théorème entrainent la convergence en norme dans E de la suite $(\int_B f_k \, d\mu)_k$ vers $\int_B f_0 \, d\mu$, et d'appliquer le théorème 3.1. Les hypothèses (1) et (3) impliquent que l'ensemble $\delta_B = \{\int_B f_k \, d\mu, \ k \geq 1\}$ est relativement compact dans E. Comme en plus on a, $x'.(\int_B f_k \, d\mu) \to x'.(\int_B f_0 \, d\mu)$, pour tout $x' \in E'$, on en déduit que

$$\left\| \int_B f_k \, d\mu - \int_B f_0 \, d\mu \right\| \to 0 \,, \qquad \forall \, B \in \mathcal{F}^+ \ .$$

Ce qui termine la preuve. ∎

4 – Condition d'extrémalité et critère de Bocce

Théorème 4.1. *Soit $\Gamma\colon \Omega \mapsto csk(E)$ une multifonction mesurable, $(f_n)_n \subset \mathcal{S}^{Pe}_{\Gamma_\varepsilon}$ et $f \in P^1_E(\mu)$. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées:*

(i) *$(f_n)_n$ est Pettis uniformément intégrable;*

(ii) *$\{\delta^*(x', \Gamma), \ x' \in B_{E'}\}$ est uniformément intégrable;*

(**iii**) *Pour tout* $B \in \mathcal{F}$, $\int_B f_n \, d\mu \to \int_B f \, d\mu$, *faiblement;*

(**iv**) $f(\omega) \in ext(\Gamma(\omega))$ $\mu - p.p.$

Alors la suite $(f_n)_n$ *satisfait le critère séquentiel Pettis Bocce.*

Démonstration: On se ramène par translation au cas $f = 0$. Supposons par contradiction qu'il existe $B \in \mathcal{F}^+$ et une suite extraite de $(f_n)_n$ encore notée $(f_n)_n$ tels que pour tout $A \in \mathcal{F}^+(B)$,

$$(***) \qquad \liminf_n P.Bo(f_n)/_A \;=\; \varepsilon \;>\; 0 \; .$$

Pour tout $n \geq 1$, posons:

$$\Omega_n = \left\{ \omega \in \omega, \; \|f_n(\omega)\| > \frac{\varepsilon}{6} \right\} ,$$

$$g_n = f_n \, 1_{\Omega_n} \, , \qquad h_n = f_n \, 1_{\Omega_n^c} \; .$$

Comme les suites $(g_n)_n$ et $(h_n)_n$ sont dans $\mathcal{S}^{Pe}_{\Gamma_\varepsilon}$ qui est séquentiellement compact pour la topologie de la convergence simple sur $L^\infty_{\mathbb{R}} \otimes E'$, d'après ([ACV1], théorème 4.2), on peut extraire deux sous-suites, que nous continuerons encore de noter $(g_n)_n$ et $(h_n)_n$, qui convergent pour cette topologie vers $g \in \mathcal{S}^{Pe}_{\Gamma_\varepsilon}$ et $h \in \mathcal{S}^{Pe}_{\Gamma_\varepsilon}$ respectivement. On en déduit aussitôt que $g = h = 0$ $\mu - p.p$, puisque $f_n \to 0$ simplement sur $L^\infty_{\mathbb{R}} \otimes E'$ et puisque $0 \in ext(\Gamma(\omega))$ $\mu - p.p.$

Posons $\bar{\Omega} = \{\omega \in \Omega, \, \Gamma(\omega)/B(0, \frac{\varepsilon}{6}) \neq 0\}$, et soit la multifonction $\Sigma(\omega) = \bar{co}(\Gamma(\omega)/B(0, \frac{\varepsilon}{6}))$ qui est de graphe $(\bar{\Omega} \cap \mathcal{F}) \otimes \mathcal{B}_E$-mesurable, à valeurs dans $csk(E)$ et de plus $0 \notin \Sigma(\omega)$, pour tout $\omega \in \bar{\Omega}$, car $\Gamma(\omega)$ est compacte et donc $0 \in dent(\Gamma(\omega))$ $\mu - p.p.$ D'après le théorème de Hahn–Banach, la multifonction $\Phi(\omega) = \{x' \in B_{E'}, \; \delta^*(x', \Sigma(\omega)) < 0\}$, définie sur $\bar{\Omega}$, est à valeurs non vides, et comme $B_{E'}$ est compact métrisable pour la topologie de la convergence compacte et $\Sigma(\omega) \in csk(E)$, la fonction $(\omega, x') \mapsto \delta^*(x', \Sigma(\omega))$ est mesurable en ω et continue en x'. Par conséquent et en vertu de ([CV], lemme 3.14), la multifonction Φ est de graphe $(\bar{\Omega} \cap \mathcal{F}) \otimes \mathcal{B}_{B_{E'}}$-mesurable, donc admet une séléction mesurable $\sigma \colon \bar{\Omega} \mapsto B_{E'}$. Soit $(\sigma_k)_k$ une suite de fonctions simples convergente $\mu - p.p$ vers Σ sur $\bar{\Omega}$. On a donc, pour tout $\omega \in \bar{\Omega}$,

$$\lim_k \delta^*(\sigma_k(\omega), \Sigma(\omega)) \;=\; \delta^*(\sigma(\omega), \Sigma(\omega)) \;<\; 0 \; .$$

Comme par ailleurs $(f_n)_n$ est Pettis uniformément intégrable, il existe $\eta > 0$ tel que,

$$A \in \mathcal{F}, \;\; \mu(A) < \eta \quad \Longrightarrow \quad \sup_n \|f_n 1_A\|_{Pe} < \frac{\varepsilon}{6} \, \mu(B) \; .$$

D'après ([ACV1], lemme 3), il existe $a<0,\ k_0\geq 1$ tels que, pour tout $k\geq k_0$,

$$\mu\Big(\Big\{\omega\in\bar{\Omega},\ \delta^*(\sigma_k(\omega),\ \Sigma(\omega)>a\Big\}\Big)\ <\ \frac{\eta}{2}\ .$$

Fixons $k\geq k_0$ et posons $A_k=\{\omega\in\bar{\Omega},\ \delta^*(\sigma_k(\omega),\ \Sigma(\omega))\leq a\}$, alors $\mu(A_k^c\cap\bar{\Omega})<\frac{\eta}{2}$, et puisque $g_n\in\mathcal{S}_\Sigma^{Pe}$. Pour tout $\omega\in A_k$ on a alors,

$$\limsup_n \sigma_k(\omega).g_n(\omega)\ \leq\ a\ .$$

Ensuite, comme $g_n\to 0$ pour la topologie de la convergence simple sur $L^\infty_{\mathbb{R}}\otimes E'$ et σ_k étant simple, la suite $(\sigma_k.g_n)_n$ converge vers 0 pour la topologie faible $\sigma(L^1_{\mathbb{R}},L^\infty_{\mathbb{R}})$ et, grâce à ([D.M], théorème 2.26), elle converge en mesure vers 0 sur A_k. Il existe alors, un entier n_0 tel que, pour tout $n\geq n_0$,

$$\mu\Big(\Big\{\omega\in A_k,\ \sigma_k(\omega).g_n(\omega)\leq a\Big\}\Big)\ <\ \frac{\eta}{2}\ .$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\mu(\Omega_n\cap B)\ &\leq\ \mu\Big(\Big\{\omega\in\bar{\Omega}\cap B,\ g_n(\omega)\neq 0\Big\}\Big)\\ &\leq\ \mu\Big(\Big\{\omega\in A_k\cap B,\ g_n(\omega)\neq 0\Big\}\Big)+\mu(A_k^c\cap\bar{\Omega})\\ &=\ \mu\Big(\Big\{\omega\in A_k,\ \sigma_k(\omega).g_n(\omega)\leq a\Big\}\Big)+\mu(A_k^c\cap\bar{\Omega})\ .\end{aligned}$$

Il en résulte que $\mu(\Omega_n\cap B)<\eta$, pour tout $n\geq n_0$, et par $(***)$ et d'après les propriétés 2.1, on obtient

$$\begin{aligned}\varepsilon\ &=\ \liminf_n P.Bo(f_n)/_B\\ &\leq\ \liminf_n \frac{2}{\mu(B)}\sup_{x'\in B_{E'}}\int_B|x'.f_n|\,d\mu\\ &\leq\ \liminf_n \frac{2}{\mu(B)}\left[\sup_{x'\in B_{E'}}\int_{B\cap\Omega_n}|x'.f_n|\,d\mu\ +\ \sup_{x'\in B_{E'}}\int_{B\cap\Omega_n^c}|x'.f_n|\,d\mu\right]\\ &\leq\ \liminf_n \frac{2}{\mu(B)}\,\|f_n 1_{B\cap\Omega_n}\|_{Pe}\ +\ \frac{\varepsilon}{3}\ .\end{aligned}$$

On en déduit l'existence d'un entier $n_1\geq 1$ tel que, pour tout $n\geq n_1$,

$$\varepsilon\ \leq\ \frac{2}{\mu(B)}\,\|f_n 1_{B\cap\Omega_n}\|_{Pe}+\frac{2\varepsilon}{3}\ .$$

Soit $n\geq n_0,n_1$, alors

$$\mu(B\cap\Omega_n)<\eta\qquad\text{et}\qquad\|f_n 1_{B\cap\Omega_n}\|_{Pe}<\frac{\varepsilon}{6}\,\mu(B)\ .$$

Finalement on aboutit à la contradiction $\varepsilon<\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$. ∎

Remarque 4.1. Sous les hypothèses (i), (ii), (iii) et (iv) et d'après le théorème 3.2, on déduit la convergence en norme de Pettis de la suite $(f_n)_n$ vers f. Donc le théorème 3.2 contient le lemme 2.3 de [ACV2]. ▫

Le résultat suivant est une version du lemme d'Olech dans le cas Pettis où la condition d'extrémalité est remplacée par le critère Pettis Bocce.

Théorème 4.2. *Soit* $\Gamma\colon \Omega \mapsto csk(E)$ *une multifonction mesurable et soit* $(f_n)_n \subset \mathcal{S}^{Pe}_{\Gamma_\varepsilon}$ *vérifiant,*

(i) $\{\delta^*(x',\Gamma),\ x' \in B_{E'}\}$ *est uniformément intégrable;*

(ii) $(f_n)_n$ *est Pettis uniformément intégrable;*

(iii) $(f_n)_n$ *satisfait le critère séquentiel Pettis Bocce;*

(iv) $\lim_n \int_\omega f_n\, d\mu = e$, *pour la topologie faible* $\sigma(E',E)$.

Alors il existe une séléction f *de* Γ *telle que,*

$$e = \int_\omega f\, d\mu \quad \text{et} \quad \|f_n - f\|_{Pe} \to 0\ .$$

Démonstration: $(f_n)_n \subset \mathcal{S}^{Pe}_\Gamma$, donc d'après le théorème 1.2, on peut extraire une sous suite $(f_{n_k})_k$, de $(f_n)_n$, qui converge vers un élément f de $\mathcal{S}^{Pe}_\Gamma$ pour la topologie de la convergence simple sur $L^\infty_{\mathbb{R}} \otimes E'$.

Par (i), il suit que $e = \int_\Omega f\, d\mu$. La suite $(f_{n_k})_k$ est aussi Pettis uniformément intégrable et satisfait le critère séquentiel Pettis Bocce, donc en appellant le théorème 3.4, elle converge vers f en norme de Pettis. D'après ce qui vient d'être établi, toute sous suite de $(f_n)_n$ admet une sous suite qui converge en norme de Pettis vers f, alors on peut conclure que

$$\|f_n - f\|_{Pe} \to 0\ . \blacksquare$$

Cette version du lemme d'Olech n'assure pas l'unicité de la séléction comme le fait la version avec la condition d'extrémalité ([ACV2], théorème 2.4).

REFERENCES

[AC] Amrani, A. and Castaing, C. – Weak compactness in Pettis integration, *Bull. of Pol. Acad. of Science,* 44(2) (1997), 139–150.

[ACV1] Amrani, A.; Castaing, C. and Valadier, M. – Méthodes de troncatures appliquées à des problèmes de convergence faible où forte dans L^1, *Arch. Rational Mech. Anal.,* 117 (1991), 147–156.

[ACV2] Amrani, A.; Castaing, C. and Valadier, M. – *Convergence in Pettis norm under extreme point condition*, preprint, 1997.

[BGJ] Balder, E.; Girardi, M. and Jalby, V. – From weak to strong types of L^1_E-convergence by the Bocce criterion, *Studia Mathematica,* 111(3) (1994), 241–261.

[Ba] Balder, E. – *From weak to strong types of L^1_E-convergence by BMO type*, Preprint, 1991.

[Bn] Benabdellah, H. – Extrémalité, stricte convexité et convergence dans L^1_E, *Sémi. d'Anal. Convexe, 1991.*

[Ca1] Castaing, C. – *Weak compactness criteria in Set-valued integration*, Preprint 1995/03, Université Montpellier II, 1995.

[Ca2] Castaing, C. – Weak compactness and convergence in Bochner and Pettis integration, *Vietnam Journal of Math.,* 24(3) (1996), 241–286.

[CV] Castaing, C. and Valadier, M. – *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lectures Notes in Math., 580, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[He] Hess, C. – Mesurability and integrability for the upper limit of a sequence of multifunctions, *J. of Math. Anal. and Appl.,* 153 (1990).

[Mu] Musial, K. – Topics in the theory of Pettis integration, *Rendiconti Inst. Mat. Univer. Trieste,* XXIII (1991), 177–262.

[Va] Valadier, M. – Différents cas où grâce à une propriété d'extrémalité, une suite de fonctions intégrables faiblement convergente, converge faiblement, *Sémi. d'Anal. Convexe Montpellier Exposé* (1989).

[Vi] Visintin, A. – Strong convergence results related to strict convexity, *Comm. Partial. Differ. Equat.,* 9 (1984), 439–466.

A. Amrani, A. Bourass and K. Elamri,
Departement de Mathématiques, Faculté des Sciences,
Université Mohamed V, BP 1014, Rabat – MAROC