Revista Colombiana de Estadística
Volumen 26 N° 2. Págs. 181 *a* 187. Diciembre 2003

Ubicación óptima de reservas activas en un sistema serie

José E. Valdés Castro*
Jairo A. Villegas Gutiérrez**

Resumen

La redundancia activa de componentes es una de las vías para aumentar la confiabilidad de los sistemas. Recientemente han adquirido gran importancia en la comparación de los tiempos de vida de los sistemas diversos conceptos de orden estocástico, los cuales permiten determinar configuraciones óptimas de los sistemas con componentes redundantes. En el trabajo se consideran sistemas serie con reservas activas y se investigan condiciones suficientes para la optimización de estos sistemas.

Palabras clave: *Confiabilidad, redundancia activa, órdenes estocásticos.*

1. Introducción

Una de las vías para aumentar la confiabilidad de los sistemas es el uso de componentes redundantes. Existen dos tipos de redundancia (reserva), una de ellas es la llamada *reserva activa o paralelo*, la cual conduce a la consideración del máximo de variables aleatorias, y la otra llamada *reserva pasiva*, la cual conduce a la consideración de sumas de variables aleatorias. El problema de dónde ubicar las reservas activas en un sistema con el objetivo de obtener una configuración óptima ha sido estudiado utilizando diversos órdenes estocásticos; veánse, por ejemplo, Belzunce, Franco, Ruiz & Ruiz (2002), Boland, El-Neweihi & Proschan (1992), Boland, El-Neweihi & Proschan (1994), Mi (1999), Singh & Misra (1994), Singh & Singh (1997). Una referencia amplia acerca de diferentes

*Universidad de La Habana. vcastro@matcom.uh.cu
**Universidad Eafit. Correspondencia: A.A. 3300 Medellín, Colombia. javille@eafit.edu.co

órdenes estocásticos y sus aplicaciones es Shaked & Shanthikumar (1994), Ross (1996).

Recordemos la definición de los tres órdenes estocásticos que serán utilizados en este trabajo.

Sean X y Y dos variables aleatorias. Se dice que X es mayor que Y según el *orden estocástico usual*, lo cual se denota $X \geq_{st} Y$, si

$$P(X > t) \geq P(Y > t), \quad -\infty < t < \infty. \tag{1}$$

Por otra parte, X es mayor que Y según el *orden probabilístico*, lo cual se denota $X \geq_{pr} Y$, si

$$P(X > Y) \geq P(Y > X). \tag{2}$$

Obsérvese que a diferencia del orden estocástico, el orden probabilístico tiene en cuenta la distribución conjunta de las variables aleatorias que se comparan, y por esta razón (1) puede no siempre implicar (2).

En este trabajo asumiremos que toda función de distribución $H(t)$ correspondiente a una variable aleatoria cumple las condiciones $H(0) = 0$ y $H(t) < 1$, para $t > 0$. Supondremos además que existe la densidad de probabilidad de cada variable aleatoria. Dada una función de distribución H usaremos la notación $\overline{H} = 1 - H$.

Recordemos que la *tasa de fallo* correspondiente a una variable aleatoria con función de distribución $H(t)$ se define por la expresión $\frac{h(t)}{\overline{H}(t)}$, donde $h(t)$ denota su densidad de probabilidad.

Sean $r_1(t)$ y $r_2(t)$ las tasas de fallo correspondientes a las variables aleatorias X y Y. Se dice que X es mayor que Y según el *orden de la tasa de fallo*, lo cual se denota $X \geq_{fr} Y$, si

$$r_1(t) \leq r_2(t), \quad t \geq 0. \tag{3}$$

Es conocido que si $X \geq_{fr} Y$ entonces $X \geq_{st} Y$.

Sean X_1, X_2 y X variables aleatorias independientes que representan los tiempos de vida de los componentes C_1, C_2 y R, respectivamente. Supongamos que los componentes C_1 y C_2 forman un sistema serie, y que el componente R puede ser usado como reserva activa con uno de estos componentes. Denotemos *máx* y *mín* por los símbolos $\vee$ y $\wedge$, respectivamente. Entonces las variables aleatorias

$$U_1 = \wedge\big(\vee(X_1, X), X_2\big) \quad \text{y} \quad U_2 = \wedge\big(X_1, \vee(X_2, X)\big),$$

representan los tiempos de vida de los dos sistemas que se obtienen al ubicar el componente R como reserva activa con C_1 y C_2, respectivamente. En Boland et al. (1992) se demuestra que

$$U_1 \geq_{st} U_2 \quad \text{si, y sólo si} \quad X_2 \geq_{st} X_1. \tag{4}$$

Singh & Misra (1994) demuestran que la condición $X_2 \geq_{st} X_1$ es también suficiente para que tenga lugar la desigualdad

$$U_1 \geq_{pr} U_2. \tag{5}$$

Sean $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ y $\lambda(t)$ las tasas de fallo correspondientes a los tiempos de vida X_1, X_2 y X, respectivamente. Singh y Misra Singh & Misra (1994) prueban además que cuando estas variables tienen distribución exponencial la condición $\lambda_1 \geq \text{máx}(\lambda_2, \lambda)$ es suficiente para que se cumpla la relación

$$U_1 \geq_{fr} U_2. \tag{6}$$

Estos resultados significan que la mayor confiabilidad del sistema, en el sentido del orden estocástico correspondiente, se obtiene colocando la reserva como redundancia del componente de menor confiabilidad (más débil). En algunos casos es más realista considerar que el componente de reserva depende del componente del sistema serie con el cual se colocaría como reserva. Es decir, se tienen dos posibles componentes de reserva por ubicar, R_1 y R_2, asignados respectivamente a los componentes C_1 y C_2, pero sólo uno será colocado como reserva.

En la sección 2 de este trabajo se obtienen condiciones suficientes para la selección óptima, según el orden probabilístico, del componente de reserva por ubicar. En la sección 3 se considera que serán colocados dos componentes de reserva, pero sólo uno con cada componente del sistema serie. Se obtienen condiciones suficientes para la ubicación óptima de las reservas según el orden probabilístico.

2. Selección óptima de una reserva en un sistema serie

Sean las variables aleatorias independientes X_1, X_2, Y_1 y Y_2 los tiempos de vida correspondientes a los componentes del sistema serie C_1 y C_2, y a las reservas R_1 y R_2, respectivamente. Denotemos las funciones de distribución respectivas por $F_1(t)$, $F_2(t)$, $G_1(t)$ y $G_2(t)$, sus correspondientes densidades de probabilidad por $f_1(t)$, $f_2(t)$, $g_1(t)$ y $g_2(t)$ y las tasas de fallo respectivas por $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\mu_1(t)$ y $\mu_2(t)$.

Denotemos ahora

$$\begin{aligned} U_1 &= \wedge\Big(\vee(X_1, Y_1), X_2\Big), \\ U_2 &= \wedge\Big(X_1, \vee(X_2, Y_2)\Big). \end{aligned}$$

Proposición 2.1. Sean

$$X_2 \geq_{st} X_1 \quad \text{y} \quad \overline{F}_2(x)\overline{G}_1(x) \geq \overline{F}_1(x)\overline{G}_2(x), \quad x \geq 0, \tag{7}$$

entonces

$$U_1 \geq_{pr} U_2. \tag{8}$$

Demostración. Es fácil comprobar la equivalencia entre las desigualdades $U_1 > U_2$ y $X_1 < \wedge(X_2, Y_1)$. Luego la desigualdad (8) es equivalente a

$$P\big(X_1 < \wedge(X_2, Y_1)\big) \geq P\big(X_2 < \wedge(X_1, Y_2)\big).$$

Sea

$$\begin{aligned} \Delta &= P\big(X_1 < \wedge(X_2, Y_1)\big) - P\big(X_2 < \wedge(X_1, Y_2)\big) \\ &= \int_0^\infty \overline{F}_2(x)\overline{G}_1(x)dF_1(x) - \int_0^\infty \overline{F}_1(x)\overline{G}_2(x)dF_2(x). \end{aligned}$$

De (7) se obtiene

$$\Delta \geq \int_0^\infty \overline{F}_1(x)\overline{G}_2(x)dF_1(x) - \int_0^\infty \overline{F}_1(x)\overline{G}_2(x)dF_2(x) \geq 0,$$

puesto que $\overline{F}_1(x)\overline{G}_2(x)$ es una función no creciente y $F_1(x) \geq F_2(x)$ Shaked & Shanthikumar (1994) y con ello queda probada la proposición.

Observación 2.1. De la proposición 2.1 obtenemos que si $Y_1 =_{st} Y_2$, ó $Y_1 =_{st} X_1$ y $Y_2 =_{st} X_2$, la condición $X_2 \geq_{st} X_1$ es suficiente para $U_1 \geq_{pr} U_2$.

Observación 2.2. La condición suficiente de la proposición (2.1) se satisface cuando

a) $X_2 \geq_{st} X_1$ y $Y_1 \geq_{st} Y_2$, y también cuando

b) $X_2 \geq_{st} Y_2 \geq_{st} Y_1 \geq_{st} X_1$.

Las condiciones a) y b) se interpretan en la práctica de la siguiente manera. En el sentido del orden estocástico usual, bajo la condición a) la reserva más fuerte debe ubicarse con el componente más débil del sistema serie; sin embargo, bajo la condición b) es la reserva más débil la que debe ubicarse con el componente más débil.

Ejemplo 2.1. Si X_1, X_2, Y_1 y Y_2 tienen distribución exponencial con medias $\frac{1}{\lambda_1}$, $\frac{1}{\lambda_2}$, $\frac{1}{\mu_1}$ y $\frac{1}{\mu_2}$, respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}
P(U_1 > U_2) = P\big(X_1 < \wedge(X_2, Y_1)\big) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1}, \\
P(U_2 > U_1) = P\big(X_2 < \wedge(X_1, Y_2)\big) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2}, \\
P(U_1 = U_2) = 1 - P(U_1 > U_2) - P(U_2 > U_1) &= \\
&= \frac{\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \mu_1\mu_2}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)}.
\end{aligned}$$

El ejemplo anterior muestra que la condición $X_2 \geq_{st} X_1$ no es necesaria para que se cumpla el orden $U_1 \geq_{pr} U_2$. Esta última relación puede cumplirse aún cuando $\lambda_2 > \lambda_1$, seleccionando valores apropiados de μ_1 y μ_2.

3. Ubicación óptima de dos reservas en un sistema serie

Consideremos ahora que es posible ubicar dos reservas activas. Denotemos

$$\begin{aligned}
V_1 &= \wedge\big(\vee(X_1, Y_2), \vee(X_2, Y_1)\big), \\
V_2 &= \wedge\big(\vee(X_1, Y_1), \vee(X_2, Y_2)\big).
\end{aligned}$$

Proposición 3.1. Sean

$$X_2 \geq_{fr} X_1 \quad \text{y} \quad Y_2 \leq_{fr} Y_1, \tag{9}$$

entonces

$$V_1 \geq_{pr} V_2. \tag{10}$$

Demostración. No es difícil comprobar que la desigualdad $V_1 > V_2$ se satisface si y sólo si se satisface una de las siguientes dos desigualdades excluyentes $\vee(X_1, Y_1) < \wedge(X_2, Y_2)$, $\vee(X_2, Y_2) < \wedge(X_1, Y_1)$. Entonces la relación (10) es equivalente a

$$P\big(\wedge(X_2, Y_2) > \vee(X_1, Y_1)\big) + P\big(\wedge(X_1, Y_1) > \vee(X_2, Y_2)\big) \geq$$

$$\geq P\big(\wedge(X_2, Y_1) > \vee(X_1, Y_2)\big) + P\big(\wedge(X_1, Y_2) > \vee(X_2, Y_1)\big).$$

Luego es suficiente probar que

$$\begin{aligned}\Delta = {} & P\big(\wedge(X_2, Y_2) > \vee(X_1, Y_1)\big) + P\big(\wedge(X_1, Y_1) > \vee(X_2, Y_2)\big) - \\ & - P\big(\wedge(X_2, Y_1) > \vee(X_1, Y_2)\big) - P\big(\wedge(X_1, Y_2) > \vee(X_2, Y_1)\big) \geq 0.\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}\Delta = {} & \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_2\big(\vee(x,y)\big)\overline{G}_2\big(\vee(x,y)\big) dG_1(x) dF_1(y) + \\ + & \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_1\big(\vee(x,y)\big)\overline{G}_1\big(\vee(x,y)\big) dG_2(x) dF_2(y) - \\ - & \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_2\big(\vee(x,y)\big)\overline{G}_1\big(\vee(x,y)\big) dG_2(x) dF_1(y) - \\ - & \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{F}_1\big(\vee(x,y)\big)\overline{G}_2\big(\vee(x,y)\big) dG_1(x) dF_2(y).\end{aligned}$$

Una condición suficiente para $\Delta \geq 0$ es

$$\begin{aligned}& \overline{F}_2\big(\vee(x,y)\big)\overline{G}_2\big(\vee(x,y)\big) g_1(x) f_1(y) + \overline{F}_1\big(\vee(x,y)\big)\overline{G}_1\big(\vee(x,y)\big) g_2(x) f_2(y) \geq \\ \geq & \overline{F}_2\big(\vee(x,y)\big)\overline{G}_1\big(\vee(x,y)\big) g_2(x) f_1(y) + \overline{F}_1\big(\vee(x,y)\big)\overline{G}_2\big(\vee(x,y)\big) g_1(x) f_2(y),\end{aligned}$$

la cual puede escribirse como

$$\begin{aligned}& g_1(x)\overline{G}_2\big(\vee(x,y)\big)\big[f_1(y)\overline{F}_2\big(\vee(x,y)\big) - f_2(y)\overline{F}_1\big(\vee(x,y)\big)\big] \geq \\ \geq \ & g_2(x)\overline{G}_1\big(\vee(x,y)\big)\big[f_1(y)\overline{F}_2\big(\vee(x,y)\big) - f_2(y)\overline{F}_1\big(\vee(x,y)\big)\big]. \qquad (11)\end{aligned}$$

Obsérvese ahora que si $a \geq b \geq 0$, entonces

$$f_1(b)\overline{F}_2(a) - f_2(b)\overline{F}_1(a) \geq 0,$$

puesto que de $X_2 \geq_{hr} X_1$ se obtiene

$$f_1(b) \geq f_2(b)\frac{\overline{F}_1(b)}{\overline{F}_2(b)} \geq f_2(b)\frac{\overline{F}_1(a)}{\overline{F}_2(a)}.$$

De manera similar, de $Y_2 \geq_{hr} Y_1$ se tiene

$$g_1(b)\overline{G}_2(a) - g_2(b)\overline{G}_1(a) \geq 0,$$

entonces (11) se cumple y la proposición queda demostrada.

La proposición 3.1 significa en la práctica que la ubicación óptima de las dos reservas, según el orden probabilístico, se obtiene ubicando la reserva más fuerte con el componente más débil y la reserva más débil con el componente más fuerte en el sentido del orden de la tasa de fallo.

Bibliografía

Belzunce, F., Franco, M., Ruiz, J. M. & Ruiz, M. L. (2002), 'On partial ordering between coherent systems with different structures', *Probability in the Engineering and Informational Sciences* **15**, 273–293.

Boland, P. J., El-Neweihi, E. & Proschan, F. (1992), 'Stochastic order for redundancy alloca-tions in series and parallel systems', *Adv. Appl.Prob* **24**, 161–171.

Boland, P. J., El-Neweihi, E. & Proschan, F. (1994), 'Applications of the hazard rate ordering in reliability and order statistics', *J. Appl. Prob* **31**, 180–192.

Mi, J. (1999), 'Optimal active redundancy allocations in k-out of-n systems', *J. Appl. Prob* **36**, 927–933.

Ross, S. M. (1996), *Stochastic Processes*, second edn, John Willy & Sons, Inc.

Shaked, M. & Shanthikumar, J. (1994), *Stochastic Orders and Their Applications*, Academic Press, Inc.

Singh, H. & Misra, N. (1994), 'On redundancy allocations in systems', *J.Appl. Prob* **31**, 1004– 1014.

Singh, H. & Singh, R. S. (1997), 'Note: Optimal allocation of resources to nodes of series systems with respect to failure rate ordering', *Naval Research Logistics* **44**, 147– 152.