Revista Colombiana de Estadística
Volumen 30 No. 1. pp. 13 a 36. Junio 2007

Sobre la construcción del mejor predictor lineal insesgado (BLUP) y restricciones asociadas

About the Best Linear Unbiased Predictor (BLUP) and Associated Restrictions

Luis Alberto López[1,a], Diana Carolina Franco[2,b], Sandra Patricia Barreto[3,c]

[1]Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Estadística, Bogotá
[2]Universidad de la Sabana, Bogotá, Colombia
[3]Titularizadora Colombiana S. A., Bogotá, Colombia

Resumen

A través del modelo lineal clásico de Gauss-Markov, se caracteriza el modelo de efectos mixtos, se aplica la técnica de multiplicadores de Lagrange para obtener los mejores predictores lineales (BLUP) y se ilustran los resultados de Searle (1997), donde se encuentra que las sumas de los BLUP, cuando se evalúan sobre los efectos aleatorios (exceptuando las interacciones provenientes únicamente de efectos aleatorios), son iguales a cero, encontrándose con esto una analogía entre la reparametrización Σ-restricción que se hace sobre los modelos de efectos fijos y la forma general de la restricción que se hace sobre los modelos de efectos mixtos. Se lleva a cabo una ilustración en modelos cruzados con los resultados expuestos en Gaona (2000), donde se evaluó la ganancia de peso en novillos de ganado criollo sanmartiniano; adicionalmente para modelos jerárquicos se ilustra con los resultados presentados en Harville & Fenech (1985), correspondientes a mediciones de las ganancias en peso de un grupo de ovejos machos.

Se observa de los resultados que en el modelo usual de análisis de varianza para modelos mixtos, ciertas sumas de los predictores lineales insesgados (BLUP), asociados a los efectos aleatorios, son iguales a cero si se tiene un modelo con una sola variable respuesta. Sin embargo, esta propiedad se pierde cuando se tienen evaluaciones diferentes en la misma unidad experimental, las cuales van a estar correlacionadas. Un caso diferente resulta en estudios longitudinales como se muestra empíricamente en la sección 5.3.

***Palabras clave*:** modelos de efectos mixtos, multiplicadores de Lagrange, diseño cruzado, modelos lineales jerárquicos.

[a]Profesor asociado. E-mail: lalopezp@unal.edu.co
[b]Profesora. E-mail: sotica82@yahoo.es
[c]Asesora estadística. E-mail: pbarretos@unal.edu.co

Abstract

The mixed linear model is characterized using the classic linear model of Gauss-Markov. The multipliers of Lagrange are a tool to obtain the best lineal predictors (BLUP), we shown the results of Searle (1997), where some sums of the best linear unbiased predictors of random effects are zero. This characteristic is similar with the reparametrization Σ-restriction in the fixed linear models. We present an illustration based on results of Gaona (2000) in crossed classification with the data measured in young bulls sanmartiniano, and other example in hierarchical models with the results presented in Harville & Fenech (1985) corresponding to mensurations of weight of a group of male sheep. In the usual model of analysis of variance for mixed models, some sums of the unbiased lineal predictors (BLUP) associated to random effects are zero when the model has a single variable answer, however, this property does not work in cases in which there are different evaluations in the same experimental unit, which will be correlated.

***Key words*:** Mixed linear models, Lagrange multiplier, Crossed design, Hierarchical linear models.

1. Introducción

Los modelos de efectos mixtos fueron ampliamente estudiados por Fisher hacia 1918, quien los denominó modelos de componentes de varianza. Estos modelos fueron de gran utilidad en los estudios de genética cuantitativa y mejoramiento animal; sin embargo, su aplicación en diferentes campos de la investigación científica se ha venido generalizando en las últimas décadas, en las cuales se han implementado nuevos desarrollos metodológicos que han contribuido a su estudio y aplicación.

En los estudios de modelos mixtos es fundamental que se tengan en cuenta los siguientes aspectos:

1. Estimación de efectos fijos.
2. Estimación de efectos aleatorios.
3. Estimación de los predictores lineales.

Este último aspecto no ha sido ampliamente difundido a pesar de que tiene diversas aplicaciones, principalmente en mejoramiento animal y programas de inseminación artificial, cuando se desean evaluar los méritos genéticos de los reproductores.

Según Hartley & Rao (1967) y Barroso & Bussab (1998), el modelo mixto puede ser escrito en forma general como:

$$y = X\beta + Z_1U_1 + Z_2U_2 + \cdots + Z_cU_c + e \qquad (1)$$

donde:

- y es el vector de observaciones de orden $n \times 1$,

- X una matriz conocida de tamaño $n \times p$,
- β un vector de constantes desconocidas de dimensión $p \times 1$,
- Z_i una matriz conocida de tamaño $n \times q_i$, con $i = 1, 2, \dots, c$,
- U_i un vector de variables aleatorias de dimensión $q_i \times 1$, y
- e un vector de variables aleatorias de orden $n \times 1$.

Para el modelo (1) se asume que $U_1, U_2, \dots, U_c$ se distribuyen de manera independiente e idénticamente como:

$$U_i \sim N(0; \sigma_i^2\ Iq_i) \tag{2}$$

$$e \sim N(0; R\sigma_0^2) \tag{3}$$

donde:

- $Z_i Z_i^t$ y R son matrices que se asumen conocidas, y
- $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_c^2$ son constantes desconocidas no negativas a las cuales se les conoce como los componentes de varianza.

2. Notación

El modelo (1) se puede escribir en forma matricial como:

$$y_{(n\times1)} = X_{(n\times p)}\beta_{(p\times1)} + Z_{(n\times q)}U_{(q\times1)} + e_{(n\times1)} \tag{4}$$

donde:

- $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_c)$; Z_i será una matriz conocida de tamaño $n \times q_i$ para $i = 1, 2, \dots, c$,
- $U = (U_1^t, U_2^t, \dots, U_c^t)^t$ un vector no observable de variables aleatorias desconocidas de dimensión $q \times 1$, con $q = \sum_{i=1}^c q_i$.

En el modelo (4) se asume que si $U_0 = e$, entonces $U = (U_0^t, U_1^t, \dots, U_c^t)^t$ y además se satisface:

i) $E(U_i) = 0$

ii) $Cov(U_i, U_{i'}) = \begin{cases} \sigma_i^2 I_{q_i}, & \text{si } i = i'; \\ 0, & \text{si } i \neq i'. \end{cases}$

Para $i, i' = 0, 1, \dots, t$.

$$\begin{aligned} Var(y) &= Var(X\beta + ZU + e) \\ &= ZVar(U)Z^t + Var(e) + ZCov(U, e) = ZDZ^t + R \end{aligned} \tag{5}$$

donde:

- $D = \oplus_{i=1}^{c}\sigma_i^2 I_{q_i}$, con $\oplus$ el operador que representa la suma directa de matrices,
- $R = \sigma_0^2 I_N$.

iii) De esta forma (5) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} Var(y) &= Z(\oplus_{i=1}^{c}\sigma_i^2 I_{q_i})Z^t + R \\ &= \sum_{i=1}^{c} Z_i Z_i^t \sigma_i^2 + R \\ &= V \end{aligned} \tag{6}$$

iv)

$$\begin{aligned} Cov(y, U^t) &= E[(y - E(y))(U - E(U))^t] \\ &= ZD = C \end{aligned} \tag{7}$$

3. Sobre la obtención del mejor predictor lineal insesgado BLUP

Cuando en el modelo (1) se tiene interés en la estimación de funciones lineales de la forma $K^t\beta + M^tU$ a través de una función lineal de las observaciones L^ty, conocida como el predictor lineal, se busca que la varianza del error de predicción sea mínima. La estimación de esta función se obtiene asumiendo inicialmente que $K^t\beta$ va a ser una función lineal paramétrica estimable. Para obtener estas estimaciones existen diferentes métodos, como se puede ver en Henderson (1982).

Al minimizar la varianza del error de predicción se tiene:

$$\begin{aligned} &\min_{\beta,U}\left[Var(K^t\beta + M^tU - L^ty)\right] = \\ &\quad \min_{\beta,U}\left[Var(M^tU) + Var(L^ty) - Cov(M^tU, L^ty) - Cov(L^ty, M^tU)\right] = \\ &\qquad\qquad \min_{\beta,U}\left[M^tDM + L^tVL - M^tDZ^tL^t - L^tZDM\right] \end{aligned} \tag{8}$$

Si el predictor es insesgado, se satisface que:

$$E[K^t\hat{\beta} + M^t\tilde{U}] = K^t\beta$$

y

$$E[L^ty] = L^tE[y] = L^tX\beta$$

igualando los valores esperados se tiene que:

$$L^tX\beta = K^t\beta$$

siempre que $L^tX - K^t = 0$.

Se busca entonces minimizar la varianza del error del predictor sujeta a la restricción $L^tX - K^t = 0$, lo cual en el presente trabajo se hace a través de la minimización de una función de Lagrange. Los resultados que se muestran al minimizar esta ecuación se obtienen siguiendo a Henderson (1982, 1984).

$$F = M^tDM + L^tVL - 2L^tZDM + \lambda^t(X^tL - K)$$

En la función anterior, al derivar e igualar a cero, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial F}{\partial L^t} = 2VL - 2ZDM + \lambda X = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda^t} = X^tL - K = 0$$

matricialmente:

$$\begin{bmatrix} V & X \\ X^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ \frac{1}{2}\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ZDM \\ K \end{bmatrix} \tag{9}$$

con $V = ZDZ^t + R$ y haciendo $\theta = \frac{1}{2}\lambda$, el sistema (9) es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} ZDZ^t + R & X \\ X^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ZDM \\ K \end{bmatrix} \tag{10}$$

operando con la primera ecuación se tiene:

$$(ZDZ^t + R)L + X\theta = ZDM$$

entonces,

$$ZDZ^tL + RL + X\theta - ZDM = 0$$
$$RL + ZD[Z^tL - M] + X\theta = 0$$

finalmente,

$$RL + ZS + X\theta = 0 \tag{11}$$

con $S = D[Z^tL - M]$ y como D es no singular, entonces se satisface que:

$$D^{-1}S = Z^tL - M$$

de lo anterior se tiene que:

$$M = Z^tL - D^{-1}S \tag{12}$$

Teniendo en cuenta (9), (11) y (12), entonces:

$$\begin{bmatrix} R & Z & X \\ Z^t & -D^{-1} & 0 \\ X^t & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ S \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M \\ K \end{bmatrix}$$

De (11) se sigue que:

$$RL = -(ZS + X\theta)$$

Además, por ser R una matriz no singular, entonces se tiene que:

$$L = -R^{-1}(ZS + X\theta) \tag{13}$$

Si ahora se reemplaza (13) en (12), se tiene que:

$$\begin{aligned} M &= Z^t[-R^{-1}(ZS + X\theta)] - D^{-1}S \\ M &= -[Z^tR^{-1}ZS + Z^tR^{-1}X\theta + D^{-1}S] \\ M &= -[(Z^tR^{-1}Z + D^{-1})S + Z^tR^{-1}X\theta] \end{aligned}$$

reemplazando L obtenido en (13) con la condición $X^tL = K$, se tiene el sistema:

$$\begin{bmatrix} \underbrace{Z^tR^{-1}Z + D^{-1}}_{c_{11}} & \underbrace{Z^tR^{-1}X}_{c_{12}} \\ \underbrace{X^tR^{-1}Z}_{c_{21}} & \underbrace{X^tR^{-1}X}_{c_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M \\ -K \end{bmatrix}$$

La solución al sistema anterior está dada por:

$$\begin{bmatrix} S \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -M \\ -K \end{bmatrix}$$

de (11) se tiene que:

$$RL = -ZS - X\theta \tag{14}$$

$$RL = -\begin{bmatrix} Z & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -M \\ -K \end{bmatrix}$$

$$L = R^{-1}\begin{bmatrix} Z & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M \\ K \end{bmatrix}$$

De esta forma se obtiene finalmente la función lineal de predicción, la cual está dada por:

$$L^ty = \begin{bmatrix} M^t & K^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z^t \\ X^t \end{bmatrix} R^{-1}y \tag{15}$$

o de otra manera:

$$L^ty = \begin{bmatrix} M^t & K^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix}$$

$$L^ty = M^t\tilde{U} + K^t\hat{\beta} \tag{16}$$

Las estimaciones para los vectores U y β se obtienen a partir de la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} X^tR^{-1}X & X^tR^{-1}Z \\ Z^tR^{-1}X & Z^tR^{-1}Z + D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \tilde{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^tR^{-1}y \\ Z^tR^{-1}y \end{bmatrix} \tag{17}$$

conocidas como las soluciones de las ecuaciones normales de Henderson, según Searle (1987) y McCulloch & Searle (2001). Estas ecuaciones proveen los mejores predictores lineales insesgados (BLUP).

Del sistema de ecuaciones (17), se encuentran las soluciones explícitas para $\tilde{U}$ y $\hat{\beta}$. Desarrollando la segunda de estas ecuaciones se tiene:

$$Z^tR^{-1}X\hat{\beta} + [Z^tR^{-1}Z + D^{-1}]\tilde{U} = Z^tR^{-1}y$$

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= [Z^tR^{-1}Z + D^{-1}]^{-1}[Z^tR^{-1}y - Z^tR^{-1}X\hat{\beta}]\\ \tilde{U} &= [Z^tR^{-1}Z + D^{-1}]^{-1}Z^tR^{-1}(y - X\hat{\beta})\end{aligned} \tag{18}$$

reemplazando este resultado en la primera ecuación de (17) se tiene:

$$X^tR^{-1}X\hat{\beta} + X^tR^{-1}Z[Z^tR^{-1}Z + D^{-1}]^{-1}Z^tR^{-1}(Y - X\hat{\beta}) = X^tR^{-1}y$$

reagrupando términos en la ecuación anterior, se tiene:

$$X^tBX\hat{\beta} = X^tBy$$

donde:

$$B = R^{-1} - R^{-1}Z[Z^tR^{-1}Z + D^{-1}]^{-1}Z^tR^{-1}$$

y

$$V^{-1} = [ZDZ^t + R]^{-1}$$

utilizando el complemento de Schurb, puede ser escrito como:

$$R^{-1} - R^{-1}Z[Z^tR^{-1}Z + D^{-1}]^{-1}Z^tR^{-1}$$

de aquí,

$$B = V^{-1}$$

y

$$X^tV^{-1}X\hat{\beta} = X^tV^{-1}y$$

que es la ecuación de mínimos cuadrados generalizados para β.

Por otro lado, $\tilde{U}$ es el BLUP(U) y usando la identidad:

$$[D^{-1} + Z^tR^{-1}Z]^{-1}Z^tR^{-1} = DZ^tV^{-1}$$

entonces:

$$\text{BLUP}(U) = \tilde{U} = DZ^tV^{-1}[y - X\hat{\beta}]$$

con:

$$\hat{\beta} = [X^tV^{-1}X]^{-}X^tV^{-1}y$$

o de otra manera (*ver* Henderson (1984) y Searle (1987)):

$$\text{BLUP}(U) = \tilde{U} = DZ^tPy \tag{19}$$

A $\tilde{U}$ se le conoce como el mejor predictor para U, con $D = Var(U)$, Z, X y y como se definieron al principio de esta sección; además:

$$P = V^{-1} - V^{-1}X(X^tV^{-1}X)^{-}X^tV^{-1}$$

puesto que:

$$PX = 0$$

siendo

$$V = Var(y) = ZDZ^t + R$$

como se definió en la sección anterior.

4. Una restricción general sobre el BLUP($\boldsymbol{U}$)

En Searle (1997) se presenta una forma general de la restricción que proviene del hecho $PX = 0$. En un artículo de referencia se demuestra que esto se obtiene siempre y cuando existan unos vectores λ y τ, tales que:

$$ZD\lambda = X\tau$$

Entonces, una restricción sobre los $\tilde{U}$ está dada por (*ver* Henderson (1984) y Searle (1987)):

$$\lambda^t\tilde{U} = \lambda^t DZ^tP^ty = (PX\tau)^ty = 0 \tag{20}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
\lambda^t\tilde{U} &= \lambda^t[DZ^tV^{-1}(y - X\hat{\beta})] \\
&= \lambda^t DZ^tV^{-1}(y - X(X^tV^{-1}X)^{-}X^tV^{-1}X^ty) \\
&= \lambda^t DZ^tV^{-1}y - \lambda^t DZ^tV^{-1}X(X^tV^{-1}X)^{-}X^tV^{-1}X^ty \\
&= (X\tau)^t[V^{-1} - X(X^tV^{-1}X)^{-}X^tV^{-1}X^t]y \\
&= (X\tau)^tP^ty \\
&= (PX\tau)^ty = 0
\end{aligned}$$

de donde: $\lambda^t\tilde{U} = 0$, lo cual se satisface en los modelos de efectos mixtos jerárquicos o cruzados con estructura balanceada o desbalanceada y en presencia de celdas vacías, pero no en modelos mixtos en los cuales están involucrados datos de tipo longitudinal, como se muestra empíricamente en la sección 5.3.

En Searle (1997) se demuestra que los resultados numéricos visualizados por McLean et al. (1991) son evidentemente ciertos en datos no correlacionados.

5. Ilustración de los resultados

En esta sección se lleva a cabo una ilustración de los resultados expuestos previamente, la cual se hace con dos ejemplos numéricos aplicados a problemas reales de mejoramiento animal.

5.1. Aplicación con un modelo de efectos cruzados

En este caso se considera la información presentada en Gaona (2000), la cual fue recopilada entre 1990 y 1996 en el marco del Proyecto de Evaluación Genética bajo el plan de Modernización de la Ganadería y contiene registros del peso al nacimiento de ganado criollo sanmartiniano, el sexo de la cría (hembra o macho), un intervalo del número de partos de la madre de la cría, la época de nacimiento del animal (invierno o verano), la edad del animal y el código del padre de la cría.

De acuerdo con las variables citadas, el modelo de interés tiene la siguiente estructura:

$$y_{ijkln} = \mu + \alpha_i + \beta_j + c_k + \gamma_l + \alpha\gamma_{il} + \alpha\beta_{jl} + c\gamma_{kl} + e_{ijkln}$$

donde:

- $y_{(207\times 1)}$ es el vector que tiene información referente a los pesos al nacimiento de la cría,
- μ es la media general,
- α_i representa el efecto del i-ésimo sexo,
- β_j representa el efecto de la j-ésima época,
- c_k representa el efecto del k-ésimo número de partos,
- γ_l es el efecto del l-ésimo padre,
- e_{ijkln} es la componente aleatoria de error.

De esta manera, los factores sexo, época y número de partos corresponden a efectos fijos y el factor padre es aleatorio con media cero y varianza dada por σ^2_γ. Es claro que las interacciones de los efectos fijos con el factor padre van a ser aleatorias.

En términos matriciales, el modelo anterior puede ser escrito como:

$$y = 1\mu + X_0\alpha + X_1\beta + X_2C + Z_1\gamma + Z_2\alpha\gamma + Z_3\beta\gamma + Z_4C\gamma + e$$

Las dimensiones de las matrices asociadas con este modelo son las siguientes:

$X_{0(207\times 2)}$, $X_{1(207\times 2)}$, $X_{2(207\times 5)}$, $Z_{1(207\times 20)}$, $Z_{2(207\times 40)}$, $Z_{3(207\times 40)}$, $Z_{4(207\times 69)}$.

Se considera la información en un arreglo, en el cual cada y_{ijkl} corresponde al peso del animal observado en la celda correspondiente al i-ésimo sexo, j-ésima época, k-ésimo parto y l-ésimo padre; donde $i, j = 1, 2$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ y $l = 1, 2, \dots, 20$. El arreglo de la información se muestra en la tabla (2).

Los componentes de varianza, del vector $\tilde{u}'$ de tamaño 1×169, a estimar son:

γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8	γ_9	γ_{10}
γ_{11}	γ_{12}	γ_{13}	γ_{14}	γ_{15}	γ_{16}	γ_{17}	γ_{18}	γ_{19}	γ_{20}
$\alpha\gamma_{1,1}$	$\alpha\gamma_{1,2}$	$\alpha\gamma_{1,3}$	$\alpha\gamma_{1,4}$	$\alpha\gamma_{1,5}$	$\alpha\gamma_{1,6}$	$\alpha\gamma_{1,7}$	$\alpha\gamma_{1,8}$	$\alpha\gamma_{1,9}$	$\alpha\gamma_{1,10}$
$\alpha\gamma_{1,11}$	$\alpha\gamma_{1,12}$	$\alpha\gamma_{1,13}$	$\alpha\gamma_{1,14}$	$\alpha\gamma_{1,15}$	$\alpha\gamma_{1,16}$	$\alpha\gamma_{1,17}$	$\alpha\gamma_{1,18}$	$\alpha\gamma_{1,19}$	$\alpha\gamma_{1,20}$
$\alpha\gamma_{2,1}$	$\alpha\gamma_{2,2}$	$\alpha\gamma_{2,3}$	$\alpha\gamma_{2,4}$	$\alpha\gamma_{2,5}$	$\alpha\gamma_{2,6}$	$\alpha\gamma_{2,7}$	$\alpha\gamma_{2,8}$	$\alpha\gamma_{2,9}$	$\alpha\gamma_{2,10}$
$\alpha\gamma_{2,11}$	$\alpha\gamma_{2,12}$	$\alpha\gamma_{2,13}$	$\alpha\gamma_{2,14}$	$\alpha\gamma_{2,15}$	$\alpha\gamma_{2,16}$	$\alpha\gamma_{2,17}$	$\alpha\gamma_{2,18}$	$\alpha\gamma_{2,19}$	$\alpha\gamma_{2,20}$
$\beta\gamma_{1,1}$	$\beta\gamma_{1,2}$	$\beta\gamma_{1,3}$	$\beta\gamma_{1,4}$	$\beta\gamma_{1,5}$	$\beta\gamma_{1,6}$	$\beta\gamma_{1,7}$	$\beta\gamma_{1,8}$	$\beta\gamma_{1,9}$	$\beta\gamma_{1,10}$
$\beta\gamma_{1,11}$	$\beta\gamma_{1,12}$	$\beta\gamma_{1,13}$	$\beta\gamma_{1,14}$	$\beta\gamma_{1,15}$	$\beta\gamma_{1,16}$	$\beta\gamma_{1,17}$	$\beta\gamma_{1,18}$	$\beta\gamma_{1,19}$	$\beta\gamma_{1,20}$
$\beta\gamma_{2,1}$	$\beta\gamma_{2,2}$	$\beta\gamma_{2,3}$	$\beta\gamma_{2,4}$	$\beta\gamma_{2,5}$	$\beta\gamma_{2,6}$	$\beta\gamma_{2,7}$	$\beta\gamma_{2,8}$	$\beta\gamma_{2,9}$	$\beta\gamma_{2,10}$
$\beta\gamma_{2,11}$	$\beta\gamma_{2,12}$	$\beta\gamma_{2,13}$	$\beta\gamma_{2,14}$	$\beta\gamma_{2,15}$	$\beta\gamma_{2,16}$	$\beta\gamma_{2,17}$	$\beta\gamma_{2,18}$	$\beta\gamma_{2,19}$	$\beta\gamma_{2,20}$
$C\gamma_{1,5}$	$C\gamma_{1,7}$	$C\gamma_{1,8}$	$C\gamma_{1,9}$	$C\gamma_{1,12}$	$C\gamma_{1,15}$	$C\gamma_{1,16}$	$C\gamma_{1,17}$	$C\gamma_{1,18}$	
$C\gamma_{2,1}$	$C\gamma_{2,3}$	$C\gamma_{2,4}$	$C\gamma_{2,5}$	$C\gamma_{2,9}$	$C\gamma_{2,10}$	$C\gamma_{2,11}$	$C\gamma_{2,12}$	$C\gamma_{2,15}$	$C\gamma_{2,16}$
$C\gamma_{2,17}$	$C\gamma_{2,18}$	$C\gamma_{2,19}$	$C\gamma_{2,20}$						
$C\gamma_{3,1}$	$C\gamma_{3,2}$	$C\gamma_{3,3}$	$C\gamma_{3,4}$	$C\gamma_{3,5}$	$C\gamma_{3,6}$	$C\gamma_{3,7}$	$C\gamma_{3,8}$	$C\gamma_{3,9}$	$C\gamma_{3,11}$
$C\gamma_{3,12}$	$C\gamma_{3,13}$	$C\gamma_{3,14}$	$C\gamma_{3,15}$	$C\gamma_{3,16}$	$C\gamma_{3,17}$	$C\gamma_{3,18}$	$C\gamma_{3,19}$	$C\gamma_{3,20}$	
$C\gamma_{4,1}$	$C\gamma_{4,2}$	$C\gamma_{4,4}$	$C\gamma_{4,5}$	$C\gamma_{4,6}$	$C\gamma_{4,7}$	$C\gamma_{4,8}$	$C\gamma_{4,9}$	$C\gamma_{4,12}$	$C\gamma_{4,13}$
$C\gamma_{4,14}$	$C\gamma_{4,15}$	$C\gamma_{4,17}$	$C\gamma_{4,18}$	$C\gamma_{4,19}$	$C\gamma_{4,20}$				
$C\gamma_{5,1}$	$C\gamma_{5,2}$	$C\gamma_{5,3}$	$C\gamma_{5,5}$	$C\gamma_{5,6}$	$C\gamma_{5,8}$	$C\gamma_{5,9}$	$C\gamma_{5,12}$	$C\gamma_{5,13}$	$C\gamma_{5,14}$
$C\gamma_{5,19}$									

El factor *padre* es aleatorio y, como se puede comprobar, la suma de las estimaciones $\sum_{l=1}^{20} \hat{\gamma}_l$ es cero.

$$
\begin{array}{lllll}
\widetilde{\gamma}_1 = -0.684 & \widetilde{\gamma}_2 = -0.129 & \widetilde{\gamma}_3 = -0.389 & \widetilde{\gamma}_4 = -0.764 & \widetilde{\gamma}_5 = 0.161 \\
\widetilde{\gamma}_6 = 0.946 & \widetilde{\gamma}_7 = 0.255 & \widetilde{\gamma}_8 = 0.657 & \widetilde{\gamma}_9 = 0.232 & \widetilde{\gamma}_{10} = 0.959 \\
\widetilde{\gamma}_{11} = 0.049 & \widetilde{\gamma}_{12} = 1.124 & \widetilde{\gamma}_{13} = 0.400 & \widetilde{\gamma}_{14} = -0.853 & \widetilde{\gamma}_{15} = -0.101 \\
\widetilde{\gamma}_{16} = 0.029 & \widetilde{\gamma}_{17} = -1.052 & \widetilde{\gamma}_{18} = -0.178 & \widetilde{\gamma}_{19} = -0.192 & \widetilde{\gamma}_{20} = -0.472
\end{array}
$$

La interacción aleatoria *padre*sexo* proviene de una combinación de un efecto fijo y uno aleatorio, por lo tanto la suma de las estimaciones $\sum_{l=1}^{20} \hat{\alpha\gamma}_{il}$ es igual a cero, para $i = 1, 2$.

Para $i = 1$, las estimaciones de $\alpha\gamma_{il}$ son:

$$
\begin{array}{lllll}
\widetilde{\alpha\gamma}_{1,1} = -0.116 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,2} = 0.000 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,3} = 0.157 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,4} = -0.228 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,5} = 0.021 \\
\widetilde{\alpha\gamma}_{1,6} = 0.276 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,7} = -0.106 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,8} = 0.099 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,9} = -0.073 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,10} = 0.357 \\
\widetilde{\alpha\gamma}_{1,11} = 0.063 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,12} = -0.205 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,13} = 0.063 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,14} = 0.114 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,15} = -0.156 \\
\widetilde{\alpha\gamma}_{1,16} = 0.092 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,17} = 0.080 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,18} = -0.173 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,19} = -0.180 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,20} = -0.085
\end{array}
$$

Para $i = 2$, las estimaciones de $\alpha\gamma_{il}$ son:

$$
\begin{array}{lllll}
\widetilde{\alpha\gamma}_{2,1} = -0.109 & \widetilde{\alpha\gamma}_{2,2} = -0.042 & \widetilde{\alpha\gamma}_{2,3} = -0.284 & \widetilde{\alpha\gamma}_{2,4} = -0.022 & \widetilde{\alpha\gamma}_{2,5} = 0.032 \\
\widetilde{\alpha\gamma}_{2,6} = 0.035 & \widetilde{\alpha\gamma}_{2,7} = 0.190 & \widetilde{\alpha\gamma}_{2,8} = 0.116 & \widetilde{\alpha\gamma}_{2,9} = 0.149 & \widetilde{\alpha\gamma}_{2,10} = -0.042 \\
\widetilde{\alpha\gamma}_{2,11} = -0.046 & \widetilde{\alpha\gamma}_{2,12} = 0.574 & \widetilde{\alpha\gamma}_{2,13} = 0.069 & \widetilde{\alpha\gamma}_{2,14} = -0.395 & \widetilde{\alpha\gamma}_{2,15} = 0.123 \\
\widetilde{\alpha\gamma}_{2,16} = -0.083 & \widetilde{\alpha\gamma}_{2,17} = -0.425 & \widetilde{\alpha\gamma}_{2,18} = 0.114 & \widetilde{\alpha\gamma}_{2,19} = 0.117 & \widetilde{\alpha\gamma}_{2,20} = -0.070
\end{array}
$$

La interacción aleatoria *padre*época* proviene de una combinación de un efecto fijo y uno aleatorio, por lo tanto la suma de las estimaciones $\sum_{l=1}^{20} \hat{\beta\gamma}_{jl}$ es igual a cero, para $j = 1, 2$.

Para $j = 1$, las estimaciones de $\beta\gamma_{jl}$ son:

$$\begin{array}{lllll}
\widetilde{\beta\gamma}_{1,1} = -0.093 & \widetilde{\beta\gamma}_{1,2} = 0.064 & \widetilde{\beta\gamma}_{1,3} = -0.016 & \widetilde{\beta\gamma}_{1,4} = -0.043 & \widetilde{\beta\gamma}_{1,5} = -0.002 \\
\widetilde{\beta\gamma}_{1,6} = 0.199 & \widetilde{\beta\gamma}_{1,7} = 0.124 & \widetilde{\beta\gamma}_{1,8} = 0.152 & \widetilde{\beta\gamma}_{1,9} = 0.003 & \widetilde{\beta\gamma}_{1,10} = -0.050 \\
\widetilde{\beta\gamma}_{1,11} = -0.064 & \widetilde{\beta\gamma}_{1,12} = 0.111 & \widetilde{\beta\gamma}_{1,13} = 0.052 & \widetilde{\beta\gamma}_{1,14} = -0.076 & \widetilde{\beta\gamma}_{1,15} = 0.013 \\
\widetilde{\beta\gamma}_{1,16} = 0.000 & \widetilde{\beta\gamma}_{1,17} = -0.115 & \widetilde{\beta\gamma}_{1,18} = -0.069 & \widetilde{\beta\gamma}_{1,19} = -0.080 & \widetilde{\beta\gamma}_{1,20} = -0.110
\end{array}$$

Para $j = 2$, las estimaciones de $\beta\gamma_{jl}$ son:

$$\begin{array}{lllll}
\widetilde{\beta\gamma}_{2,1} = 0.004 & \widetilde{\beta\gamma}_{2,2} = -0.081 & \widetilde{\beta\gamma}_{2,3} = -0.034 & \widetilde{\beta\gamma}_{2,4} = -0.057 & \widetilde{\beta\gamma}_{2,5} = 0.023 \\
\widetilde{\beta\gamma}_{2,6} = -0.076 & \widetilde{\beta\gamma}_{2,7} = -0.091 & \widetilde{\beta\gamma}_{2,8} = -0.067 & \widetilde{\beta\gamma}_{2,9} = 0.027 & \widetilde{\beta\gamma}_{2,10} = 0.175 \\
\widetilde{\beta\gamma}_{2,11} = 0.071 & \widetilde{\beta\gamma}_{2,12} = 0.035 & \widetilde{\beta\gamma}_{2,13} = -0.000 & \widetilde{\beta\gamma}_{2,14} = -0.034 & \widetilde{\beta\gamma}_{2,15} = -0.026 \\
\widetilde{\beta\gamma}_{2,16} = 0.003 & \widetilde{\beta\gamma}_{2,17} = -0.022 & \widetilde{\beta\gamma}_{2,18} = 0.046 & \widetilde{\beta\gamma}_{2,19} = 0.055 & \widetilde{\beta\gamma}_{2,20} = 0.048
\end{array}$$

La interacción aleatoria *padre*partos* proviene de una combinación de un efecto fijo y uno aleatorio, por lo tanto la suma de las estimaciones $\sum_{l=1}^{20} \hat{C}\gamma_{kl}$ es igual a cero, para $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Para $k = 1$, las estimaciones de $C\gamma_{kl}$ son:

$$\begin{array}{lllll}
\widetilde{C\gamma}_{1,5} = -0.040 & \widetilde{C\gamma}_{1,7} = -0.506 & \widetilde{C\gamma}_{1,8} = -0.118 & \widetilde{C\gamma}_{1,9} = -0.177 & \widetilde{C\gamma}_{1,12} = 0.243 \\
\widetilde{C\gamma}_{1,15} = 0.132 & \widetilde{C\gamma}_{1,16} = -0.006 & \widetilde{C\gamma}_{1,17} = 0.200 & \widetilde{C\gamma}_{1,18} = 0.272 &
\end{array}$$

Para $k = 2$, las estimaciones de $C\gamma_{kl}$ son:

$$\begin{array}{lllll}
\widetilde{C\gamma}_{2,1} = -0.029 & \widetilde{C\gamma}_{2,3} = -0.063 & \widetilde{C\gamma}_{2,4} = 0.046 & \widetilde{C\gamma}_{2,5} = -0.040 & \widetilde{C\gamma}_{2,9} = -0.235 \\
\widetilde{C\gamma}_{2,10} = 0.510 & \widetilde{C\gamma}_{2,11} = 0.218 & \widetilde{C\gamma}_{2,12} = -0.163 & \widetilde{C\gamma}_{2,15} = -0.040 & \widetilde{C\gamma}_{2,16} = 0.282 \\
\widetilde{C\gamma}_{2,17} = -0.495 & \widetilde{C\gamma}_{2,18} = -0.183 & \widetilde{C\gamma}_{2,19} = 0.209 & \widetilde{C\gamma}_{2,20} = -0.017 &
\end{array}$$

Para $k = 3$, las estimaciones de $C\gamma_{kl}$ son:

$$\begin{array}{lllll}
\widetilde{C\gamma}_{3,1} = -0.090 & \widetilde{C\gamma}_{3,2} = 0.308 & \widetilde{C\gamma}_{3,3} = -0.243 & \widetilde{C\gamma}_{3,4} = -0.158 & \widetilde{C\gamma}_{3,5} = -0.294 \\
\widetilde{C\gamma}_{3,6} = 0.505 & \widetilde{C\gamma}_{3,7} = 0.087 & \widetilde{C\gamma}_{3,8} = 0.193 & \widetilde{C\gamma}_{3,9} = 0.204 & \widetilde{C\gamma}_{3,11} = -0.192 \\
\widetilde{C\gamma}_{3,12} = 0.418 & \widetilde{C\gamma}_{3,13} = 0.129 & \widetilde{C\gamma}_{3,14} = -0.069 & \widetilde{C\gamma}_{3,15} = -0.122 & \widetilde{C\gamma}_{3,16} = -0.260 \\
\widetilde{C\gamma}_{3,17} = -0.255 & \widetilde{C\gamma}_{3,18} = -0.263 & \widetilde{C\gamma}_{3,19} = 0.356 & \widetilde{C\gamma}_{3,20} = -0.254 &
\end{array}$$

Para $k = 4$, las estimaciones de $C\gamma_{kl}$ son:

$$\begin{array}{lllll}
\widetilde{C\gamma}_{4,1} = 0.035 & \widetilde{C\gamma}_{4,2} = -0.127 & \widetilde{C\gamma}_{4,4} = -0.294 & \widetilde{C\gamma}_{4,5} = 0.081 & \widetilde{C\gamma}_{4,6} = -0.090 \\
\widetilde{C\gamma}_{4,7} = 0.554 & \widetilde{C\gamma}_{4,8} = -0.071 & \widetilde{C\gamma}_{4,9} = 0.045 & \widetilde{C\gamma}_{4,12} = -0.047 & \widetilde{C\gamma}_{4,13} = 0.201 \\
\widetilde{C\gamma}_{4,14} = 0.123 & \widetilde{C\gamma}_{4,15} = -0.024 & \widetilde{C\gamma}_{4,17} = -0.010 & \widetilde{C\gamma}_{4,18} = 0.080 & \widetilde{C\gamma}_{4,19} = -0.477 \\
\widetilde{C\gamma}_{4,20} = 0.020 & & & &
\end{array}$$

Para $k = 5$, las estimaciones de $C\gamma_{kl}$ son:

$$\begin{array}{lllll}
\widetilde{C\gamma}_{5,1} = -0.280 & \widetilde{C\gamma}_{5,2} = -0.250 & \widetilde{C\gamma}_{5,3} = 0.100 & \widetilde{C\gamma}_{5,5} = 0.379 & \widetilde{C\gamma}_{5,6} = 0.087 \\
\widetilde{C\gamma}_{5,8} = 0.344 & \widetilde{C\gamma}_{5,9} = 0.287 & \widetilde{C\gamma}_{5,12} = 0.146 & \widetilde{C\gamma}_{5,13} = -0.117 & \widetilde{C\gamma}_{5,14} = -0.507 \\
\widetilde{C\gamma}_{5,19} = -0.189 & & & &
\end{array}$$

5.2. Aplicación con un diseño jerárquico

Se considera la información presentada en Harville & Fenech (1985), recopilada en el Departamento de Ciencia Animal de la Universidad de California, la cual contiene los pesos al nacer de 62 ovejos machos que provienen de 5 familias de poblaciones distintas, dos familias de control y tres familias de selección. Cada ovejo tiene una madre diferente y la edad de la progenitora fue clasificada en 3 categorías: de 1 a 2 años, de 2 a 3 años y mayor de 3 años.

Teniendo en cuenta las variables citadas, el modelo apropiado tiene la siguiente estructura:

$$y_{ijkd} = \mu + \delta_i + \pi_j + S_{k(j)} + e_{ijkd}$$

con $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 3, 4, 5$, $k = 1, 2, \dots, n_j$, $d = 1, \dots, n_{ijk}, n_{ijk} \geq 0$, donde y_{ijkd} corresponde al peso del d-ésimo ovejo, proveniente del k-ésimo padre dentro de la j-ésima familia, cuya madre pertenece a la i-ésima categoría de edad; μ es la media general y e_{ijkd} es la componente aleatoria de error.

En este caso, el factor correspondiente a la edad de la madre $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ y el factor que hace alusión a la familia $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$ son de efectos fijos, mientras que el factor que se refiere a los padres dentro de las familias $(S_{1(1)}, S_{2(1)}, \dots, S_{8(5)})$ es de efectos aleatorios independientemente distribuido $N(0, \sigma_S^2)$.

Adicionalmente, los errores aleatorios $e_{1111}, \dots, e_{35819}$ tienen distribución $N(0, \sigma^2)$, siendo independientes uno de otro y de los efectos de los padres dentro de las familias.

En términos matriciales, el modelo anterior puede escribirse como:

$$y = 1\mu + X_0\delta + X_1\pi + Z_1 S + e$$

En el cual las dimensiones de los vectores y las matrices son respectivamente: $y_{(62\times1)}$, $1_{(62\times1)}$, $X_{0(62\times3)}$, $\delta_{(3\times1)}$, $X_{1(62\times5)}$, $\pi_{(5\times1)}$, $Z_{1(62\times23)}$, $S_{(23\times1)}$, $e_{(62\times1)}$.

En la tabla 1 se presenta el arreglo con la información empleada en el análisis.

Teniendo el modelo que se expuso previamente, los componentes de varianza estimados en este caso están dados por $\tilde{S} = \begin{bmatrix} \tilde{S}' \\ \tilde{S}'' \end{bmatrix}$, donde:

$$\tilde{S}' = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{1(1)} \\ \tilde{S}_{2(1)} \\ \tilde{S}_{3(1)} \\ \tilde{S}_{4(1)} \\ \tilde{S}_{1(2)} \\ \tilde{S}_{2(2)} \\ \tilde{S}_{3(2)} \\ \tilde{S}_{4(2)} \\ \tilde{S}_{1(3)} \\ \tilde{S}_{2(3)} \\ \tilde{S}_{3(3)} \\ \tilde{S}_{4(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.391 \\ 1.980 \\ -0.584 \\ 1.562 \\ -1.560 \\ 0.665 \\ 0.819 \\ -0.020 \\ 0.373 \\ -0.148 \\ 0.824 \\ -0.372 \end{bmatrix} \qquad \tilde{S}'' = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{1(4)} \\ \tilde{S}_{2(4)} \\ \tilde{S}_{3(4)} \\ \tilde{S}_{1(5)} \\ \tilde{S}_{2(5)} \\ \tilde{S}_{3(5)} \\ \tilde{S}_{4(5)} \\ \tilde{S}_{5(5)} \\ \tilde{S}_{6(5)} \\ \tilde{S}_{7(5)} \\ \tilde{S}_{8(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.291 \\ 0.011 \\ -0.111 \\ -1.243 \\ 0.121 \\ -0.905 \\ -0.133 \\ -1.267 \\ 1.063 \\ 0.703 \\ 1.302 \end{bmatrix}$$

Se puede verificar que $\sum_{i=1}^{23} \tilde{S}_{k(j)} = 0$.

Tabla 1: Peso de nacimiento de ovejos machos

Familia	Padre	Edad madre	Peso	Familia	Padre	Edad madre	Peso	Familia	Padre	Edad madre	Peso
1	1	1	6.2	3	2	1	11.0	4	3	3	9.9
1	2	1	1.3	3	2	2	10.1	5	1	1	11.7
1	3	1	9.5	3	2	2	11.7	5	1	1	12.6
1	3	1	10.1	3	2	3	8.5	5	2	1	9.0
1	3	1	11.4	3	2	3	8.8	5	2	3	11.0
1	3	2	11.8	3	2	3	9.9	5	3	3	9.0
1	3	3	12.9	3	2	3	10.9	5	3	3	12.0
1	3	3	13.1	3	2	3	11.0	5	4	3	9.9
1	4	1	10.4	3	2	3	13.9	5	5	2	13.5
1	4	2	8.5	3	3	1	11.6	5	6	2	10.9
2	1	3	13.5	3	3	3	13.0	5	6	3	5.9
2	2	2	10.1	3	4	2	12.0	5	7	2	10.0
2	2	3	11.0	4	1	1	9.2	5	7	2	12.7
2	2	3	14.0	4	1	1	10.6	5	7	3	13.2
2	2	3	15.5	4	1	1	10.6	5	7	3	13.3
2	3	1	12.0	4	1	3	7.7	5	8	1	10.7
2	4	1	11.5	4	1	3	10.0	5	8	1	11.0
2	4	3	10.8	4	1	3	11.2	5	8	1	12.5
3	1	2	9.0	4	2	1	10.2	5	8	3	9.0
3	1	3	9.5	4	2	1	10.9	5	8	3	10.2
3	1	3	12.6	4	3	1	11.7				

5.3. Aplicación con datos de tipo longitudinal

Finalmente, se ilustra de modo empírico que la restricción sobre los BLUP dada por $\lambda^t\tilde{U} = 0$ no se satisface en modelos mixtos en los cuales están involucrados datos de tipo longitudinal. La demostración de este resultado empírico no es trivial por la naturaleza de la matriz P. Se considera nuevamente la información empleada en el modelo de efectos cruzados de la sección 5.1. Los datos se muestran en las tablas 2, 3 y 4.

El modelo de efectos aleatorios con estructura longitudinal con relación al tiempo se representa en forma matricial como: $y = Z\phi A + Z_q B + E$, donde:

- $y_{(t\times n)}$ es la matriz que tiene información referente a los pesos al nacimiento, al destete y final de la cría ($t = 3$), con n el número de unidades experimentales.
- $Z_{(t\times r)}$ es la matriz de especificación del modelo intraunidades experimentales.
- $\phi_{(r\times f)}$ es la matriz de coeficientes polinomiales desconocidos.
- $A_{(f\times n)}$ es la matriz de especificación del modelo entre unidades experimentales.
- $Z_{q(t\times q)}$ es la matriz de especificación de efectos aleatorios.
- $B_{(q\times n)}$ es la matriz que contiene los efectos aleatorios.

- $E_{(t\times n)}$ es la matriz que contiene los errores asociados a cada unidad experimental.

La matriz P en modelos con medidas repetidas está dada por:

$$P = V^{-1}[I - X(X^tV^{-1}X)^{-1}X^tV^{-1}]$$

cuya forma general es:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_2 & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_n \end{bmatrix}$$

Siendo

$$\begin{aligned} P_i &= \Sigma_i^{-1} - \Sigma_i^{-1}X_i\ (\Sigma_{i=1}^n X_i^t\Sigma_i^{-1}X_i)^{-1}X_i^t\Sigma_i^{-1} \\ P_{ij} &= -\Sigma_i^{-1}X_i(\Sigma_{i=1}^n X_i^t\Sigma_i^{-1}X_i)^{-1}X_j^t\Sigma_i^{-1} \end{aligned}$$

para $i \neq j$; $i, j = 1, \dots, n$ con Σ_i no estructurada y $V = Diag(\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n)$.

En la obtención del BLUP se usó una matriz no estructurada, pero puede trabajarse con otras estructuras, las cuales pueden estudiarse en Andreoni (1989) y Jennrich & Schluchter (1986).

Con los programas que se muestran en el apéndice, se obtuvieron los diferentes BLUP, asociados a los efectos aleatorios y, como se muestra en los resultados, esto no satisface las restricciones impuestas por Searle (1997) y visualizadas empíricamente por McLean et al. (1991). La razón está por demostrarse.

Se exponen a continuación los arreglos con la información longitudinal y los resultados obtenidos.

El factor *padre* es aleatorio; se puede comprobar que la suma de las estimaciones $\sum_{l=1}^{20}\hat{\gamma}_l$ no es cero.

$$\begin{array}{lllll} \widetilde{\gamma}_1 = 2.508 & \widetilde{\gamma}_2 = -1.180 & \widetilde{\gamma}_3 = 0.195 & \widetilde{\gamma}_4 = -1.815 & \widetilde{\gamma}_5 = 0.013 \\ \widetilde{\gamma}_6 = -2.281 & \widetilde{\gamma}_7 = -1.820 & \widetilde{\gamma}_8 = 1.115 & \widetilde{\gamma}_9 = -1.598 & \widetilde{\gamma}_{10} = -1.609 \\ \widetilde{\gamma}_{11} = -2.349 & \widetilde{\gamma}_{12} = 1.922 & \widetilde{\gamma}_{13} = 0.475 & \widetilde{\gamma}_{14} = 0.823 & \widetilde{\gamma}_{15} = 0.645 \\ \widetilde{\gamma}_{16} = 1.060 & \widetilde{\gamma}_{17} = 3.590 & \widetilde{\gamma}_{18} = -0.414 & \widetilde{\gamma}_{19} = 2.820 & \widetilde{\gamma}_{20} = -4.066 \end{array}$$

La interacción aleatoria *padre*sexo* proviene de una combinación de un efecto fijo y uno aleatorio; sin embargo, la suma de las estimaciones $\sum_{l=1}^{20}\hat{\alpha\gamma}_{il}$ no es igual a cero, para $i = 1, 2$.

Para $i = 1$, las estimaciones de $\alpha\gamma_{il}$ son:

$$\begin{array}{lllll} \widetilde{\alpha\gamma}_{1,1} = -3.289 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,2} = 8.446 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,3} = -1.456 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,4} = 4.003 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,5} = -8.999 \\ \widetilde{\alpha\gamma}_{1,6} = -5.487 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,7} = -1.119 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,8} = -3.060 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,9} = -10.333 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,10} = 14.397 \\ \widetilde{\alpha\gamma}_{1,11} = -2.861 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,12} = -6.925 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,13} = -2.497 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,14} = 0.903 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,15} = 1.582 \\ \widetilde{\alpha\gamma}_{1,16} = 3.648 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,17} = 10.638 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,18} = 7.906 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,19} = -6.177 & \widetilde{\alpha\gamma}_{1,20} = 18.938 \end{array}$$

Tabla 2: Peso promedio al nacimiento de novillos por celda

$i = 1$

	$j=1$					$j=2$				
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$l=1$			25.0		22.0			28.0	27.0	28.0
$l=2$				27.0	27.0			31.0	25.0	26.5
$l=3$		28.0								29.0
$l=4$			25.6	22.0				25.0		
$l=5$			25.0	28.0	30.0	26.5		28.0		
$l=6$			31.5	26.0	31.0					28.0
$l=7$			28.0	29.0		20.0				
$l=8$	26.0		28.5	28.0	29.0			28.5	27.5	
$l=9$	25.0	24.0	27.0	27.0	27.0				28.0	29.3
$l=10$		27.6					38.0			
$l=11$		28.0								
$l=12$	27.0	28.0	27.0	27.0	30.0		26.0	28.0		
$l=13$			28.0	28.0				28.0	28.0	
$l=14$			24.0	28.5	25.0					26.5
$l=15$		26.0	25.0						26.0	
$l=16$	26.0	29.0					29.0	26.5		
$l=17$	27.0		27.0	23.0						
$l=18$			22.0			28.0	25.0			
$l=19$		27.0	28.0	23.0						
$l=20$			23.0	25.0			28.0		28.0	

$i = 2$

	$j=1$					$j=2$				
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$l=1$			26.0				26.0	25.75		
$l=2$					27.0					26.3
$l=3$			23.0				24.0	26.0		
$l=4$		26.0	25.5					25.0		
$l=5$		26.0	25.5		29.0			28.0	27.0	28.5
$l=6$			28.5	29.0				28.0	27.0	
$l=7$	26.0			28.0					30.0	
$l=8$			28.0	27.5	29.5	26.0			27.0	
$l=9$	25.0		27.5	28.0	29.0				27.0	
$l=10$							28.0			
$l=11$		25.5	24.0				29.0			
$l=12$	30.0		29.5					35.0		
$l=13$			28.0	27.5	26.0				28.0	
$l=14$			26.0	21.0	23.5					25.0
$l=15$	26.0			27.0			27.0			
$l=16$	24.0		25.0			27.0				
$l=17$		21.5	23.5	25.0				23.0	27.0	
$l=18$			26.0	27.0				28.0		
$l=19$		28.0			25.5			30.0		
$l=20$		25.0								

Tabla 3: Peso promedio al destete de novillos por celda

$i = 1$

	$j=1$					$j=2$				
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$l=1$			134.5		153.2			202.7	147.7	153
$l=2$				179.1	172.5			184.3	105.5	149.2
$l=3$		195.8								130.6
$l=4$			139.1	134.7				144.6		
$l=5$			144.2	178.2	149.4	135.6		152.9		
$l=6$			166.2	117.8	166.6					112.8
$l=7$			184.8	149		133.7				
$l=8$	119.4		182.2	182.3	162.7			182.4	153.3	
$l=9$	137.3	130.4	203.2	162.1	165.4				169.3	154.2
$l=10$		150.4					162.0			
$l=11$		126.8								
$l=12$	136.1	171.7	148.1	141.8	124.3		185.3	161.9		
$l=13$			163	164.9				132.8	161.8	
$l=14$			154.2	172.3	181.1					184.1
$l=15$		158.5	176.6						159.7	
$l=16$	182.5	175.3					178.2	170.0		
$l=17$	214.6		156.6	113.5						
$l=18$			133.6			165.9	172.1			
$l=19$		149.8	165.6	145.0						
$l=20$			151.4	128.2			161.3		165.3	

$i = 2$

	$j=1$					$j=2$				
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$l=1$			106.3				159.5	149.0		
$l=2$					143.2					152.5
$l=3$			107.0				129.3	126.4		
$l=4$		125.8	123.7					121.0		
$l=5$		148.8	160.9		124.3			167.3	145.1	176.2
$l=6$			171.7	127.8				132.0	125.3	
$l=7$	125.8			127.1					126.5	
$l=8$			144.7	185.8	139.6	145.0			142.5	
$l=9$	103.9		148.2	159.2	117.4				148.8	
$l=10$							155.1			
$l=11$		133.8	164.4				151.2			
$l=12$	176.2		162.2					119.2		
$l=13$			170.7	161.5	169.5				165.1	
$l=14$			165.1	164.0	180.6					169.4
$l=15$	170.1			163.2			166.2			
$l=16$	182.2		146.4			189.7				
$l=17$		115.1	131.8	133.8				159.7	138.3	
$l=18$			163.3	168.2				142.3		
$l=19$		160.2			212.6			152.7		
$l=20$		143.7								

Tabla 4: Peso promedio final de novillos por celda

$i = 1$

			$j = 1$					$j = 2$		
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$l = 1$			121.6		149.9			229.9	214.5	229.7
$l = 2$				209.1	187.8			197.1	166.5	176.5
$l = 3$		187.0								198.8
$l = 4$			161.3	171.6				187.2		
$l = 5$			159.6	223.2	187.7	241.3		187.1		
$l = 6$			194.4	121.6	191.4					187.8
$l = 7$			184.8	164.2		168.2				
$l = 8$	186.1		238.0	249.0	182.9			192.5	189.5	
$l = 9$	167.9	203.1	261.5	166.8	170.2				174.3	206.8
$l = 10$		168.3					183.0			
$l = 11$		248.2								
$l = 12$	178.8	239.2	219.7	173.4	164.4		248.6	244.6		
$l = 13$			204.7	200.8				151.1	246.8	
$l = 14$			159.6	181.4	250.7					184.1
$l = 15$		176.3	182.0						183.2	
$l = 16$	194.3	188.1					177.2	168.4		
$l = 17$	235.9		165.1	100.8						
$l = 18$			171.1			184.1	155.0			
$l = 19$		185.1	179.6	215.5						
$l = 20$			164.2	146.7			294.8		158.2	

$i = 2$

			$j = 1$					$j = 2$		
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$l = 1$			141.8				224.9	184.4		
$l = 2$					165.7					209.6
$l = 3$			176.6				208.8	173.3		
$l = 4$		172.7	185.5					167.8		
$l = 5$		121.1	173.7		207.7			161.2	119.3	200.5
$l = 6$			175.5	174.6				172.2	146.4	
$l = 7$	166.9			157.7					166.7	
$l = 8$			190.6	219.1	178.4	190			205.9	
$l = 9$	148.1		188.4	165.9	159.9				195.4	
$l = 10$							167.5			
$l = 11$		165	243.6				188.4			
$l = 12$	168.6		179.5					139.3		
$l = 13$			231.5	214.4	212				218.4	
$l = 14$			164.1	201.6	203.3					167.3
$l = 15$	192.1			171.7			172.6			
$l = 16$	189.6		158.1			213.2				
$l = 17$		175.4	177.3	211.9				212.2	220.7	
$l = 18$			170.6	173.5				151.9		
$l = 19$		203.9			217.6			158.1		
$l = 20$		192.7								

Para $i = 2$, las estimaciones de $\alpha\gamma_{il}$ son:

$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,1} = 6.276$	$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,2} = -9.168$	$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,3} = 2.561$	$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,4} = -4.231$	$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,5} = 9.421$
$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,6} = 4.194$	$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,7} = 0.564$	$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,8} = 3.593$	$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,9} = 9.106$	$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,10} = -13.777$
$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,11} = 0.961$	$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,12} = 8.750$	$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,13} = 2.324$	$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,14} = -0.551$	$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,15} = -0.986$
$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,16} = -2.857$	$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,17} = -6.686$	$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,18} = -7.494$	$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,19} = 8.270$	$\widetilde{\alpha\gamma}_{2,20} = -21.909$

La interacción aleatoria *padre*época* proviene de una combinación de un efecto fijo y uno aleatorio; sin embargo, la suma de las estimaciones $\sum_{l=1}^{20} \hat{\beta}\gamma_{jl}$ no es igual a cero, para $j = 1, 2$.

Para $j = 1$, las estimaciones de $\beta\gamma_{jl}$ son:

$\widetilde{\beta\gamma}_{1,1} = 16.788$	$\widetilde{\beta\gamma}_{1,2} = -5.122$	$\widetilde{\beta\gamma}_{1,3} = 2.245$	$\widetilde{\beta\gamma}_{1,4} = -5.913$	$\widetilde{\beta\gamma}_{1,5} = -2.595$
$\widetilde{\beta\gamma}_{1,6} = -6.914$	$\widetilde{\beta\gamma}_{1,7} = -4.677$	$\widetilde{\beta\gamma}_{1,8} = 8.490$	$\widetilde{\beta\gamma}_{1,9} = 9.359$	$\widetilde{\beta\gamma}_{1,10} = -5.277$
$\widetilde{\beta\gamma}_{1,11} = -5.414$	$\widetilde{\beta\gamma}_{1,12} = -7.534$	$\widetilde{\beta\gamma}_{1,13} = 1.243$	$\widetilde{\beta\gamma}_{1,14} = -6.387$	$\widetilde{\beta\gamma}_{1,15} = -1.135$
$\widetilde{\beta\gamma}_{1,16} = 5.192$	$\widetilde{\beta\gamma}_{1,17} = -16.173$	$\widetilde{\beta\gamma}_{1,18} = 5.028$	$\widetilde{\beta\gamma}_{1,19} = -9.487$	$\widetilde{\beta\gamma}_{1,20} = 17.046$

Para $j = 2$, las estimaciones de $\beta\gamma_{jl}$ son:

$\widetilde{\beta\gamma}_{2,1} = -10.827$	$\widetilde{\beta\gamma}_{2,2} = 4.586$	$\widetilde{\beta\gamma}_{2,3} = 0.147$	$\widetilde{\beta\gamma}_{2,4} = 9.245$	$\widetilde{\beta\gamma}_{2,5} = 2.930$
$\widetilde{\beta\gamma}_{2,6} = 8.124$	$\widetilde{\beta\gamma}_{2,7} = 7.686$	$\widetilde{\beta\gamma}_{2,8} = -10.879$	$\widetilde{\beta\gamma}_{2,9} = -10.963$	$\widetilde{\beta\gamma}_{2,10} = 6.551$
$\widetilde{\beta\gamma}_{2,11} = 2.560$	$\widetilde{\beta\gamma}_{2,12} = 6.917$	$\widetilde{\beta\gamma}_{2,13} = -4.359$	$\widetilde{\beta\gamma}_{2,14} = 4.508$	$\widetilde{\beta\gamma}_{2,15} = 0.571$
$\widetilde{\beta\gamma}_{2,16} = -6.355$	$\widetilde{\beta\gamma}_{2,17} = 17.893$	$\widetilde{\beta\gamma}_{2,18} = -3.549$	$\widetilde{\beta\gamma}_{2,19} = 10.135$	$\widetilde{\beta\gamma}_{2,20} = -21.713$

La interacción aleatoria *padre*partos* proviene de una combinación de un efecto fijo y uno aleatorio; sin embargo, la suma de las estimaciones $\sum_{l=1}^{20} \hat{C}\gamma_{kl}$ no es igual a cero, para $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Para $k = 1$, las estimaciones de $C\gamma_{kl}$ son:

$\widetilde{C\gamma}_{1,5} = 4.810$	$\widetilde{C\gamma}_{1,7} = -4.374$	$\widetilde{C\gamma}_{1,8} = -2.662$	$\widetilde{C\gamma}_{1,9} = 4.362$	$\widetilde{C\gamma}_{1,12} = -12.190$
$\widetilde{C\gamma}_{1,15} = 4.213$	$\widetilde{C\gamma}_{1,16} = -4.385$	$\widetilde{C\gamma}_{1,17} = -19.879$	$\widetilde{C\gamma}_{1,18} = 6.255$	

Para $k = 2$, las estimaciones de $C\gamma_{kl}$ son:

$\widetilde{C\gamma}_{2,1} = -3.106$	$\widetilde{C\gamma}_{2,3} = -1.442$	$\widetilde{C\gamma}_{2,4} = 3.295$	$\widetilde{C\gamma}_{2,5} = -3.278$	$\widetilde{C\gamma}_{2,9} = -8.715$
$\widetilde{C\gamma}_{2,10} = -1.409$	$\widetilde{C\gamma}_{2,11} = 0.741$	$\widetilde{C\gamma}_{2,12} = -5.874$	$\widetilde{C\gamma}_{2,15} = 4.085$	$\widetilde{C\gamma}_{2,16} = 9.891$
$\widetilde{C\gamma}_{2,17} = 5.187$	$\widetilde{C\gamma}_{2,18} = 12.082$	$\widetilde{C\gamma}_{2,19} = -1.279$	$\widetilde{C\gamma}_{2,20} = -2.506$	

Para $k = 3$, las estimaciones de $C\gamma_{kl}$ son:

$\widetilde{C\gamma}_{3,1} = -1.662$	$\widetilde{C\gamma}_{3,2} = 1.136$	$\widetilde{C\gamma}_{3,3} = -5.350$	$\widetilde{C\gamma}_{3,4} = -12.816$	$\widetilde{C\gamma}_{3,5} = 1.561$
$\widetilde{C\gamma}_{3,6} = -4.672$	$\widetilde{C\gamma}_{3,7} = 10.023$	$\widetilde{C\gamma}_{3,8} = -6.845$	$\widetilde{C\gamma}_{3,9} = 4.942$	$\widetilde{C\gamma}_{3,11} = 0.593$
$\widetilde{C\gamma}_{3,12} = -6.829$	$\widetilde{C\gamma}_{3,13} = 13.695$	$\widetilde{C\gamma}_{3,14} = 6.787$	$\widetilde{C\gamma}_{3,15} = 6.228$	$\widetilde{C\gamma}_{3,16} = -0.860$
$\widetilde{C\gamma}_{3,17} = 7.577$	$\widetilde{C\gamma}_{3,18} = 2.819$	$\widetilde{C\gamma}_{3,19} = -31.742$	$\widetilde{C\gamma}_{3,20} = 2.810$	

Para $k = 4$, las estimaciones de $C\gamma_{kl}$ son:

$\widetilde{C\gamma}_{4,1} = 9.982$	$\widetilde{C\gamma}_{4,2} = -13.641$	$\widetilde{C\gamma}_{4,4} = 9.341$	$\widetilde{C\gamma}_{4,5} = 9.850$	$\widetilde{C\gamma}_{4,6} = 2.710$
$\widetilde{C\gamma}_{4,7} = -4.369$	$\widetilde{C\gamma}_{4,8} = -4.286$	$\widetilde{C\gamma}_{4,9} = 18.690$	$\widetilde{C\gamma}_{4,12} = -6.690$	$\widetilde{C\gamma}_{4,13} = 8.385$
$\widetilde{C\gamma}_{4,14} = 1.287$	$\widetilde{C\gamma}_{4,15} = 8.151$	$\widetilde{C\gamma}_{4,17} = -7.224$	$\widetilde{C\gamma}_{4,18} = 3.272$	$\widetilde{C\gamma}_{4,19} = 12.514$
$\widetilde{C\gamma}_{4,20} = -0.782$				

Para $k = 5$, las estimaciones de $C\gamma_{kl}$ son:

$\widetilde{C\gamma}_{5,1} = 2.646$	$\widetilde{C\gamma}_{5,2} = 14.675$	$\widetilde{C\gamma}_{5,3} = 3.914$	$\widetilde{C\gamma}_{5,5} = -4.494$	$\widetilde{C\gamma}_{5,6} = 6.331$
$\widetilde{C\gamma}_{5,8} = -5.944$	$\widetilde{C\gamma}_{5,9} = 13.061$	$\widetilde{C\gamma}_{5,12} = -1.173$	$\widetilde{C\gamma}_{5,13} = -5.319$	$\widetilde{C\gamma}_{5,14} = -1.708$
$\widetilde{C\gamma}_{5,19} = -5.631$				

La interacción aleatoria *padre*tiempo* proviene de una combinación de un efecto fijo y uno aleatorio; sin embargo, la suma de las estimaciones $\sum_{l=1}^{20} \hat{\lambda\gamma}_{hl}$ no es igual a cero, para $h = 1, 2, 3$.

Para $h = 1$ (peso al nacimiento), las estimaciones de $\lambda\gamma_{hl}$ son:

$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,1} = -0.389$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,2} = -1.521$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,3} = 0.191$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,4} = 2.768$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,5} = 0.120$
$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,6} = 4.046$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,7} = 4.005$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,8} = -2.025$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,9} = -0.056$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,10} = 2.143$
$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,11} = -1.307$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,12} = 0.082$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,13} = -2.116$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,14} = -4.705$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,15} = -1.522$
$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,16} = -3.441$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,17} = 1.349$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,18} = 0.196$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,19} = -3.385$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,20} = -2.966$

Para $h = 2$ (peso al destete), las estimaciones de $\lambda\gamma_{hl}$ son:

$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,1} = -0.392$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,2} = 1.517$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,3} = -12.059$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,4} = -14.199$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,5} = 1.936$
$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,6} = -4.508$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,7} = -5.099$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,8} = 6.086$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,9} = -1.393$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,10} = 1.681$
$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,11} = -8.846$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,12} = -0.061$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,13} = 4.127$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,14} = 18.857$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,15} = 14.573$
$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,16} = 20.549$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,17} = -6.835$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,18} = 8.191$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,19} = 13.712$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,20} = -4.023$

Para $h = 3$ (peso final), las estimaciones de $\lambda\gamma_{hl}$ son:

$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,1} = 0.362$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,2} = -2.753$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,3} = 3.316$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,4} = -9.197$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,5} = -2.849$
$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,6} = -11.046$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,7} = -15.014$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,8} = 11.825$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,9} = 0.104$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,10} = -15.885$
$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,11} = 11.710$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,12} = 8.552$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,13} = 14.847$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,14} = -0.546$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,15} = -4.529$
$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,16} = -6.145$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,17} = 4.972$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,18} = -15.494$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,19} = 9.595$	$\widetilde{\lambda\gamma}_{2,20} = 3.103$

6. Conclusiones

Cuando se lleva a cabo el análisis de varianza en modelos de efectos mixtos bajo normalidad, ciertas sumas asociadas al BLUP que involucran los efectos aleatorios o la interacción de estos con los efectos fijos, son iguales a cero (equivalente al concepto Σ-restricción). Sin embargo, cuando existe algún tipo de correlación serial, esta propiedad se pierde, haciendo que la propuesta de Searle (1997) solo sea válida en modelos mixtos sin estructura de correlación.

Agradecimientos

Este trabajo hace parte del Grupo de Investigación de Estadística Aplicada, dentro del marco del proyecto Metodología estadística con modelos lineales generalizados.

Agradecemos las sugerencias y comentarios hechos por los evaluadores de este artículo.

Recibido: agosto de 2006
Aceptado: noviembre de 2006

Referencias

Andreoni, S. (1989), Modelos de efeitos aleatórios para análise de dados longitudinais nâo balanceados em relaçâo ao tempo, Master's thesis, IME-USP.

Barroso, L. P. & Bussab, W. D. (1998), 'Best Linear Unbiased Predictors in the Mixed Models with Incomplete Data', *Commun. Statist. Theory and Methods* **27**(1), 121–129.

Gaona, B. L. (2000), Aplicación de medidas repetidas para la predicción de efectos aleatorios en evaluación genética animal, Trabajo de grado, carrera de estadística, Universidad Nacional de Colombia.

Hartley, H. O. & Rao, C. R. (1967), 'Maximun Likelihood Estimation for the Mixed Analysis of Variance Models', *Biometrika* **54**, 93–108.

Harville, D. A. & Fenech, A. P. (1985), 'Confidence Intervals for Variance Ratio or for Heredability in an Unbalanced Mixed Linear Models', *Biometrics* **41**, 131–152.

Henderson, C. R. (1982), *Statistical Methods in Animal Breeding*, Guelph University, Canada.

Henderson, C. R. (1984), *Estimation of Linear Models in Animal Breeding*, Guelph University, Canada.

Jennrich, R. & Schluchter, M. (1986), 'Unbalanced Measures Models with Structured Covariance Matrix', *Biometrics* **42**, 805–820.

McCulloch, C. E. & Searle, S. R. (2001), *Generalized Linear and Mixed Models*, John Wiley & Sons, New York.

McLean, R. A., Sander, W. L. & Stroup, W. W. (1991), 'A Unified Approach to Mixed Linear Models', *The American Statistician* **45**, 54–64.

Searle, S. R. (1987), *Linear Models for Unbalanced Data*, John Wiley & Sons, New York.

Searle, S. R. (1997), 'Built in Restrictions on Best Linear Unbiased Predictors (BLUP) of Random Effects in Mixed Models', *The American Statistician* **51**, 19–21.

A. Apéndice

Código de los programas en SAS a través de los cuales se obtuvieron los resultados presentados en cada una de las tres aplicaciones.

```
/*APLICACIÓN CON UN MODELO DE EFECTOS CRUZADOS*/
/*Se obtienen las estimaciones*/
proc mixed data=novillo info;
class padre sexo epoca partos;
model pn= sexo epoca partos /noint solution;
random padre padre*sexo padre*epoca padre*partos /solution;
run;

/*APLICACIÓN CON UN DISEÑO JERÁRQUICO*/
/*Se realiza el análisis de varianza*/
proc glm data=ovejos;
class padre edadmadr familia;
model peso= edadmadr familiapadre(familia);
random padre(familia);
run;

/*Se obtienen las estimaciones de D1(23*23)*/
proc mixed data=ovejos info;
class padre edadmadr familia;
model peso= edadmadr familiapadre(familia)
/noint solution outp=p; random padre(familia)
/type=un solution;
run;

/*Se especifican de manera detallada las matrices X Z D R V* y
se calculan los Blups*/
V=Z*D*t(Z)+R;
IV=inv(V);
IG=ginv(t(X)*IV*X);
P=IV-IV*X*IG*t(X)*IV;
BU=D*t(Z)*P*Y;
run;

/*APLICACIÓN CON DATOS DE TIPO LONGITUDINAL*/
/*Construcción de y*/
data novillo;
set dato;
```

```
y=pn;age=0;output;
y=pad;age=8;output;
y=pa16;age=16;output;
drop pn pad pa16;
run;

/*Creación del archivo que contiene únicamente el vector y*/
proc sql;
create table y as
select y from novillo;
run;

/*Estimación de sigma2 a través de CME*/
proc glm data=novillo;
class padre age sexo epoca partos;
model y=age sexo epoca partos padre padre*sexo padre*epoca
padre*partos padre*age;
random padre
padre*sexo padre*epoca padre*partos padre*age;
run;

/*Obtención de las estimaciones de D1*/
proc mixed data=novillo info;
class padre age sexo epoca partos;
model y=age sexo epoca partos padre padre*sexo padre*epoca
padre*partos padre*age;
random padre/type=un solution;
run;

/*Obtención de las estimaciones de D2*/
proc mixed data=novillo info;
class padre age sexo epoca partos;
model y=age sexo epoca partos padre padre*sexo padre*epoca
padre*partos padre*age;
random padre*SEXO/type=un solution;
run;

/*Obtención de las estimaciones de D3*/
proc mixed data=novillo info;
class padre age sexo epoca partos;
model y=age sexo epoca partos/noint solution outp=p;
random padre*EPOCA/type=un solution;
run;

/*Obtención de las estimaciones de D4*/
proc mixed data=novillo info;
```

```
class padre age sexo epoca partos;
model y=age sexo epoca partos/noint solution outp=p;
random padre*PARTOS/type=un solution;
run;

/*Obtención de las estimaciones de D5*/
proc mixed data=novillo info;
class padre age sexo epoca partos;
model y=age sexo epoca partos/noint solution outp=p;
random padre*age/type=un solution;
run;

/*Cálculo de los BLUP*/
proc iml;
use D1;
use D2;
use D3;
use D4;
use D5;
read all into est;
X0=J(621,1,1);
X1=J(621,1,1);

/*Construcción de R*/
I1=d1;
I2=d2;
I2=d2;
I3=d3;
I4=d4;
I5=d5;
o12=J(20,40,0);
o13=J(20,40,0);
o14=J(20,69,0);
o15=J(20,60,0);
o21=J(40,20,0);
o23=J(40,40,0);
o24=J(40,69,0);
o25=J(40,60,0);
o31=J(40,20,0);
o32=J(40,40,0);
o34=J(40,69,0);
o35=J(40,60,0);
o41=J(69,20,0);
o42=J(69,40,0);
o43=J(69,40,0);
o45=J(69,60,0);
```

```
o51=J(60,20,0);
o52=J(60,40,0);
o53=J(60,40,0);
o54=J(60,69,0);
R1=I1||o12||o13||o14||o15;
R2=o21||I2||o23||o24||o25;
R3=o31||o32||I3||o34||o35;
R4=o41||o42||o43||I4||o45;
R5=o51||o52||o53||o54||I5;
D=R1//R2//R3//R4//R5;
run;

proc iml;
use sasuser.Z;
read all into z;
use d;
read all into d;
use salr;
read all into r;
use y; read all into y;
use sasuser.xx;
read all into x;
zt=t(z); V=z*d*zt+r;
xt=t(x); vm1=inv(v);
uno=xt*vm1*x;
unom=ginv(uno);
dos=vm1*x*unom*xt*vm1;
P=vm1-dos;
blup=d*zt*p*y;
print blup;
run;

create blup from blup;
append from blup;
data blup;
set blup;
```