Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1984, 229/S–08
Actes 8e Séminaire Lotharingien, p. 27–29

EINE BEMERKUNG ÜBER HOMOGENE MENGEN IN ENDLICHEN GRUPPEN

Adalbert KERBER

G. Kreweras betrachtete in seinem Vortrag *homogene Mengen*, die er wie folgt definierte. Ist $(M,\cdot)$ eine Menge mit innerer Verknüpfung, $m \in M$, dann sei

$$d(m) := |\{(x,y) \in t^2 \mid x.y = m\}|.$$

Ist diese Funktion $d(-)$ konstant auf $T \subseteq M$, so heißt T *homogen*. Ein Beispiel hierfür is die Menge T der n-Zyklen in der symmetrischen Gruppe S_n. Das folgt aus der Tatsache, daß diese Menge eine Konjugiertenklasse ist (Bermerkung von Plesken : jede Teilmenge T, auf der eine Gruppe von Automorphismen von M transitiv operiert, ist homogen!).

Genauer noch kann man für endliche Gruppen M sogar einen expliziten Ausdruck für $d(-)$ angeben, wenn T eine Konjugiertenklasse ist. Die Funktion $d(-)$ ergibt sich dabei als Linearkombination von gewöhnlichen irreduziblen Charakteren, also Klassenfunktionen, was die Homogenität von Konjugiertenklassen bestätigt.

Der gewünschte Ausdruck ist eine direkte Konsequenz des folgenden wesentlich allgemeineren Satzes ([1], vgl. auch [2] (5.3.46) oder [3] für weitere Details) :

Satz. — *Ist G eine endliche Gruppe, $h \in G$, und sind für $1 \leq j \leq k$ C_j Konjugiertenklassen von G, m_j und n_j natürliche Zahlen, dann ist die Anzahl der Lösungen $(g_1, \ldots, g_k) \in G^k$ der Gleichung*

$$g_1^{n_1} \ldots g_k^{n_k} = h,$$

mit den Nebenbedingungen $g_j^{m_j} \in C_j$ gleich

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{f^i}{|G|} \prod_{j=1}^{k} \Big(\frac{1}{f^i} \sum_{g_j} \zeta^i(g_j^{n_j}) \Big) \zeta^i(h^{-1}) \qquad (g_j^{m_j} \in C_j).$$

Dabei sind $\zeta^1, \ldots, \zeta^s$ die gewöhnlichen irreduziblen Charaktere von G, f^i deren Dimensionen : $f^i = \zeta^i(1)$.

Daraus ergibt sich als Spezialfall unmittelbar die

FORGERUNG. — *Ist $T := C$ eine Konjugiertenklasse von G, dann ist für jedes $t \in T$*

$$d(t) = \frac{|T|^2}{|G|} \sum_i \frac{\zeta^i(t)^2\, \zeta^i(t^{-1})}{f^i}.$$

Für die Klasse der n-Zyklen in S_n vereinfacht sich dies weiter dadurch, daß die einzigen irreduziblen Charaktere, die dort einen Wert ± 1 haben, die Charaktere $\zeta^{(n-r,1^r)}$ zu hakenförmigen Partitionen $(n-r, 1^r)$ sind. Für diese gilt

$$\zeta^{(n-r,1^r)}\big((1 \dots n)\big) = (-1)^r, \qquad \zeta^{(n-r,1^r)}(1) = \binom{n-1}{r}.$$

Das ergibt mit $|T| = (n-1)!$

FOLGERUNG. — *Man hat* $d\big((1 \dots n)\big) = \dfrac{(n-1)!}{n} \displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1}{r}^{-1}$.

Mit Hilfe des Ausdrucks für die alternierende Summe von Inversen von Binomialkoeffizienten, auf den BARON hinwies und für den dann ANDREWS und HOFBAUER Herleitungen angaben, folgt schießlich

$$d\big((1 \dots n)\big) = \begin{cases} \dfrac{2(n-1)!}{n+1}, & \text{falls } n \text{ ungerade;} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine von vornherein speziell auf S_n zugeschnittene Herleitung dieses Ergebnisses findet man auch in [4].

LITERATUR

[1] Kerber (A.) u. Wagner (B.). — Gleichungen in endlichen Gruppen, *Archiv d. Math.*, t. **35**, 1980, p. 252–262.
[2] James (G.D.) u. Kerber (A.). — *The representation theory of the symmetric group.* — Addison-Wesley, 1981.
[3] Kerber (A.) u. Thürlings (K.-J.). — Symmetrieklassen von Funktionen und ihre Abzählungstheorie II, Bayreuther Math. Schriften (in Vorbereitung).
[4] Stanley (R.). — Factorization of permutations into n-cycles, *Discrete Math.*, t. **37**, 1981, p. 255–262.

Adalbert Kerber,
Lehrstuhl II für Mathematik,
Universität Bayreuth,
Postfach 3008,
D-8580 Bayreuth.