# EINE KOMBINATORISCHE UNGLEICHUNG

Michael Drmota (Wien)

Abstract. Using the notion of $s$-discrepancy $D_s(u)$ of a word $u$ over a finite alphabet $A = \{a_1, \dots, a_\alpha\}$ (see [1,2]) the $s$-discrepancy of $u = (a_1 \cdots a_\alpha)^n$ is explicitly calculated.

Sei $A = \{a_1, \dots, a_\alpha\}$, $\alpha \geq 2$, ein endliches Alphabet und bezeichne $A^*$ die Menge aller endlichen Worte über $A$. Ein Wort $v = v_1 \cdots v_n$ $(v_i \in A)$ heißt Teilwort des Wortes $u = u_1 \cdots u_m$ $(u_i \in A)$, falls für jedes $k$ $(1 \leq k \leq n)$ ein $j_k$ $(j_1 < \cdots < j_n)$ mit $v_k = u_{j_k}$ existiert. Weiters bezeichne $(u; v)$ die Anzahl, wie oft $v$ als Teilwort in $u$ vorkommt und $|v|$ die Länge des Wortes $v$. Damit kann die $s$-Diskrepanz eines Wortes $u \in A^*$ definiert werden:

$$D_s(u) = \max_{|v|=s} \left| (u;v) \binom{|u|}{s}^{-1} - \alpha^{-s} \right| \qquad (1 \leq s \leq |u|).$$

Es soll nun die $s$-Diskrepanz eines Wortes $u = (a_1 \cdots a_\alpha)^n$ explizit berechnet werden. Der Spezialfall $\alpha = 2$ wurde bereits in [1] behandelt. In [2] wird gezeigt, daß

$$((a_1 \cdots a_\alpha)^n; v) = \binom{n + d(v)}{s}$$

gilt, wobei $d(v)$ die Anzahl der geschlossenen Zweierblöcke der Form $a_i a_{i+k}$, $1 \leq i \leq \alpha$, $1 \leq k \leq \alpha - i$, im Wort $v$ ist. Daraus folgt

$$\binom{n}{s} \leq ((a_1 \cdots a_\alpha)^n; v) \leq \binom{n + s - 1 - \left[\frac{s-1}{\alpha}\right]}{s},$$

wobei beide Extremfälle eintreten können. Kann man nun die Ungleichung

$$\binom{n + s - 1 - \left[\frac{s-1}{\alpha}\right]}{s} + \binom{n}{s} \geq 2 \binom{\alpha n}{s} \alpha^{-s} \tag{1}$$

zeigen, erhält man für die $s$-Diskrepanz die explizite Formel:

**SATZ.**

$$D_s\left((a_1 \cdots a_\alpha)^n\right) = \binom{n + s - 1 - \left[\frac{s-1}{\alpha}\right]}{s} \binom{\alpha n}{s}^{-1} - \alpha^{-s}. \tag{2}$$

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Zum Beweis von (1) betrachte man zunächst den Fall $n \geq s$. Schreibt man $s-1$ in der Form $s-1 = \alpha g + k$, $0 \leq k \leq \alpha - 1$, dann ist (1) äquivalent zu

$$\begin{aligned}(n+\alpha g+k-g)\cdots(n+1)+(n-g-1)\cdots(n-\alpha g-k)\\ \geq 2\left(n-\frac{1}{\alpha}\right)\cdots\left(n-1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(n-1-\frac{1}{\alpha}\right)\cdots\left(n-g-\frac{k}{\alpha}\right),\end{aligned} \tag{3}$$

wenn die gemeinsamen Faktoren gekürzt werden. Mit dem für $x \geq 0$ konvexen Polynom

$$f(x) = \prod_{j=1}^{(\alpha-1)g+k}\left(n-g-j+x\left(j+\frac{g}{2}\right)\right)$$

folgt aus der Jensenschen Ungleichung $f(0)+f(2) \geq 2f(1)$, das heißt

$$(n+\alpha g+k-g)\cdots(n+1)+(n-g-1)\cdots(n-\alpha g-k) \geq 2\left(n-\frac{g}{2}\right)^{(\alpha-1)g+k}. \tag{4}$$

(3) folgt dann aus (4), aus

$$((\alpha-1)g+k)\left(n-\frac{g}{2}\right) \geq (\alpha-1)g\left(n-\frac{g}{2}\right)+k\left(n-g-\frac{k+1}{2\alpha}\right)$$

und aus der Ungleichung zwischem dem arithmetischen und geometrischen Mittel.

Für den Fall $n < s$ gilt (1) ebenfalls. Dies kann man mit der Ungleichung

$$\prod_{i=1}^{j}(1+x_i) \geq 1+\sum_{i=1}^{j} x_i \qquad (x_i \geq 0)$$

und unmittelbarer Überprüfung des Falles $s = 3$ sofort nachweisen.

## Literatur

[1] P. Kirschenhofer und R. F. Tichy, *Gleichverteilung und Formale Sprachen*, SB Österr. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl. II **189** (1980), 291–319.

[2] P. Kirschenhofer und R. F. Tichy, *Gleichverteilte Folgen auf Diskreten Räumen*, in: Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 14$^{\text{éme}}$ Session (V. Strehl ed.), Publication de l'I.R.M.A. Strasbourg (1986), 89–108.