# RELÈVEMENT DES COEFFICIENTS BINÔMIAUX DANS LES VECTEURS DE WITT

Henri GAUDIER
*(Strasbourg)*

Le but de ce travail est de présenter certains éléments de l'anneau $\mathbf{W}(\mathbb{Z})$ des (gros) vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathbb{Z}$ qui jouissent de propriétés très comparables à celles des coefficients binômiaux : on démontre ainsi une formule du binôme et une formule de Pascal. Avec ces éléments on peut construire une $\mathbf{W}(\mathbb{Z})$-algèbre de puissances fractionnaires divisées.

**0. Rappels et notations**. — Rappelons tout d'abord la construction classique des vecteurs de Witt à coefficients dans un anneau $A$ commutatif unifère quelconque (*cf.* [C], [DG], [Gr], [H], [L], [B] auxquels nous renvoyons le lecteur pour davantage de détails; les travaux plus récents [DS], [MR] font intervenir d'autres constructions qui ne seront pas utilisées ici).

On considère l'ensemble $\mathbf{W}(A) = A^{\mathbb{N}^*}$, le groupe $\Lambda(A) = 1+T\,A[[T]]$, groupe multiplicatif des séries formelles à coefficients dans $A$ de terme constant égal à 1, et l'anneau $\mathrm{gh}(A) = A^{\mathbb{N}^*}$ avec sa structure d'anneau produit. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{W}(A) \arrow[r, "e"] \arrow[d, "w"'] & \Lambda(A) \arrow[d, "\partial"'] \\ \mathrm{gh}(A) \arrow[r, "\iota"] & A[[T]] \end{tikzcd}$$

où les applications sont définies par :

$$e(a_1, \ldots, a_n, \ldots) = \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1 - a_n T^n},$$

$$\partial(s(T)) = \frac{s'(T)}{s(T)} = \frac{d}{dT} \ln s(T),$$

$$\iota(c_1, \ldots, c_n, \ldots) = \sum_{n\geq 1} c_n T^{n-1},$$
$$w_r(a_1, \ldots, a_n, \ldots) = \sum_{d|r} d\, a_d^{r/d}.$$

On sait que $e$ et $\iota$ sont toujours des bijections, que $w$ et $\partial$ le sont si $A$ est une algèbre sur $\mathbb{Q}$, et dans ce cas on a :

$$\partial^{-1}(u(T)) = \exp\Big(\int_0^T u(T)dT\Big).$$

On sait également qu'il existe sur $\mathbf{W}(A)$ et $\Lambda(A)$ une unique structure d'anneau telle que les quatre applications ci-dessus soient des morphismes d'anneaux. On prend pour cela dans $A[[T]]$ l'addition usuelle et le produit d'Hadamard ($\sum u_n T^n \times \sum v_n T^n = \sum u_n v_n T^n$). Dans $\Lambda(A)$ la somme est le produit des séries formelles et le produit est l'unique opération notée $*$, distributive par rapport à la somme dans $\Lambda(A)$ et telle que :

$$\frac{1}{1-xT} * \frac{1}{1-yT} = \frac{1}{1-xy\,T}.$$

On notera $\sigma : A \to \mathbf{W}(A)$ le morphisme de Teichmuller défini par : $\sigma(a) = (a, 0, \ldots)$. Ce morphisme est compatible avec la multiplication et on a :

$$w\big(\sigma(a)\big) = (a, a^2, \ldots, a^n, \ldots),$$
$$e\big(\sigma(a)\big) = \frac{1}{1-aT},$$
$$\sigma(a).(x_1, \ldots, x_n, \ldots) = (ax_1, \ldots, a^n x_n, \ldots).$$

Pour $n \geq 1$ on appelle morphismes de décalage, et on note $V_n$ les morphismes de $\Lambda(A)$ définis par : $V_n\big(s(T)\big) = s(T^n)$. On note également $V_n$ les morphismes obtenus en transportant $V_n$ par les morphismes $e$, $\partial$ et $w$. On a donc dans $\mathbf{W}(A)$ :

$$V_n(a_1, \ldots, a_n, \ldots) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ fois}}, a_1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ fois}}, a_2, 0 \ldots),$$

dans $\mathrm{gh}(A)$ on a :

$$V_n(c_1, \ldots, c_n, \ldots) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ fois}}, nc_1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ fois}}, nc_2, 0 \ldots),$$

et dans $A[[T]]$ :

$$V_n\big(u(T)\big) = nT^{n-1}u(T^n).$$

Les morphismes de décalage sont des endomorphismes des groupes additifs des quatre anneaux considérés.

On appelle morphismes de Frobenius, et on note $F_n$ les uniques endomorphismes des quatre anneaux tels que :

dans $\mathbf{W}(A)$ $\quad F_n\big(\sigma(a)\big) = \sigma(a^n)$,

dans $\Lambda(A)$ $\quad F_n\big((1-aT)^{-1}\big) = (1-a^nT)^{-1}$,

dans $\mathrm{gh}(A)$ $\quad F_n(c_1, c_2, \ldots) = (c_n, c_{2n}, \ldots)$.

Les morphismes $F_n$ et $V_n$ vérifient les relations :

$$V_nV_m = V_{nm}, \qquad F_nF_m = F_{nm},$$
$$V_nF_m = F_mV_n \quad \text{si } (m,n)=1,$$
$$V_n\big(x\,F_n(y)\big) = V_n(x)\,y,$$
$$F_nV_n = n\,Id, \qquad V_nF_n(x) = V_n(1)\,x,$$
$$\big(\text{dans } \Lambda(A) \ : \ F_nV_n\big(s(T)\big) = s(T)^n, \quad V_nF_n\big(s(T)\big) = (1-T^n) * s(T)\ \big).$$

On désignera par $(i,j)$ et par $[i,j]$ le pgcd et le ppcm des deux entiers $i$ et $j$, par $(\!(i,j)\!)$ le coefficient binômial $\binom{i+j}{i}$ et par $(\!(i_1,\ldots,i_r)\!)$ le coefficient multinômial $\binom{i_1+\cdots+i_r}{i_1,\ldots,i_r}$. Enfin $\mathbb{Q}_+$ désignera l'ensemble des nombres rationnels positifs ou nuls, et si $i$ et $j$ sont deux rationnels, $d(i)$ désignera le dénominateur de $i$ et on posera $d(i,j) = [d(i), d(j)]$.

## 1. Coefficients $*$-binômiaux et formule du $*$-binôme

Définition 1.1. — *Soient $i$ et $j$ dans $\mathbb{N}$ on appelle coefficient $*$-binômial et on note ${}^*(\!(i,j)\!)$ le vecteur de Witt à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que $w_n\big({}^*(\!(i,j)\!)\big) = (\!(ni,nj)\!)$.*

Dans ce paragraphe on montrera que ces coefficients $*$-binômiaux ont toutes leurs composantes entières, et cela nous conduira à démontrer une formule du binôme pour ces coefficients.

Remarquons tout d'abord qu'il résulte immédiatement de la définition que

$$F_k\big({}^*(\!(i,j)\!)\big) = {}^*(\!(ki,kj)\!). \tag{1.1.1}$$

On va alors étendre la définition des coefficients $*$-binômiaux à des indices fractionnaires.

Définition 1.2. — *Soient $i$ et $j$ dans $\mathbb{Q}_+$ on appelle également coefficient $*$-binômial le vecteur de Witt à coefficients dans $\mathbb{Q}$*

$${}^*(\!(i,j)\!) = \frac{1}{d(i,j)} V_{d(i,j)}\big({}^*(\!(i\,d(i,j), j\,d(i,j))\!)\big). \tag{1.2.1}$$

Il est facile de vérifier que la formule (1.1.1) reste vraie si $i$ et $j$ sont des rationnels. En particulier on a :

$$F_{d(i,j)}\big({}^*(\!(i,j)\!)\big) = {}^*(\!(i\,d(i,j), j\,d(i,j))\!). \tag{1.2.2}$$

Il est également facile de voir que l'on a :

$$\begin{aligned} w_n\big({}^*(\!(i,j)\!)\big) &= (\!(ni,nj)\!) \qquad \text{si} \quad d(i,j)\,|\,n, \\ &= 0 \qquad\qquad\quad \text{sinon.} \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

On remarquera également que ${}^*(\!(0,i)\!) = \dfrac{1}{d(i)} V_{d(i)}(1)$.

Proposition 1.3. — *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ alors dans $\mathbf{W}(\mathbb{Q}[X,Y])$ on a l'égalité :*

$$\sigma\big((X+Y)^k\big) = \sum_{d\in\mathbb{N}^*} \sum_{i,j} V_d\Big(\frac{1}{d}{}^*(\!(i,j)\!)\,\sigma(X^iY^j)\Big), \tag{1.3.1}$$

*où la somme est étendue aux indices $i$ et $j$ entiers tels que $i+j = k\,d$ et $(i,j,d) = 1$.*

Puisque l'on est en caractéristique 0, il suffit de transformer les deux membres par $w$. Or si on désigne par $D$ le membre de droite, on a :

$$\begin{aligned} w_n(D) &= \sum_{d\in\mathbb{N}^*} \sum_{i,j} w_n V_d\Big(\frac{1}{d}{}^*(\!(i,j)\!)\,\sigma(X^iY^j)\Big), \\ &= \sum_{d|n} \sum_{i,j} w_n V_d\Big(\frac{1}{d}{}^*(\!(i,j)\!)\,\sigma(X^iY^j)\Big), \\ &= \sum_{d|n} \sum_{i,j} w_{n/d}\big({}^*(\!(i,j)\!)\,\sigma(X^iY^j)\big), \\ &= \sum_{d|n} \sum_{i,j} w_{n/d}\big({}^*(\!(i,j)\!)\big) w_{n/d}\big(\sigma(X^iY^j)\big), \\ &= \sum_{d|n} \sum_{i,j} (\!(ni/d, nj/d)\!)\, X^{in/d}Y^{jn/d}, \\ &= \sum_{ld=n} \sum_{\substack{i+j=dk \\ (i,j,d)=1}} (\!(li,lj)\!)\, X^{li}Y^{lj}, \\ &= \sum_{\substack{li+lj=nk \\ (li,lj,n)=l}} (\!(li,lj)\!)\, X^{li}Y^{lj}, \\ &= (X+Y)^{nk} = w_n\big(\sigma(X+Y)^k\big). \end{aligned}$$

1.4. — Notons alors ${}^*(\!(i,j;d)\!)_r$ les composantes de $\frac{1}{d}{}^*(\!(i,j)\!)$, on a alors :

Corollaire . — *Dans* $\Lambda(\mathbb{Q}[X,Y])$ *on a l'identité :*

$$\frac{1}{1-(X+Y)^kT} = \prod_{\substack{d\geq 1\\ r\geq 1}} \prod_{\substack{i+j=dk\\ (i,j,d)=1}} \frac{1}{1-{}^*(\!(i,j;d)\!)_r\, X^{ri}Y^{rj}T^{rd}}. \tag{1.4.1}$$

Cette identité s'obtient en appliquant à (1.2.1) l'isomorphisme $e$.

Corollaire 1.5. — **a**) *Si $i$, $j$ et $d$ sont des entiers tels que $d$ divise $i+j$ et que $(i,j,d)=1$ alors $\frac{1}{d}{}^*(\!(i,j)\!)$ est dans $\mathbf{W}(\mathbb{Z})$ ;*
**b**) *Si $i$ et $j$ sont dans $\mathbb{Q}_+$ et si $i+j$ est entier, alors ${}^*(\!(i,j)\!)$ est dans $\mathbf{W}(\mathbb{Z})$.*

En effet pour tout entier $k$ il existe une unique décomposition

$$1-(X+Y)^kT = \prod_{s\geq 1}\prod_{\alpha+\beta=ks}(1-u_{\alpha,\beta}X^\alpha Y^\beta T^s),$$

et il est clair que les $u_{\alpha,\beta}$ sont des entiers. Or la formule (1.4.1) nous donne une telle décomposition, par conséquent si $i$ et $j$ sont des entiers si $d|\, i+j$ et si $(i,j,d)=1$ alors les ${}^*(\!(i,j;d)\!)_r$ sont entiers, donc $\frac{1}{d}{}^*(\!(i,j)\!)$ est dans $\mathbf{W}(\mathbb{Z})$, ce qui démontre **a**). Et ${}^*(\!(i/d,j/d)\!) = V_d\big(\frac{1}{d}{}^*(\!(i,j)\!)\big)$ est aussi dans $\mathbf{W}(\mathbb{Z})$, ce qui démontre **b**).

Corollaire 1.6 (Formule du binôme). — *Soit $k$ dans $\mathbb{Q}_+$ on a la relation :*

$${}^*(\!(0,k)\!)\,\sigma(X+Y)^k = \sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\in\mathbb{Q}_+}} {}^*(\!(i,j)\!)\,\sigma(X^iY^j). \tag{1.6.1}$$

Remarquons qu'une telle formule fait apparaître des puissances fractionnaires de $X$ et $Y$. Ceci n'est qu'apparent car lorsqu'on fait le produit ${}^*(\!(i,j)\!)\,\sigma(X^iY^j)$, puisque ${}^*(\!(i,j)\!)$ est dans l'image de $V_{d(i,j)}$ ses composantes sont nulles sauf celles d'indice un multiple de $d(i,j)$. N'apparaîtront alors que des puissances de $(X^iY^j)^{d(i,j)}$ qui sont des puissances entières en $X$ et $Y$. Une remarque analogue peut être faite pour le premier membre, ce qui fait que l'on peut considérer que la relation (1.6.1) est écrite dans $\mathbf{W}(\mathbb{Z})$.

Si $k$ est entier il suffit de remplacer les coefficients $*$-binômiaux fractionnaires par leur définition pour constater que (1.6.1) n'est qu'une réécriture de (1.3.1). Lorsque $k$ n'est pas entier, on constate qu'il suffit de vérifier l'identité après transformation par $F_{d(k)}$, et on est ramené au cas précédent.

1.7. — On peut déduire de (1.6.1) des relations entre les coefficients $*$-binômiaux comme on le fait à partir de la formule classique du binôme. Par exemple, si dans (1.6.1) on remplace $X$ et $Y$ par 1, on obtient :

$$ {}^{*}(\!(0,k)\!)\sigma(2^k) = \sum_{i+j=k} {}^{*}(\!(i,j)\!). $$

**2. Coefficients $*$-multinômiaux et $*$-factorielles.** — La définition des coefficients $*$-binômiaux peut s'étendre aux coefficients multinômiaux. On pourra alors définir une notion de $*$-factorielle, cela permettra d'exprimer les coefficients $*$-binômiaux et $*$-multinômiaux en fonctions des $*$-factorielles par des formules classiques.

Définition 2.1. — *Soient $i_1, \ldots, i_h$ des entiers, on appelle coefficient $*$-multinômial et on note ${}^{*}(\!(i_1,\ldots,i_h)\!)$ le vecteur de Witt à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que :*

$$ w_n\big({}^{*}(\!(i_1,\ldots,i_h)\!)\big) = (\!(ni_1,\ldots,ni_h)\!). $$

*Si $i_1,\ldots,i_h$ sont dans $\mathbb{Q}_+$, et si $d = d(i_1,\ldots,i_h) = [d(i_1),\ldots,d(i_h)]$, on posera :*

$$ {}^{*}(\!(i_1,\ldots,i_h)\!) = \frac{1}{d} V_d\big({}^{*}(\!(di_1,\ldots,di_h)\!)\big). $$

Les résultats du paragraphe 1 se généralisent alors immédiatement :

Proposition 2.2

**a)** (formule du multinôme) *Pour tout $k$ dans $\mathbb{Q}_+$ :*

$$ {}^{*}(\!(0,k)\!)\sigma(X_1+\cdots+X_h)^k = \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_h=k\\ i_1,\ldots,i_h\in\mathbb{Q}_+}} {}^{*}(\!(i_1,\ldots,i_h)\!)\sigma(X_1^{i_1}\ldots X_h^{i_h})\,; $$

**b)** *Si $i_1+\cdots+i_h \in \mathbb{N}$, alors ${}^{*}(\!(i_1,\ldots,i_h)\!) \in \mathbf{W}(\mathbb{Z})$.*

Définition 2.3. — *Soit $h$ dans $\mathbb{N}$, on appelle $*$-factorielle de $h$ le vecteur de Witt*

$$ {}^{*}h! = {}^{*}(\!(\underbrace{1,\ldots,1}_{h \text{ fois}})\!). $$

On a donc $w_n({}^{*}h!) = (\!(\underbrace{n,\ldots,n}_{h\text{ fois}})\!) = \dfrac{nh!}{n!^h}$ , et en particulier $w_1({}^{*}h!) = h!$.

Proposition 2.4. — *Pour $i_1, \ldots, i_h, k$ et $n$ dans $\mathbb{N}$ on a :*

$$ {}^*(\!(i_1, \ldots, i_h)\!) = \frac{{}^*(i_1 + \cdots + i_h)!}{{}^*i_1! \ldots {}^* i_h!}, \tag{2.4.1} $$

$$ F_k({}^*n!) = \frac{{}^*kn!}{{}^*k!^n}. \tag{2.4.2} $$

Pour démontrer 2.4.1, appliquons $w_n$ au second membre, il vient :

$$ w_n \left( \frac{{}^*(i_1 + \cdots + i_h)!}{{}^*i_1! \ldots {}^* i_h!} \right) = \frac{\big(n(i_1 + \cdots + i_h)\big)!}{n!^{i_1 + \cdots + i_h}} \cdot \frac{n!^{i_1}}{(ni_1)!} \cdots \frac{n!^{i_h}}{(ni_h)!}. $$

Après simplification on obtient bien $w_n\big({}^*(\!(i_1, \ldots, i_h)\!)\big)$. Pour la formule 2.4.2 on a $F_k({}^*n!) = F_k\big({}^*(\!(1, \ldots, 1)\!)\big) = {}^*(\!(k, \ldots)\!)$ et on applique 2.4.1.

2.5. — Pour obtenir une généralisation de 2.4 lorsque $i_1, \ldots, i_h$ sont dans $\mathbb{Q}_+$, il faut définir les $*$-factorielles de rationnels. Soit alors $i \in \mathbb{Q}_+$ posons :

$$ {}^*i! = \frac{1}{d(i)} V_{d(i)} \left( \frac{{}^*id(i)!}{{}^*d(i)!^i} \right). \tag{2.5.1} $$

Alors ${}^*i!$ est un vecteur de Witt à coefficients dans une extension convenable de $\mathbb{Q}$ (R par exemple), puisqu'il a fallu prendre des puissances fractionnaires. Remarquons que l'on a :

$$ F_{d(i)}({}^*i!) = \frac{{}^*id(i)!}{{}^*d(i)!^i}, $$

et donc

$$ F_{kd(i)}({}^*i!) = F_k \left( \frac{{}^*id(i)!}{{}^*d(i)!^i} \right) = \frac{{}^*ikd(i)!}{{}^*k!^{id(i)}} \cdot \left( \frac{{}^*k!^{d(i)}}{{}^*kd(i)!} \right)^i = \frac{{}^*ikd(i)!}{{}^*kd(i)!^i}, $$

ce qui généralise bien 2.4.2. La formule 2.4.1 devient alors :

Proposition 2.6. — *Soient $i_1, \ldots, i_h$ dans $\mathbb{Q}_+$ et $d = d(i_1, \ldots, i_h)$, alors :*

$$ {}^*(\!(i_1, \ldots, i_h)\!) = \frac{{}^*(\!(0, d^{-1})\!) {}^*(i_1 + \cdots + i_h)!}{{}^*i_1! \ldots {}^* i_h!}. \tag{2.6.1} $$

On a en effet :

$$ \begin{aligned} {}^*(\!(i_1, \ldots, i_h)\!) &= \frac{1}{d} V_d\big({}^*(\!(di_1, \ldots, di_h)\!)\big) \\ &= \frac{1}{d} V_d \left( \frac{{}^*\big(d\,(i_1 + \cdots + i_h)\big)!}{{}^*di_1! \ldots {}^* di_h!} \right). \end{aligned} $$

En utilisant la généralisation de 2.4.2, on a alors :

$$\begin{aligned}
{}^*(\!(i_1,\ldots,i_h)\!) &= \frac{1}{d}V_d\left(\frac{F_d\big({}^*(i_1+\cdots+i_h)!\big)\,{}^*d!^{i_1+\cdots+i_h}}{F_d({}^*i_1!)\,{}^*d!^{i_1}\ldots F_d({}^*i_h!)\,{}^*d!^{i_h}}\right),\\
&= \frac{1}{d}V_dF_d\left(\frac{{}^*(i_1+\cdots+i_h)!}{{}^*i_1!\ldots{}^*i_h!}\right),\\
&= \frac{1}{d}V_d(1)\cdot\frac{{}^*(i_1+\cdots+i_h)!}{{}^*i_1!\ldots{}^*i_h!}.
\end{aligned}$$

2.7. *Remarque.* — La formule 2.6.1 est imprécise. En effet les $*$-factorielles qui apparaîssent au dénominateur ne sont pas inversibles : leurs composantes-fantômes comportent beaucoup de zéros, puisque ${}^*i!$ est construit à l'aide de $V_{d(i)}$. Mais la multiplication du numérateur par ${}^*(\!(0,d^{-1})\!)$ fait apparaître dans celui-ci les mêmes composantes-fantômes nulles que dans le dénominateur et dans le coefficient $*$-multinômial.

2.8. — Terminons ce paragraphe par une propriété de divisibilité des $*$-factorielles :

Proposition . — *Soit $k$ un entier alors ${}^*k!/k!$ est dans $\mathbf{W}(\mathbb{Z})$.*

D'après 2.4.1 on a en effet :

$$ {}^*(\!(k-1,1)\!)\,{}^*(\!(k-2,1)\!)\;\ldots\;{}^*(\!(1,1)\!) = {}^*\,k!. $$

Or pour tout entier $i$, on a :

$$ {}^*(\!(\,\frac{i-1}{i},\frac{1}{i}\,)\!) = \frac{1}{i}V_i\big({}^*(\!(i-1,1)\!)\big), $$

ce qui montre que ${}^*(\!(i-1,i)\!)$ est divisible par $i$ dans $\mathbf{W}(\mathbb{Z})$.

Remarquons que l'on a $w_n({}^*k!/k!) = (\!(n,\ldots,n)\!)/k! = \dfrac{nk!}{k!\,n!^k}$. Ce coefficient (entier) intervient dans la théorie des puissances divisées (*cf.* [Be], [R]).

**3. La formule de Pascal.** — Il est bien connu que les coefficients binômiaux ordinaires vérifient la relation $(\!(i,j)\!) = (\!(i-1,j)\!) + (\!(i,j-1)\!)$, qui permet, lorsque les coefficients sont rangés dans le triangle de Pascal, de calculer chaque coefficient comme somme de deux coefficients situés sur la ligne supérieure. En répétant le procédé, on peut exprimer un coefficient binômial en fonction de ceux qui se trouvent $m$ lignes plus haut (*cf.* [K]) :

$$ (\!(i,j)\!) = \sum_{k+l=m} (\!(k,l)\!)\,(\!(i-k,j-l)\!) \qquad \text{si } m \le i+j. \tag{3.0.2} $$

C'est cette formule que nous allons étendre aux coefficients $*$-binômiaux.

PROPOSITION 3.1. — *Soient $i$ et $j$ des entiers tels que $m \leq i+j$ alors :*

$$^*\!(\!(i,j)\!) = \sum_{\substack{k+l=m \\ k,l,i-k,j-l\in\mathbb{Q}_+}} {}^*\!(\!(k,l)\!)\, {}^*\!(\!(i-k,j-l)\!). \tag{3.1.1}$$

Il suffit pour le démontrer d'appliquer $w_n$ aux deux membres. Si $d$ est le dénominateur de $k, l, i-k$ et $j-l$ on obtient :

$$\begin{aligned} X &= w_n \left( \sum {}^*\!(\!(k,l)\!)\, {}^*\!(\!(i-k,j-l)\!) \right), \\ &= \sum w_n\big({}^*\!(\!(k,l)\!)\big) w_n\big({}^*\!(\!(i-k,j-l)\!)\big), \\ &= \sum_{\substack{k+l=m \\ d\,|\,n}} (\!(nk,nl)\!)(\!(ni-nk,nj-nl)\!)\,; \end{aligned}$$

ce qui s'écrit, si l'on pose $k' = nk$, $l' = nl$ et $m' = nm$ :

$$\begin{aligned} &= \sum_{k'+l'=m'} (\!(k',l')\!)(\!(ni-k',nj-l')\!), \\ &= (\!(ni,nj)\!). \end{aligned}$$

**4. Algèbre des puissances fractionnaires divisées**. — Soit $A$ un anneau (commutatif avec 1) ; si on désigne par $P(A)$ le groupe $A^{\mathbb{N}}$, de base canonique $\varepsilon_i$, muni de la multiplication $(x\,\varepsilon_i)(y\,\varepsilon_j) = (\!(i,j)\!)xy\,\varepsilon_{i+j}$, on sait que $P(A)$ est une algèbre sur $A$ appelée algèbre des puissances divisées, car si $A$ est une algèbre sur $\mathbb{Q}$ on a $\varepsilon_i = \varepsilon_1^i/i!$, et donc $P(A)$ est isomorphe à $A[[\varepsilon_1]]$. Dans ce paragraphe nous allons étendre cette construction à des puissances fractionnaires en utilisant les coefficients $*$-multinômiaux.

DÉFINITION 4.1. — *Soit $A$ une algèbre sur $\mathbb{Q}$, le groupe $\mathbf{W}P(A) = \mathbf{W}(A)^{\mathbb{Q}_+}$, de base canonique $(f_i)$, muni de la multiplication*

$$(x\, f_i)(y\, f_j) = {}^*\!(\!(i,j)\!)xy\, f_{i+j},$$

*est appelé la pseudo-algèbre des puissances fractionnaires divisées.*

Il est facile de voir que cette algèbre est associative et commutative, mais il n'y a pas d'élément unité : le seul candidat possible est $f_0$ et :

$$f_0 \cdot y\, f_j = {}^*\!(\!(0,j)\!)y\, f_j \neq y\, f_j.$$

4.2. — La pseudo-algèbre $\mathbf{W}P(A)$ a pourtant des propriétés analogues à celles de l'algèbre des puissances divisées ordinaires :

Proposition . — *Si $i$ et $j$ sont dans $\mathbb{Q}_+$ ,*

$$(x\,{}^*i!\,f_i)\,(y\,{}^*j!\,f_j) = {}^*(\!(0, d(i,j)^{-1})\!)\,xy\,{}^*(i+j)!\,f_{i+j}.$$

Cela découle immédiatement de 2.6.1.

On voit donc qu'on ne retrouve la formule classique que pour les indices entiers : dans ce cas $x^i\,{}^*i!\,f_i = (x\,f_1)^i$. Pour un indice fractionnaire on aura :

$$\big(x^i\,{}^*i!\,f_i\big)^{d(i)} = {}^*(\!(0,i)\!)(x\,f_1)^{id(i)}.$$

4.3. — Considérons alors $\mathbf{W}\alpha(A)$ une autre copie de $\mathbf{W}(A)^{\mathbb{Q}_+}$, notons $(e_i)$ sa base canonique, et considérons le morphisme

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ \mathbf{W}\alpha(A) &\to \mathbf{W}P(A) \\ x\,e_i &\mapsto \frac{1}{d(i)}V_{d(i)}(x)\,f_i. \end{aligned}$$

On a alors :

Lemme . — *Le morphisme $\varphi$ est injectif et son image est égale à $f_0\,\mathbf{W}P(A)$ ; c'est une algèbre sur $\mathbf{W}(A)$ d'élément unité $f_0 = \varphi(e_0)$.*

On a en effet :

$$\varphi(x\,e_i) = \frac{1}{d(i)}V_{d(i)}(x)f_i = f_0\,\frac{1}{d(i)}V_{d(i)}(x)f_i,$$

et donc $\varphi(\mathbf{W}\alpha(A)) \subset f_0\,\mathbf{W}P(A)$ ; et inversement

$$f_0\,yf_i = \frac{1}{d(i)}V_{d(i)}(1)y\,f_i = \frac{1}{d(i)}V_{d(i)}\big(F_{d(i)}(y)\big)f_i = \varphi\big(F_{d(i)}(y)e_i\big).$$

Et le reste du lemme est immédiat.

4.4. — Puisque le morphisme $\varphi$ est injectif, on peut transporter la multiplication sur $\mathbf{W}\alpha(A)$ qui devient ainsi une $\mathbf{W}(A)$-algèbre pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre $A$.

Théorème . — *L'algèbre $\mathbf{W}\alpha(A)$ est définie pour tout anneau commutatif $A$. On l'appellera l'algèbre des puissances fractionnaires divisées.*

Reprenant le calcul précédent, on voit que l'on a dans $\mathbf{W}\alpha(A)$ :

$$(xe_i)(ye_j) = V_{\delta(i,j)}\Big(\frac{1}{\delta(i,j)}\,{}^*(\!(id(i,j), jd(i,j))\!)F_{d(i,j)/d(i)}(x) \\ \times F_{d(i,j)/d(j)}(y)\Big)e_{i+j}. \quad (4.4.1)$$

où $\delta(i,j) = d(i,j)/d(i+j)$.

Or $id(i,j)$ et $jd(i,j)$ sont premiers entre eux, et $\delta(i,j)$ divise leur somme, d'après (1.5.a) ; ${}^*(\!(id(i,j), jd(i,j))\!)/\delta(i,j)$ est donc dans $\mathbf{W}(\mathbb{Z})$. La formule 4.4.1 définit donc une multiplication sur $\mathbf{W}\alpha(A)$ pour tout anneau $A$. Par le principe du prolongement algébrique des identités, $\mathbf{W}\alpha(A)$ est donc une algèbre sur $\mathbf{W}(A)$ pour tout anneau $A$.

Proposition 4.5 . — *Pour tout anneau A, l'application*

$$\begin{aligned} {}^*\exp : A &\to \mathbf{W}\alpha(A) \\ x &\mapsto \sum_{i\in\mathbb{Q}_+} \sigma(x^{id(i)})e_i \end{aligned}$$

*vérifie la relation :*

$$ {}^*\exp(a+b) = {}^*\exp a \ {}^*\exp b.$$

On a en effet :

$$\begin{aligned} \varphi\big(\sigma(x^{id(i)})e_i\big) &= \frac{1}{d(i)}V_{d(i)}\big(\sigma(x^{id(i)})\big)f_i, \\ &= \frac{1}{d(i)}V_{d(i)}(1)\sigma(x^i)f_i, \end{aligned}$$

avec un abus d'écriture (*cf.* 1.6). Par conséquent :

$$\begin{aligned} \varphi\big({}^*\exp(a)\ {}^*\exp(b)\big) &= \varphi({}^*\exp a)\varphi({}^*\exp b), \\ &= \sum_{i,j\in\mathbb{Q}_+} \big({}^*(\!(0,i)\!)\sigma(a^i)f_i\big)\ \big({}^*(\!(0,j)\!)\sigma(a^j)f_j\big)\,, \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Q}_+}\Big(\sum_{i+j=k} {}^*(\!(0,i)\!)^*(\!(0,j)\!)^*(\!(i,j)\!)\sigma(a^ib^j)\Big)f_k, \end{aligned}$$

or ${}^*(\!(0,i)\!)^*(\!(0,j)\!) = {}^*(\!(0, d(i,j)^{-1})\!)$ qui est neutre pour ${}^*(\!(i,j)\!)$, donc :

$$= \sum_{k\in\mathbb{Q}_+}\Big(\sum_{i+j=k} {}^*(\!(i,j)\!)\sigma(a^ib^j)\Big)f_k,$$

et en utilisant la formule du binôme (1.6.1) :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k\in\mathbb{Q}_+} {}^*(\!(0,k)\!)\sigma(a+b)^k f_k,\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Q}_+} \frac{1}{d(k)} V_{d(k)}\big(\sigma(a+b)^{kd(k)}\big) f_k,\\
&= \varphi\big({}^*\exp(a+b)\big).
\end{aligned}$$

C'est cette propriété qui est à l'origine de l'introduction de l'algèbre $\mathbf{W}\alpha$ : sous certaines conditions elle permet de construire la $\mathbf{W}$-algèbre de groupe du groupe additif. (Pour davantage de détails sur ce point, le lecteur pourra se reporter à [Ga].)

**5. Remarques**

5.1. — Soit $n$ un entier, on a vu que ${}^*n!/n!$ est un vecteur de Witt à coefficients entiers, par conséquent son image par le morphisme $e$ est dans $\Lambda(\mathbb{Z})$ ; autrement dit, la série formelle

$$e\big({}^*n!/n!\big) = \exp\Big(\sum_{i\geq 1} \frac{ni!}{n!\, i!^n} \frac{T^i}{i}\Big)$$

est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On peut alors se demander s'il est possible d'exprimer la somme de cette série à l'aide des fonctions usuelles. Pour $n = 2$ on a :

$$e\big({}^*2!/2!\big) = \exp\Big(\sum_{i\geq 1} \frac{2i!}{i!\, i!} \frac{T^i}{2i}\Big).$$

On reconnaît une série qui diffère de peu de la série génératrice des nombres de Catalan (*cf.* [Co]). Un calcul simple donne :

$$e\big({}^*2!/2!\big) = \left(\frac{1+\sqrt{1-4T}}{2}\right)^{-1}.$$

Pour $n \geq 3$ le problème est ouvert. Bien entendu, trouver une expression simple pour $e({}^*n!/n!)$ équivaut à en trouver une pour $e({}^*(\!(i_1,\ldots,i_h)\!))$.

5.2. — Tous les coefficients $*$-multinômiaux dont les indices sont entiers ont leurs composantes-fantômes dans $\mathbb{N}$. Leurs images par $e$ sont donc dans $\Lambda(\mathbb{N})$. La table qui suit laisse penser que dans $\mathbf{W}(\mathbb{Z})$ aussi toutes les composantes sont positives. Les méthodes de [DS] ou [MR] pouraient permettre de le démontrer.

5.3. — On a vu en 2.8 que $n!$ divise ${}^*n!$. On peut, de la même façon se demander si $(\!(i,j)\!)$ divise ${}^*(\!(i,j)\!)$. Il suffit de prendre $i = j = 2$ pour voir que cette propriété est fausse. Le mieux que l'on pourrait espérer serait que ${}^*(\!(i,j)\!)$ soit divisible par le pgcd des $(\!(ni,nj)\!)$.

*Remerciements.* — Les remarques et questions de Ch. Siebeneicher m'ont permis d'améliorer certains résultats présentés ici. Je l'en remercie vivement.

Références

[B] Bourbaki N. — *Algèbre Commutative chap.9.* — Paris, Masson, 1983.

[Be] Berthelot P. — *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique* $p > 0$. — Berlin, Springer Verlag, 1974 (*Lecture Notes in Math.*, **407**).

[C] Cartier P. — Groupes formels associés aux anneaux de Witt généralisés, *C.R.A.S.*, t. **265**, 1967, p. 49-52.

[Co] Comtet L. — *Analyse Combinatoire, t.1.* — Paris, P.U.F. , 1970.

[DG] Demazure M., Gabriel P. — *Groupes algébriques.* — Paris, Masson et Amsterdam, North Holland, 1970.

[DS] Dress A., Siebeneicher Ch. — The Burnside Ring of the infinite cyclic Group and its relation to the Necklace Algebra, $\lambda$-Rings and the universal Ring of Witt Vectors, *(à paraître).*

[G] Grothendieck A. — La théorie des classes de Chern, *Bull. Soc. Math. Fr*, t. **86**, 1958, p. 137-154.

[Ga] Gaudier H. — Algèbres de groupe du groupe additif, *Bull. Soc. Math. Fr. (à paraître).*

[H] Hazewinkel M. — *Formals groups and its applications.* — New-York, Academic Press, 1978.

[K] Knuth D.E. — *The art of computer programming, Vol.1.* — Reading, Addison-Wesley, 1968.

[Ks] Knutson D. — $\lambda$-Rings and the representation Theory of the symmetric Group. — Berlin, Springer Verlag, 1973 (*Lecture Notes in Math.*, **308**).

[L] Lang S. — *Algebra.* — Reading, Addison-Wesley, 1965.

[M] Macdonald I.G. — *Symmetric Functions and Hall Polynomials.* — Oxford, Oxford University Press (Clarendon), 1979.

[MR] Metropolis N., Rota G.C. — Witt vectors and the algebra of Necklaces, *Advances in Math*, t. **50**, 1983, p. 95-125.

[R] Roby N. — Les algèbres à puissances divisées, *Bull.Soc. Math. Fr*, t. **89**, 1965, p. 75-91.

| $n$ | $^*n!$ |
|---|---|
| 2 | $(2,\ 1,\ 4,\ 13,\ 44,\ 135,\ 472,\ 1\,492,\ 5\,324,\ 17\,405,\ 63\,944,\ 215\,096,\ 799\,416,\ 2\,752\,909,\ 10\,310\,384,\ 36\,443\,256,\ 137\,263\,244,\ 489\,166\,324,\ 1\,860\,249\,448,\ 6\,739\,795\,717,\ \ldots)$ |
| 3 | $(6,\ 27,\ 488,\ 7\,974,\ 149\,796,\ 2\,725\,447,\ 56\,970\,432,\ 1\,151\,053\,821,\ 25\,279\,412\,332,\ 543\,871\,341\,927,\ 12\,411\,512\,060\,544,\ 278\,163\,517\,356\,594,\ 6\,498\,314\,231\,705\,568,\ \ldots)$ |
| 4 | $(24,\ 972,\ 118\,592,\ 15\,210\,414,\ 2\,344\,956\,480,\ 377\,420\,590\,432,\ 67\,501\,965\,869\,568,\ \ldots)$ |
| 5 | $(120,\ 49\,500,\ 55\,480\,000,\ 75\,108\,093\,750,\ 124\,667\,171\,985\,024,\ \ldots)$ |
| 6 | $(720,\ 3\,483\,000,\ 45\,617\,280\,000,\ 805\,534\,805\,137\,500,\ \ldots)$ |
| 7 | $(5\,040,\ 32\,783\,940,\ 60\,793\,780\,992\,000,\ \ldots)$ |
| 8 | $(40\,320,\ 40\,051\,972\,800,\ \ldots)$ |
| 9 | $(362\,880,\ 6\,186\,477\,124\,800,\ \ldots)$ |
| 10 | $(3\,628\,800,\ 1\,181\,356\,338\,960\,000,\ \ldots)$ |

*Table I* : $*-$factorielles.

| $n$ | ${}^*n!/n!$ |
|---|---|
| 2 | $(1,\ 1,\ 3,\ 8,\ 25,\ 72,\ 245,\ 772,\ 2\,692,\ 8\,925,\ 32\,065,\ 109\,890,$ $400\,023,\ 1\,402\,723,\ 5\,165\,327,\ 18\,484\,746,\ 68\,635\,477,$ $248\,339\,122,\ 930\,138\,521,\ 3\,406\,231\,198,\ \ldots)$ |
| 3 | $(1,\ 7,\ 93,\ 1\,419,\ 25\,225,\ 472\,037,\ 9\,501\,537,\ 196\,190\,781,$ $4\,219\,610\,242,\ 92\,198\,459\,515,\ 2\,068\,590\,840\,349,$ $46\,897\,782\,768\,404,\ 1\,083\,052\,539\,395\,723,\ \ldots)$ |
| 4 | $(1,\ 52,\ 5\,133,\ 655\,554,\ 97\,772\,875,\ 16\,019\,720\,210,$ $2\,812\,609\,211\,657,\ 518\,332\,479\,161\,091,\ \ldots)$ |
| 5 | $(1,\ 472,\ 467\,133,\ 636\,430\,764,\ 1\,038\,934\,571\,875,$ $1\,903\,882\,757\,758\,426,\ \ldots)$ |
| 6 | $(1,\ 5\,197,\ 63\,530\,133,\ 1\,127\,302\,654\,314,\ \ldots)$ |
| 7 | $(1,\ 67\,657,\ 12\,070\,725\,333,\ 3\,297\,397\,481\,602\,599,\ \ldots)$ |
| 8 | $(1,\ 1\,013\,512,\ 3\,053\,893\,509\,333,\ \ldots)$ |
| 9 | $(1,\ 17\,229\,712,\ 992\,515\,390\,533\,333,\ \ldots)$ |
| 10 | $(1,\ 327\,364\,537,\ \ldots)$ |

*Table II* : $*-$factorielles divisées.

| $i, j$ | $d$ | $\frac{1}{d}{}^{*}\!\left(\!\left(i, j\right)\!\right)$ |
|---|---|---|
| $2, 1$ | 1 | $(3,\ 3,\ 19,\ 99,\ 552,\ 2\,783,\ 16\,299,\ 86\,193,\ 516\,285,\ 2\,846\,196,\ \ldots)$ |
| $2, 1$ | 3 | $(1,\ 2,\ 9,\ 39,\ 200,\ 988,\ 5\,537,\ 29\,880,\ 173\,343,\ 981\,494,\ \ldots)$ |
| $3, 1$ | 1 | $(4,\ 6,\ 52,\ 373,\ 2\,896,\ 20\,326,\ 166\,808,\ 1\,236\,707,\ 10\,384\,368,\ 80\,466\,232,\ \ldots)$ |
| $3, 1$ | 2 | $(2,\ 5,\ 34,\ 211,\ 1\,544,\ 10\,586,\ 84\,556,\ 634\,945,\ 5\,217\,024,\ 41\,190\,331,\ \ldots)$ |
| $3, 1$ | 4 | $(1,\ 3,\ 18,\ 109,\ 775,\ 5\,437,\ 42\,287,\ 322\,736,\ 2\,613\,147,\ 20\,891\,152,\ \ldots)$ |
| $2, 2$ | 1 | $(6,\ 17,\ 236,\ 2\,749,\ 35\,396,\ 413\,431,\ 5\,690\,952,\ 71\,125\,716,\ 1\,002\,847\,204,\ 13\,151\,883\,885,\ \ldots)$ |
| $2, 2$ | 2 | $(3,\ 13,\ 145,\ 1\,504,\ 18\,427,\ 213\,980,\ 2\,865\,159,\ 36\,428\,556,\ 503\,155\,788,\ 6\,722\,469\,113,\ \ldots)$ |
| $4, 1$ | 1 | $(5,\ 10,\ 110,\ 1\,005,\ 10\,001,\ 89\,975,\ 949\,485,\ 9\,056\,745,\ 97\,801\,890,\ 976\,221\,254,\ \ldots)$ |
| $4, 1$ | 5 | $(1,\ 4,\ 30,\ 234,\ 2\,125,\ 19\,321,\ 192\,129,\ 1\,895\,175,\ 19\,683\,514,\ 203\,187\,546,\ \ldots)$ |
| $3, 2$ | 1 | $(10,\ 55,\ 1\,335,\ 27\,480,\ 633\,752,\ 13\,302\,300,\ 329\,994\,200,\ 7\,464\,149\,850,\ 189\,749\,631\,535,\ 4\,510\,999\,768\,769,\ \ldots)$ |
| $3, 2$ | 5 | $(2,\ 19,\ 331,\ 6\,114,\ 130\,744,\ 2\,826\,030,\ 62\,284\,536,\ 1\,552\,579\,431,\ 38\,118\,678\,267,\ 934\,036\,752\,789,\ \ldots)$ |

*Table III* : coefficients $*-$binômiaux.