

# Konstruktion auflösbarer Fast-Blockpläne mit Hilfe eines Computers

Ute Vogel

Im Jahre 1968 wurde im Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques Nr. 260, 1968, S. 32 das folgende Problem gestellt:

24 Teilnehmer einer Tagung möchten 8 Tage lang zusammen an Tischen für je 4 Personen zu Mittag essen.

Kann man einen Sitzplan so aufstellen, daß jede Person mit jeder anderen wenigstens einmal zusammen am Mittagstisch sitzt?

Dieses Sitzplan-Problem führt auf den Begriff des Fast-Blockplanes, einer Inzidenzstruktur, die von G. Pickert und K. E. Wolff in den Arbeiten [Pic,70] bzw. [Wol,73] definiert und untersucht worden ist.

Im folgenden wird eine Eigenschaft der Parallelismen von Fast-Blockplänen hergeleitet, die bei der Konstruktion auflösbarer Fast-Blockpläne mit Hilfe eines Backtracking-Algorithmus die Laufzeit erheblich herabsenkt.

Sei  $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$  ein Inzidenzstruktur ( $\mathcal{P} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ ). Die betrachteten Inzidenzstrukturen  $\mathcal{I}$  seien stets endlich, d.h. es gelte  $v \Leftrightarrow |\mathcal{P}| \in \mathbb{N}$  und  $b \Leftrightarrow |\mathcal{B}| \in \mathbb{N}$ , wobei  $\mathbb{N}$  die Menge der positiven ganzen Zahlen bezeichnet.

Für  $P \subseteq \mathcal{P}$  sei

$$(P) \Leftrightarrow \{C \in \mathcal{B} \mid \forall p \in P : pIC\}$$

und  $[P] \Leftrightarrow |(P)|$  die *Verbindungszahl* von  $P$ . Analog sei für  $B \subseteq \mathcal{B}$

$$(B) \Leftrightarrow \{p \in \mathcal{P} \mid \forall C \in B : pIC\}$$

und  $[B] \Leftrightarrow |(B)|$  die *Schnittzahl* von  $B$ .

Für die Menge  $\{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathcal{P}$  schreibt man statt  $(\{p_1, \dots, p_n\})$  auch einfach  $(p_1, \dots, p_n)$  und entsprechend für die Verbindungszahl  $[p_1, \dots, p_n]$ , analog für  $\{C_1, \dots, C_m\} \subseteq \mathcal{B}$ .

Sei  $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$  eine Inzidenzstruktur. Ein *Parallelismus* von  $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$  ist eine Äquivalenzrelation  $\parallel \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ , die dem „Parallelenaxiom“

$$\forall p \in \mathcal{P} \forall B \in \mathcal{B} \exists_1 C \in \mathcal{B} : pIC \wedge C \parallel B$$

genügt. Die Äquivalenzklassen heißen *Parallelscharen*. Inzidenzstrukturen, die einen Parallelismus besitzen, werden *auflösbar* genannt.

Eine *taktische Konfiguration* ist eine Inzidenzstruktur  $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$  für die gilt:

$$\exists k, r \in \mathbb{N} \forall p \in \mathcal{P} : [p] = r \wedge \forall B \in \mathcal{B} : [B] = k.$$

Im Falle  $r = k$  nennt man die taktische Konfiguration *symmetrisch* (kurz: STK).

Eine taktische Konfiguration  $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$  heißt *zerlegbar*, wenn eine Äquivalenzrelation  $\sim \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{P}$  existiert, die eine Zerlegung der Punktmenge in  $m > 1$  Klassen von je  $n > 1$  Elementen derart induziert, daß

$$\begin{aligned} \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{N}_0 \forall p, q \in \mathcal{P} : & (p \sim q \wedge p \neq q \Rightarrow [p, q] = \lambda_1) \\ & \wedge (p \not\sim q \Rightarrow [p, q] = \lambda_2) \end{aligned}$$

gilt.

Nach [Pic,70] und [Wol,73] wird eine taktische Konfiguration, die den Bedingungen

$$(FB1) \forall p, q \in \mathcal{P} : [p, q] \geq 1$$

$$\text{und (FB2) } r \cdot (k - 1) = v$$

genügt, als *Fast-Blockplan* bezeichnet. Für Fast-Blockpläne gelten die folgenden Parameterbedingungen (vgl. [Wol,73] 1.3):

- (1)  $\forall p \in \mathcal{P} \exists_1 \tilde{p} \in \mathcal{P} \setminus \{p\} : [p, \tilde{p}] = 2,$
- (2)  $\forall p, \tilde{p}, q \in \mathcal{P} : p \neq q \neq \tilde{p} \wedge [p, \tilde{p}] = 2 \Rightarrow [p, q] = 1,$
- (3)  $\forall B, C \in \mathcal{B} : B \neq C \Rightarrow [B, C] \leq 2.$

(1) und (2) zufolge sind Fast-Blockpläne mit  $v > 2$  zerlegbare taktische Konfigurationen mit  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, m = \frac{v}{2}$  und  $n = 2$ . Da zwei Punkte eines Blockplanes stets dieselbe Verbindungszahl besitzen, stellen Fast-Blockpläne i.a. keine Blockpläne dar.

Ist der Fast-Blockplan  $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$  auflösbar und bezeichnet  $s$  die Anzahl der Blöcke einer Parallelschar, so gilt offenbar  $v = s \cdot k$ .

Sei  $\mathcal{F} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$  ein auflösbarer Fast-Blockplan mit  $v > 2$ . Dann existieren mindestens zwei Parallelscharen  $S_1, S_2 \subseteq \mathcal{B}$  derart, daß für je zwei Blöcke  $B, C$  dieser Parallelscharen  $[B, C] \leq 1$  gilt (vgl. [Vog,89] (2.19)).

Für einen Fast-Blockplan  $\mathcal{F} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ , dessen Blockmenge  $\mathcal{B}$  zwei disjunkte Teilmengen  $S_1, S_2$  mit den Eigenschaften

$$\bigcup_{B \in S_i} (B) = \mathcal{P}, |S_i| = s \text{ für } i \in \{1, 2\} \text{ und } \forall B_1 \in S_1, B_2 \in S_2 : [B_1, B_2] \leq 1$$

enthält, wird die Inzidenzstruktur  $(\mathcal{P}, S_1 \cup S_2, I|_{\mathcal{P} \times S_1 \cup S_2})$  als **Startkonfiguration**  $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$  von  $\mathcal{F}$  bezeichnet.

Eine Startkonfiguration eines Fast-Blockplanes stellt eine taktische Konfiguration mit  $r = 2$  dar. Ist der Fast-Blockplan  $\mathcal{F}$  auflösbar und gilt  $v > 2$ , so können stets zwei Parallelscharen als  $S_1$  und  $S_2$  gewählt werden.

Der realisierte Algorithmus erweitert eine gegebene Startkonfiguration durch sukzessive Konstruktion weiterer Parallelscharen zu einem auflösbaren Fast-Blockplan. Um zu den vorgegebenen Parametern alle auflösbaren Fast-Blockpläne zu konstruieren, muß das Verfahren auf alle möglichen Startkonfigurationen dieses Fast-Blockplanes angesetzt werden. Zur Bestimmung der Startkonfigurationen betrachtet man symmetrische taktische Konfigurationen, denn jede Startkonfiguration  $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = (\mathcal{P}, S_1 \cup S_2, I_{\mathcal{F}}|_{S_1 \cup S_2})$  eines Fast-Blockplanes  $\mathcal{F} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I_{\mathcal{F}})$  definiert durch  $\mathcal{I} \rightleftharpoons (S_1, S_2, I)$  mit

$$B_1 I B_2 \rightleftharpoons (B_1) \cap (B_2) \neq \emptyset \text{ für } B_1 \in S_1 \text{ und } B_1 \in S_2$$

eine symmetrische taktische Konfiguration mit  $v' = b' = |S_1|$  und  $r' = k' = k$ .

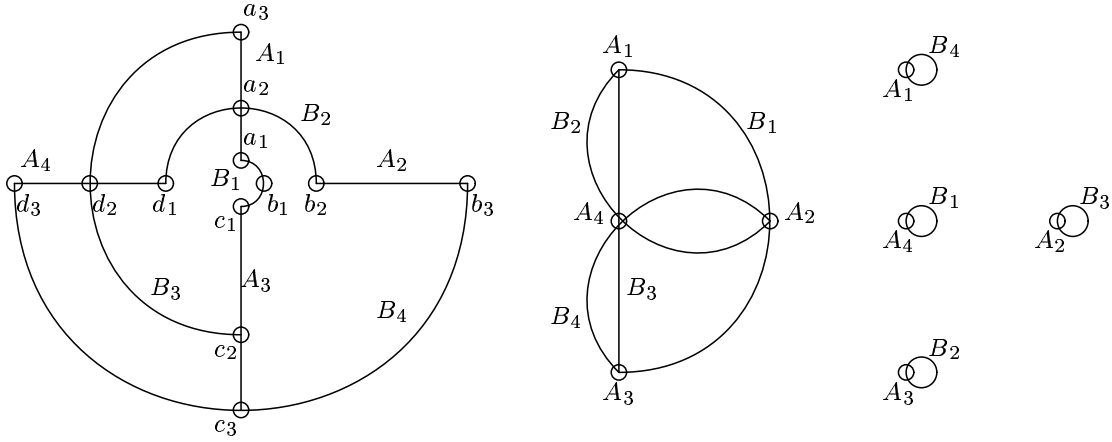
Umgekehrt erhält man aus jeder symmetrischen taktischen Konfiguration  $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$  mit den Parametern  $|\mathcal{P}| = s$  und  $[p] = k$  für  $p \in \mathcal{P}$  durch

$$\mathcal{P}' \rightleftharpoons I, \mathcal{B}' \rightleftharpoons \mathcal{P} \cup \mathcal{B} \text{ sowie } I' \rightleftharpoons \{(x, y), z \mid x = z \vee y = z\} \subseteq \mathcal{P}' \times \mathcal{B}'$$

eine auflösbare taktische Konfiguration  $(\mathcal{P}', \mathcal{B}', I')$  mit  $v' = s \cdot k$ ,  $k' = k$ ,  $r' = 2$  und den beiden Parallelenscharen  $S_1 \rightleftharpoons \mathcal{P}$ ,  $S_2 = \mathcal{B}$ .

Außerdem liefert eine STK  $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$  mittels  $pI^cB \rightleftharpoons \neg(pIB)$  wieder eine STK  $\mathcal{I}^c = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I^c)$  mit den Parametern  $v_c = v$  und  $k_c = v - k$ .

**Beispiel:** Transformation einer Startkonfiguration in die STK  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{I}^c$



Startkonfiguration  $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = (\mathcal{P}_{\mathcal{F}}, \mathcal{B}_{\mathcal{F}}, \epsilon)$   
eines Fast-Blockplanes  $\mathcal{F}$   
mit  $k_{\mathcal{F}} = 3, r_{\mathcal{F}} = 6$  und  $s_{\mathcal{F}} = 4$ .

STK  $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$   
 $v = b = s = 4,$   
 $k = r = k_{\mathcal{F}} = 3$

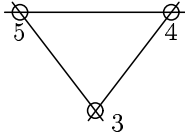
STK  $\mathcal{I}^c = (\mathcal{P}_c, \mathcal{B}_c, I_c)$   
 $v_c = b_c = 4,$   
 $k_c = r_c = 1,$

$\mathcal{P}_{\mathcal{F}} = \{a_i, b_i, c_i, d_i \mid i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$   
 $S_1 = \{\{a_1, a_2, a_3\}, \{b_1, b_2, b_3\}, \{c_1, c_2, c_3\}, \{d_1, d_2, d_3\}\}$   
 $= \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$   
 $S_2 = \{\{a_1, b_1, c_1\}, \{a_2, b_2, d_1\}, \{a_3, c_2, d_2\}, \{b_3, c_3, d_3\}\}$   
 $= \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$   
 $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = S_1 \cup S_2.$

$\mathcal{P} = S_1$   
 $\mathcal{B} = S_2$   
 $A_i I B_j \rightleftharpoons (A_i) \cap (B_j) \neq \emptyset$   
 $\mathcal{P}_c = \mathcal{P}$   
 $\mathcal{B}_c = \mathcal{B}$   
 $A_i I_c B_j \rightleftharpoons \neg(A_i I B_j)$

Im folgenden werden taktische Konfigurationen  $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ , in denen eine Punktmenge  $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$  existiert so, daß  $(\mathcal{P}', \mathcal{B}', I')$  mit  $\mathcal{B}' \rightleftharpoons \bigcup_{p \in \mathcal{P}'} (p)$  sowie  $I' \rightleftharpoons I|_{\mathcal{P}' \times \mathcal{B}'}$  eine taktische Konfiguration darstellt, reduzibel genannt, anderenfalls irreduzibel.

Die in einer reduziblen taktischen Konfiguration enthaltenen irreduziblen taktischen Konfigurationen nennt man Teilkonfigurationen.

**Beispiel:**

Die symmetrische taktische Konfiguration

$$\mathcal{I} = (\{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$\{(\{1, 2\}, 1), (\{1, 2\}, 2), (\{3, 4\}, 1), (\{3, 5\}, 1), (\{4, 5\}, 1)\}, I)$$

mit  $pI(B, n) \Leftrightarrow p \in B$

ist reduzibel und zerfällt in die zwei Teilkonfigurationen

mit  $\mathcal{P}_1 = \{1, 2\}$  und  $\mathcal{P}_2 = \{3, 4, 5\}$ .



Kennt man die Anzahl  $\zeta(v, k)$  der irreduziblen STK mit den Parametern  $v$  und  $k$ , die nicht zueinander isomorph sind, so kann nach Satz 2.10 aus [Vog,89] die Anzahl  $\sigma(v, k)$  aller untereinander nichtisomorphen STK berechnet werden.

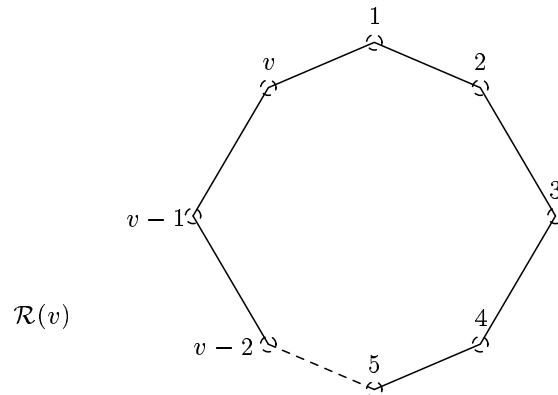
Für  $k = 1$  ist lediglich die STK mit  $v = b = 1$  irreduzibel, und es gilt  $\zeta(v, 1) = 0$  für  $v > 1$ , woraus man  $\sigma(v, 1) = 1$  für  $v \geq 1$ , d.h. es existiert stets – bis auf Isomorphie – nur eine STK mit  $k = 1$  und  $v \geq 1$ .

Im Fall  $k = 2$  ist jede irreduziblen STK mit  $v \geq 2$  Punkten isomorph zu der STK  $\mathcal{R}(v) = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$  mit

$$\mathcal{P} \Leftrightarrow \{p_1, \dots, p_v\},$$

$$\mathcal{B} \Leftrightarrow \{ \{ \{ p_i, p_{i+1} \} \mid i = 1, \dots, v-1 \} \cup \{ \{ p_1, p_v \} \} \}$$

und  $I \Leftrightarrow \in$ .



Insbesondere ist also  $\zeta(v, 2) = 1$  für  $v \geq 2$ .

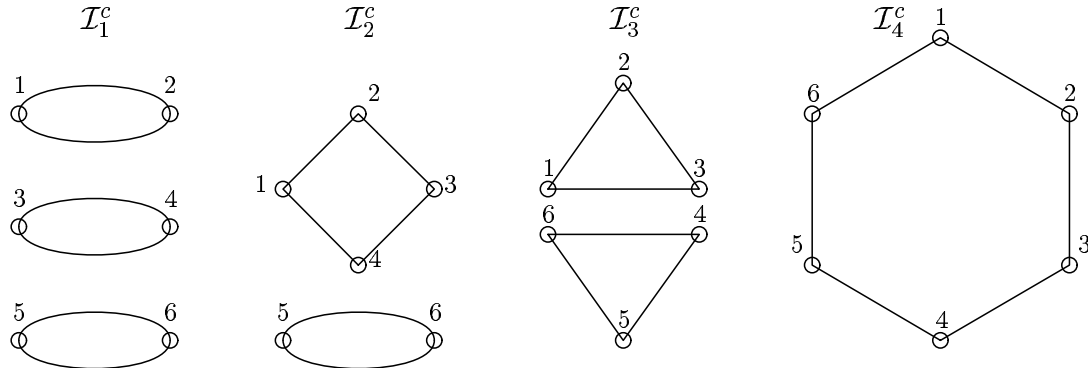
**Beispiele:**

- 1) **Mögliche Startkonfigurationen eines Fast-Blockplanes  $\mathcal{F}$  mit  $k = 3$  und  $r = 6$**   
 $\mathcal{F}$  besitzt (FB2) zufolge  $v = 6 \cdot (3 - 1) = 12$  Punkte. Jede Parallelschar besteht daher aus  $s = \frac{v}{k} = 4$  Blöcken.

Eine Startkonfiguration von  $\mathcal{F}$  definiert somit eine STK  $\mathcal{I}$  mit 4 Punkten und  $k = 3$ . Aus dieser gewinnt man wie oben angegeben die STK  $\mathcal{I}^c$  mit  $v = 4$  und  $k = 1$ . Wegen  $\sigma(v, 1) = 1$  für  $v \geq 1$  ist  $\mathcal{I}^c$  eindeutig bestimmt, also auch die Startkonfiguration  $\mathcal{I}$ . Diese Startkonfiguration kann durch Konstruktion weiterer Parallelscharen nicht zu einem Fast-Blockplan erweitert werden. Somit kann kein auflösbarer Fast-Blockplan mit  $k = 3$  und  $r = 4$  existieren.

## 2) Startkonfigurationen eines Fast-Blockplanes $\mathcal{F}$ mit $k = 4$ und $r = 8$

Ein Fast-Blockplan mit diesen Parametern beschreibt das eingangs erwähnte Sitzplan-Problem. Wegen  $v = 24$  besteht jede Parallelenschar aus  $s = 6$  Blöcken. Aus einer Startkonfiguration von  $\mathcal{F}$  erhält man daher eine STK  $\mathcal{I}$  mit 6 Punkten und  $k = 4$ . Der Übergang zur STK  $\mathcal{I}^c$  liefert die Parameter  $v_c = 6$  und  $k_c = 2$ . Damit kann die Anzahl der nichtisomorphen dieser STK mit Hilfe von  $\sigma(6, 2) = 4$  berechnet werden.



Somit existieren für den Fast-Blockplan  $\mathcal{F}$  lediglich vier Startkonfigurationen. Ob eine dieser Startkonfigurationen zum Fast-Blockplan  $\mathcal{F}$  erweitert werden kann, konnte aufgrund der hohen Zeitbedarfs des verwendeten Backtracking-Algorithmus noch nicht festgestellt werden.

### LITERATUR:

- [Pic,70] G. Pickert, *Remarques ur une classe de structures géométriques finies*, Séminaire d’algèbre non commutative, Conférence n° 14 du 3 mars 1970.
- [Wol,73] K. E. Wolff, *Fast Blockpläne*, Mitt. math. Sem. Giessen **102** (1973).
- [Vog,89] U. Vogel, *Algorithmen zur Konstruktion auflösbarer Fast-Blockpläne mit Hilfe eines Computers*, Diplomarbeit, TU Clausthal, 1989.