SUR UNE EXTENSION DES NOMBRES D'EULER ET LES RECORDS DES PERMUTATIONS ALTERNANTES

Arthur RANDRIANARIVONY et Jiang ZENG

Abstract

We study the sequence of polynomials $C_n(x,y)$ defined through the recurrence $C_0(x,y)=1$, $C_n(x,y)=x(y+1)C_{n-1}(x+2,y+2)-xyC_{n-1}(x,y)$, which turns out to be an extension of Euler numbers. We give a combinatorial interpretation of these numbers in terms of down-up permutations with respect to the numbers of even and odd upper records, and a continued fraction expansion for their ordinary generating function.

1 Introduction

Dans [5], Dumont et Randrianarivony ont trouvé une extension polynomiale des nombres de Genocchi et de Genocchi médians. Dans cet article, on se propose d'étudier une extension analogue pour les nombres d'Euler. Soit $(C_n(x,y))_{n\geq 0}$ la suite de polynômes définie par la récurrence suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_0(x,y) & = & 1, \\ C_n(x,y) & = & x(y+1)C_{n-1}(x+2,y+2)-xyC_{n-1}(x,y) \quad (n\geq 1). \end{array}\right. \tag{1}$$

Les premières valeurs de ces polynômes sont :

$$\begin{array}{lcl} C_1(x,y) & = & x, \\ C_2(x,y) & = & x^2+2xy+2x, \\ C_3(x,y) & = & x^3+10x^2y+4xy^2+10x^2+20xy+16x. \end{array}$$

Posons $C(x,y;t)=\sum_{n\geq 0} C_n(x,y)t^n$. La relation de récurrence (1) implique alors que

$$(1+xyt)C(x,y;t) = 1 + x(y+1)tC(x+2,y+2;t). \tag{2}$$

D'où

$$C(x,y;t) = \frac{1}{1+xyt} + \frac{x(y+1)t}{1+xyt}C(x+2,y+2;t),$$

et par itération on obtient le résultat suivant.

Proposition 1 *On a*

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} C_n(x,y)t^n &= \frac{1}{1+xyt} + \frac{x(y+1)t}{(1+xyt)(1+(x+2)(y+2)t)} + \cdots \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{2^{2n}(\frac{x}{2})_n(\frac{y+1}{2})_n t^n}{\prod_{k=0}^{n}[1+(x+2k)(y+2k)t]},\end{aligned}$$

où $(x)_0 = 1$ *et* $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$ *pour* $n \geq 1$.

L'objet principal de cet article est de démontrer les trois théorèmes suivants.

Théorème 1 *On a la fraction continue formelle :*

$$\sum_{n\geq 0} C_n(x,y)t^n = \cfrac{1}{1-\cfrac{1xt}{1-\cfrac{2(y+1)t}{1-\cfrac{3(x+2)t}{1-\cfrac{4(y+3)t}{\ddots}}}}}.$$

Nous disons qu'une permutation σ de $[n] := \{1,2,\ldots,n\}$ est *alternante*, si

$$\sigma(1) > \sigma(2), \quad \sigma(2) < \sigma(3), \quad \sigma(3) > \sigma(4), \quad \cdots. \tag{3}$$

Un élément $x \in [n]$ est dit *record* de σ si pour un certain $i \in [n]$, on a

$$x = \sigma(i) = max\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i)\}.$$

On note respectivement $recp(\sigma)$ et $reci(\sigma)$ le nombre de *records pairs* et le nombre de *records impairs* de σ. Soit $\mathcal{S}_n$ (resp. A_n) l'ensemble des permutations (resp. permutations alternantes) de $[n]$. Posons $f_0(x,y)=1$ et

$$f_n(x,y) = \sum_{\sigma\in A_n} x^{\mathrm{recp}(\sigma)} y^{\mathrm{reci}(\sigma)}, \qquad n \geq 1. \tag{4}$$

Théorème 2 *On a*

$$\sum_{n\geq 0} f_{2n}(x,y)t^{2n} = \cfrac{1}{1-\cfrac{1xt^2}{1-\cfrac{2(y+1)t^2}{1-\cfrac{3(x+2)t^2}{1-\cfrac{4(y+3)t^2}{\ddots}}}}}, \qquad (i)$$

$$\sum_{n\geq 0} f_{2n+1}(x,y)t^{2n+1} = \cfrac{yt}{1-\cfrac{1(x+1)t^2}{1-\cfrac{2(y+2)t^2}{1-\cfrac{3(x+3)t^2}{1-\cfrac{4(y+4)t^2}{\ddots}}}}}. \qquad (ii)$$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des théorèmes 1 et 2.

Théorème 3 *Pour tout $n \geq 1$, les polynômes $C_n(x,y)$ ont l'interprétation combinatoire suivante :*

$$\begin{aligned} C_n(x,y) &= f_{2n}(x,y) = \sum_{\sigma\in A_{2n}} x^{\mathrm{recp}(\sigma)} y^{\mathrm{reci}(\sigma)}, \\ yC_{n-1}(x+1,y+1) &= f_{2n-1}(x,y) = \sum_{\sigma\in A_{2n-1}} x^{\mathrm{recp}(\sigma)} y^{\mathrm{reci}(\sigma)}. \end{aligned}$$

Rappelons que les nombres d'Euler E_n sont classiquement définis par :

$$\sum_{n\geq 0} E_n \frac{x^n}{n!} = \sec x + \operatorname{tg} x.$$

Il est bien connu [1, 7] que $E_n = f_n(1,1)$, on déduit donc du théorème 3 le

Corollaire 1 *On a :*

$$\begin{aligned} E_{2n} &= C_n(1,1), \\ E_{2n+1} &= C_n(2,2) = \frac{\partial}{\partial x} C_{n+1}(x,y)|_{x=y=0}. \end{aligned}$$

Pour avoir la dernière égalité, il suffit de dériver par rapport à x les deux membres de (1) puis on remplace x et y par 0. Par conséquent, dans la proposition 1, si l'on remplace t par t^2 et x, y par 1 puis par 2, on trouve successivement les identités :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} E_{2n}t^{2n} &= \frac{1}{1+1^2t^2} + \frac{2!t^2}{(1+1^2t^2)(1+3^2t^2)} \\
&\quad + \frac{4!t^4}{(1+1^2t^2)(1+3^2t^2)(1+5^2t^2)} + \cdots, \\
\sum_{n\geq 0} E_{2n+1}t^{2n+1} &= \frac{t}{1+2^2t^2} + \frac{3!t^3}{(1+2^2t^2)(1+4^2t^2)} \\
&\quad + \frac{5!t^5}{(1+2^2t^2)(1+4^2t^2)(1+6^2t^2)} + \cdots.
\end{aligned}$$

Remarque. Ces deux formules sont différentes de celles obtenues par l'application directe de la transformation de Laplace à $\sec x$ et $\operatorname{tg} x$, voir [14].

En combinant ces deux identités, nous obtenons le développement en série de fractions rationnelles de la série génératrice ordinaire des nombres d'Euler.

Corollaire 2 *On a*

$$\sum_{n\geq 0} E_n t^n = \sum_{n\geq 0} \frac{n!t^n}{\prod_{0\leq k\leq [\frac{n+1}{2}]}(1+(n-2k+1)^2t^2)}.$$

où $[x]$ *désigne le plus grand entier* $\leq x$.

Le théorème 2 implique également le

Corollaire 3 *On a*

$$f_{2n+1}(x,y) = yf_{2n}(x+1,y+1).$$

On remarque que lorsque $x=y$, ce résultat a été établi par Carlitz et Scoville [3] par la méthode classique. En effet, ils ont trouvé les fonctions génératrices exponentielles suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} f_{2n}(x,x)\frac{t^{2n}}{(2n)!} &= (\sec t)^x, \\
\sum_{n\geq 0} f_{2n+1}(x,x)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} &= x\int_0^t (\sec u)^{x+1} du.
\end{aligned}$$

Enfin, dans le théorème 2 (i), si l'on prend $x = y$ on retrouve alors un résultat classique de Stieltjes [9] et Flajolet [6] l'a déjà démontré combinatoirement en supposant que x est un entier.

Au paragraphe 2 nous allons donner deux démonstrations différentes du théorème 1. La première est analogue à celle utilisée dans [5], la deuxième utilise un résultat de Wall [13]. Au paragraphe 3 nous appliquons la théorie combinatoire des fractions continues de Flajolet [6] et la bijection de Françon-Viennot [8] pour démontrer le théorème 2. Nous terminons cet article avec quelques résultats et remarques supplémentaires au paragraphe 4.

2 Deux démonstrations du théorème 1

$1^{\text{ère}}$ **preuve** : Pour $i \geq 1$, soit

$$c_i = \begin{cases} i(x+i-1) & \text{si } i \text{ est impair,} \\ i(y+i-1) & \text{si } i \text{ est pair.} \end{cases}$$

Considérons le tableau de Stieltjes [9] des $s_{n,k}(x,y)$ défini par la récurrence suivante :

$$\begin{cases} s_{0,0}(x,y) & = & 1, \quad s_{n,k}(x,y) = 0 \quad \text{si} \quad k \notin [0,n], \\ s_{n,k}(x,y) & = & s_{n-1,k}(x,y) + c_{n-k+1} s_{n,k-1}(x,y). \end{cases}$$

Pour toute fonction $f(x,y)$, on pose $\Delta f(x,y) = f(x+2, y+2) - f(x,y)$.

Lemme 1 *On a l'identité :*

$$\Delta s_{n,k}(x,y) = (n-k+1)(n-k+2) s_{n+1,k-1}(x,y). \tag{5}$$

Démonstration. On procède par récurrence sur la somme $n + k = m$. Il est clair que le lemme est vrai pour $m = 1$. Supposons que (5) est vrai pour $m - 1$. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \Delta s_{n,k}(x,y) &= \Delta s_{n-1,k}(x,y) + \Delta(c_{n-k+1}(x,y) s_{n,k-1}(x,y)) \\ &= \Delta s_{n-1,k}(x,y) + c_{n-k+1}(x+2, y+2) \Delta s_{n,k-1}(x,y) \\ &\qquad + s_{n,k-1}(x,y) \Delta c_{n-k+1}(x,y) \\ &= \Delta s_{n-1,k}(x,y) + (n-k+1)((z+2+n-k) \Delta s_{n,k-1}(x,y) \\ &\qquad + 2 s_{n,k-1}(x,y)). \end{aligned}$$

où $z=x$ ou y suivant que m est pair ou impair.

D'autre part, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{array}{rcl}\Delta s_{n-1,k}(x,y) & = & (n-k)(n-k+1)s_{n,k-1}(x,y), \\ \Delta s_{n,k-1}(x,y) & = & (n-k+2)(n-k+3)s_{n+1,k-2}(x,y).\end{array}$$

En reportant ces expressions dans l'identité plus haut, on retrouve, après simplification, la relation (5) pour $n+k=m$. $\square$ En appliquant ce lemme, on a :

$$\begin{aligned}&x(y+1)s_{n-1,n-1}(x+2,y+2)-xys_{n-1,n-1}(x,y)\\ &\quad = x(y+1)[s_{n-1,n-1}(x,y)+2s_{n,n-2}(x,y)]-xys_{n-1,n-1}(x,y)\\ &\quad = x[s_{n-1,n-1}(x,y)+2(y+1)s_{n,n-2}(x,y)]\\ &\quad = xs_{n,n-1}(x,y)=s_{n,n}(x,y).\end{aligned}$$

Ainsi $s_{n,n}(x,y)$ vérifie la récurrence (1). Par conséquent $s_{n,n}(x,y)=C_n(x,y)$. Posons $f_i(x,y;t)=\sum_{k\geq 0}s_{i+k,k}(x,y)t^k$, alors $f_0(x,y;t)=\sum_{n\geq 0}C_n(x,y)t^n$. D'autre part, on a $f_0(x,y;t)=1+c_1f_1(x,y;t)$ et

$$f_i(x,y;t)=f_{i-1}(x,y;t)+c_{i+1}tf_{i+1}(x,y;t),$$

d'où

$$f_0(x,y;t)=\cfrac{1}{1-c_1t\cfrac{f_1(x,y;t)}{f_0(x,y;t)}},\quad \frac{f_i(x,y;t)}{f_{i-1}(x,y;t)}=\cfrac{1}{1-c_{i+1}t\cfrac{f_{i+1}(x,y;t)}{f_i(x,y;t)}}.$$

et par itération, on obtient le théorème 2.

2**ième** **preuve** : Nous avons besoin du lemme suivant dû à Wall [13] :

Lemme 2 *On a :*

$$\cfrac{1+t}{1-\cfrac{(g_1-1)t}{1-\cfrac{(g_2-1)g_1t}{1-\cfrac{(g_3-1)g_2t}{\ddots}}}}=1+\cfrac{g_1t}{1-\cfrac{(g_1-1)g_2t}{1-\cfrac{(g_2-1)g_3t}{1-\cfrac{(g_3-1)g_4t}{\ddots}}}}.$$

Posons

$$C(x,y;t)=\cfrac{1}{1-\cfrac{xy(g_1-1)t}{1-\cfrac{xy(g_2-1)g_1t}{1-\cfrac{xy(g_3-1)g_2t}{\ddots}}}}. \tag{6}$$

Soit $g_i'=g_i(x+2,y+2)$. En substituant (6) dans (2) et en remplaçant xyt par t, nous avons :

$$\cfrac{1+t}{1-\cfrac{(g_1-1)t}{1-\cfrac{(g_2-1)g_1t}{1-\cfrac{(g_3-1)g_2t}{\ddots}}}}=1+\cfrac{(1+\frac{1}{y})t}{1-\cfrac{(1+\frac{2}{x})(1+\frac{2}{y})(g_1'-1)t}{1-\cfrac{(1+\frac{2}{x})(1+\frac{2}{y})(g_2'-1)g_1't}{1-\cfrac{(1+\frac{2}{x})(1+\frac{2}{y})(g_3'-1)g_2't}{\ddots}}}}.$$

En appliquant le lemme de Wall, on trouve successivement :

$$\begin{aligned}
g_1 &= 1+\frac{1}{y},\\
g_2 &= (1+\frac{2}{x})(1+\frac{2}{y})\frac{g_1'-1}{g_1-1}=1+\frac{2}{x},\\
g_3 &= (1+\frac{2}{x})(1+\frac{2}{y})\frac{g_2'-1}{g_2-1}g_1'=1+\frac{3}{y},
\end{aligned}$$

et plus généralement, pour $n\geq 1$, on a

$$g_{2n-1}=1+\frac{2n-1}{y},\qquad g_{2n}=1+\frac{2n}{x}\cdot$$

En portant ces valeurs dans (6), nous avons le résultat.

3 Énumérations des nombres de records pairs et impairs

On appelle *chemin* de n pas une suite $\gamma=(\gamma(0),\gamma(1),\dots,\gamma(n))$ d'entiers de $\{0,1,\dots,n\}$ telle que $\gamma(0)=\gamma(n)=0$ et pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$, on a

$|\gamma(k)-\gamma(k-1)| \leq 1$, autrement dit les pas $(\gamma(k-1),\gamma(k))$ sont, soit des *montées* de $+1$, soit des *paliers*, soit des *descentes* de -1. On appelle $\gamma(k-1)$ le niveau et k la position du pas $(\gamma(k-1),\gamma(k))$, qui est donc le kième pas du chemin γ.
A un palier situé au niveau k on associe la lettre b_k, à une descente du niveau $k+1$ vers le niveau k est associée la lettre c_{k+1} et à une montée du niveau k vers le niveau $k+1$ est associée la lettre a_k. La *valuation* d'un chemin γ, notée $w(\gamma)$, est le produit des lettres commutatives associées à ses pas. On note $\Gamma(n)$ l'ensemble des chemins de n pas.

Proposition 2 (Flajolet [6]) *La série génératrice ordinaire des valuations des chemins de n pas admet le développement en fraction continue suivant :*

$$1+\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{\gamma\in\Gamma(n)} w(\gamma)\right) t^n = \cfrac{1}{1-b_0\,t-\cfrac{a_0c_1\,t^2}{1-b_1\,t\cfrac{a_1c_2\,t^2}{\ddots\cfrac{}{1-b_k\,t-\cfrac{a_kc_{k+1}\,t^2}{\ddots}}}}}.$$

On appelle *chemin marqué* de n pas tout couple $(\gamma, s_1s_2\dots s_n)$, où γ est un chemin de n pas et $(s_1,s_2,\dots,s_n)$ une suite d'entiers.

Théorème 4 (Françon et Viennot [8]) *Soit Π_n (resp. Π'_n) l'ensemble des chemins marqués (γ,s) de n pas tels que $0\leq s_k\leq\gamma(k-1)$ si le $k^{\text{ième}}$ pas de γ est une montée, $0\leq s_k\leq\gamma(k-1)$ (resp. $0\leq s_k\leq\gamma(k-1)-1$) si le $k^{\text{ième}}$ pas de γ est une descente et $0\leq s_k\leq 2\gamma(k-1)+1$ (resp. $0\leq s_k\leq 2\gamma(k-1)$) si le $k^{\text{ième}}$ pas de γ est un palier.*
(i) Il existe une bijection φ de l'ensemble Π_n sur l'ensemble des permutations $\mathcal{S}_{n+1}$.
(ii) Il existe une bijection φ' de l'ensemble Π'_n sur l'ensemble des permutations $\sigma\in\mathcal{S}_{n+1}$ telles que $\sigma(n+1)=n+1$.

On identifie chaque permutation $\sigma\in\mathcal{S}_n$ au mot $\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$. Rappelons qu'une valeur $x=\sigma(i)$ est un *pic* (resp. un *creux*, une *double montée*, une *double descente*) de σ, si $\sigma(i-1)<\sigma(i)>\sigma(i+1)$ (resp. $\sigma(i-1)>\sigma(i)<\sigma(i+1)$, $\sigma(i-1)<\sigma(i)<\sigma(i+1)$, $\sigma(i-1)>\sigma(i)>\sigma(i+1)$), où $\sigma(0)=\sigma(n+1)=0$.

Proposition 3 ([8, 12]) *Soit* $(\gamma, s_1 s_2 \ldots s_n)$ *un chemin marqué et* $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$ *sa permutation correspondante par la bijection* φ *ou* φ'. *Alors*

(i) les creux (resp. pics, doubles montées et doubles descentes) de σ *correspondent aux montées (resp. descentes, paliers) de* (γ, s).

(ii) Un entier $k \in [n]$ *est un record de* σ *ssi le* $k^{\text{ième}}$ *pas de* γ *est une descente ou un palier et* $s_k = 0$.

Comme une permutation alternante de [2n+1] n'a pas de double montée ni de double descente, le chemin correspondant n'a donc pas de palier, i.e., c'est un chemin de Dyck. Notons que dans un chemin de Dyck $\gamma = (\gamma(0), \gamma(1), \ldots, \gamma(n))$, le niveau $\gamma(k-1)$ et la position k du pas $(\gamma(k-1), \gamma(k))$ sont toujours de parités opposées. On en déduit donc la

Proposition 4 *Soit* $(\gamma, s_1 s_2 \ldots s_{2n})$ *un chemin marqué et* $\sigma \in A_{2n+1}$ *sa permutation correspondante par la bijection* φ *ou* φ'. *L'entier* $k \in [2n]$ *est un record pair (resp. impair) de* σ *ssi le kième pas de* γ *est une descente de niveau impair (resp. pair) et* $s_k = 0$.

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème 2. Soit (γ, s) un chemin marqué, on associe à chaque pas marqué $((\gamma(k-1), \gamma(k)), s_k)$ la valuation 1 si $(\gamma(k-1), \gamma(k))$ est une montée ou une descente et $s_k > 0$; x (resp. y) si $(\gamma(k-1), \gamma(k))$ est une descente de niveau impair (resp. pair) et $s_k = 0$, et 0 si $(\gamma(k-1), \gamma(k))$ est un palier. On définit la *valuation* du chemin marqué $(\gamma, s_1 s_2 \ldots s_n)$ par le produit des valuations de tous ses pas marqués $((\gamma(k-1), \gamma(k)), s_k)$, $1 \leq k \leq n$.
On constate que la somme des valuations ci-dessus des chemins marqués de Π_n est égale à celle des chemins de n pas avec les paramètres suivants :

$$a_{k-1} = k, \quad b_{k-1} = 0, \quad c_{2k-1} = x + 2k - 1 \quad \text{et} \quad c_{2k} = y + 2k, \quad (k \geq 1);$$

et que celle des chemins marqués de Π'_n est égale à celle des chemins de n pas avec les paramètres :

$$a_{k-1} = k, \quad b_k = 0, \quad c_{2k-1} = x + 2k - 2 \quad \text{et} \quad c_{2k} = y + 2k - 1, \quad (k \geq 1).$$

Par ailleurs, comme $2n+1$ est toujours un record impair de $\sigma \in A_{2n+1}$ et que les permutations $\sigma \in \mathcal{S}_{2n}$ peuvent être considérées comme des permutations de $\mathcal{S}_{2n+1}$ avec $\sigma(2n+1) = 2n+1$, compte tenu des propositions 3 et 4, les valuations des chemins marqués de Π_{2n} et Π'_{2n} correspondent respectivement aux polynômes

$$\sum_{\sigma\in A_{2n+1}} x^{\operatorname{recp}\sigma} y^{\operatorname{reci}\sigma-1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{\sigma\in A_{2n}} x^{\operatorname{recp}\sigma} y^{\operatorname{reci}\sigma}.$$

Par application de la proposition 2, on obtient d'après (4) que

$$\sum_{n\geq 0} y^{-1} f_{2n+1}(x,y) t^{2n} = \cfrac{1}{1-\cfrac{1(x+1)t^2}{1-\cfrac{2(y+2)t^2}{1-\cfrac{3(x+3)t^2}{1-\cfrac{4(y+4)t^2}{\ddots}}}}},$$

et

$$\sum_{n\geq 0} f_{2n}(x,y) t^{2n} = \cfrac{1}{1-\cfrac{1xt^2}{1-\cfrac{2(y+1)t^2}{1-\cfrac{3(x+2)t^2}{1-\cfrac{4(y+3)t^2}{\ddots}}}}}.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 2.

4 Quelques remarques pour conclure

(**I**) On se propose d'abord de trouver une formule explicite pour $C_n(x,y)$.

Proposition 5 *On a*

$$C_n(x,y) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} (-1)^{n-k} \frac{(\frac{x+y}{2}+2k)(\frac{x}{2})_j(\frac{y+1}{2})_j}{k!(j-k)!(\frac{x+y}{2}+k)_{j+1}} (x+2k)^n (y+2k)^n.$$

Démonstration. Pour tout $j\geq 0$, posons

$$\frac{2^{2j}t^j}{\prod_{l=0}^{j}[1+(x+2l)(y+2l)t]} = \sum_{k=0}^{j} \frac{\alpha_k(j)}{1+(x+2k)(y+2k)t}.$$

On voit facilement que

$$\alpha_k(j) = \frac{(-1)^k(\frac{x+y}{2}+2k)}{k!(j-k)!(\frac{x+y}{2}+k)_{j+1}}, \qquad 0 \le k \le j.$$

Or, d'après la Proposition 1, le polynôme $C_n(x,y)$ est le cœfficient de t^n dans le développement de

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{2^{2j}(\frac{x}{2})_j(\frac{y+1}{2})_j t^j}{\prod_{l=0}^{j}[1+(x+2l)(y+2l)t]} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} \frac{\alpha_k(j)(\frac{x}{2})_j(\frac{y+1}{2})_j}{1+(x+2k)(y+2k)t}.$$

D'où le résultat. □

(**II**) Il est facile de voir que le degré de $C_n(x,y)$ est égal à n. Soit $M_n(x,y)$ la somme des monômes de plus haut degré dans $C_n(x,y)$. Rappelons que, si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\sigma(i)$ est un pic de cycle de σ si $i < \sigma(i) > \sigma^2(i)$. Notons $p(\sigma)$ (resp. $i(\sigma)$) le nombre de pics de cycle pairs (resp. impairs) de σ et Inv(2n) l'ensemble des involutions sans *point fixe* de $[2n]$.

Proposition 6 *On a, pour tout $n \ge 1$,*

$$M_n(x,y) = \sum_{\sigma} x^{p(\sigma)} y^{i(\sigma)} \qquad (\sigma \in \mathrm{Inv(2n)}).$$

Démonstration. A chaque permutation $\sigma \in A_{2n}$ on associe l'involution σ' de Inv(2n) définie par

$$\sigma'(\sigma(2i-1)) = \sigma(2i), \qquad \sigma'(\sigma(2i)) = \sigma(2i-1), \qquad (i \in [n]).$$

Si σ a n records, le nombre de ses records pairs (resp. impairs) est égal au nombre de pics de cycle pairs (resp. impairs) de σ'. De plus l'application $\sigma \to \sigma'$ est une bijection de l'ensemble des permutations alternantes de $[2n]$ ayant n records sur l'ensemble Inv(2n). On en déduit alors le résultat. □

Pour tout polynôme $p(x,y)$ en les variables x, y on définit l'opérateur $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}(p(x,y)) = \text{la somme des monômes de degré plus haut de } p(x,y).$$

On a donc

$$M_n(x,y) = \mathcal{D}(C_n(x,y)). \tag{7}$$

On remarque d'autre part que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left[(x+2)^l(y+2)^m - x^l y^m\right] &= 2(lx^{l-1}y^m + mx^l y^{m-1}) \\ &= 2(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})x^l y^m.\end{aligned}$$

où l, m sont deux entiers positifs. D'où et par la linéarité de $\mathcal{D}$,

$$\mathcal{D}\left[C_n(x+2, y+2) - C_n(x,y)\right] = 2(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})M_n(x,y).$$

De même on a

$$\mathcal{D}\left[xC_{n-1}(x+2, y+2)\right] = xM_{n-1}(x,y).$$

On déduit donc de (1) la relation de récurrence pour $M_n(x,y)$ suivante, due à Dumont [4].

Corollaire 4 *Les polynômes $M_n(x,y)$ satisfont la relation de récurrence :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} M_1(x,y) &=& x, \\ M_n(x,y) &=& 2xy(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})M_{n-1}(x,y) + xM_{n-1}(x,y). \end{array}\right. \tag{8}$$

Du théorème 1 on déduit immédiatement d'après (7) un autre résultat de Dumont [4].

Corollaire 5 *La série génératrice ordinaire des polynômes $M_n(x,y)$ admet le développement en fraction continue formelle suivant :*

$$\sum_{n\geq 0} M_n(x,y)t^n = \cfrac{x}{1 - \cfrac{1xt}{1 - \cfrac{2yt}{1 - \cfrac{3xt}{1 - \cfrac{4yt}{\ddots}}}}}.$$

(**III**) Les permutations alternantes considérées plus haut sont parfois appelées permutations "down-up". On peut aussi envisager des extensions analogues pour les permutations "up-down", i.e., les permutations $\sigma \in \mathcal{S}_n$ satisfaisant

$$\sigma(1) < \sigma(2), \quad \sigma(2) > \sigma(3), \quad \sigma(3) < \sigma(4), \quad \cdots.$$

Soit B_n l'ensemble des permutations "up-down" sur $[n]$. On pose

$$E_{2n+1}(x) = \sum_{\sigma \in B_{2n+1}} x^{\operatorname{rec}\sigma}.$$

Carlitz et Scoville [3] ont déja montré par la méthode classique que

$$\sum_{n\geq 0} E_{2n+1}(x) \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = (\sec t)^x \int_0^t (\sec u)^{-x} du.$$

Par la même méthode et en utilisant une astuce due à Strehl [10], on obtient

$$\sum_{n\geq 1} E_{2n+1}(x) \frac{t^{2n}}{(2n)!} = x \sum_{n\geq 1} \frac{(x/2)_n}{(2n-1)!!} (1-\cos 2t)^n, \tag{9}$$

où $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)$.
D'autre part, si l'on pose

$$\left\{ \begin{array}{lcl} F_1(x) & = & 1, \\ F_{n+1}(x) & = & (x+1)^2 F_n(x+1) - x^2 F_n(x), \qquad n \geq 1, \end{array} \right. \tag{10}$$

alors Carlitz [2] a déja démontré que

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n F_n(x) \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{x} \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{(x)_n n!}{(2n)!} (e^{t/2} - e^{-t/2})^{2n}. \tag{11}$$

On déduit donc de (9) et (11) que

$$E_{2n+1}(x) = 2^{2n-1} x^2 F_n(x/2), \qquad n \geq 1. \tag{12}$$

Remarque. Viennot [11] a obtenu cette dernière identité d'une façon combinatoire en s'appuyant sur un résultat de Strehl [10].
Comme $E_1(x) = x$, les identités (10) et (12) impliquent que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} E_1(x) & = & x, \\ E_{2n+1}(x) & = & x^2 E_{2n-1}(x+2) - x^2 E_{2n-1}(x), \qquad (n \geq 1). \end{array} \right. \tag{13}$$

D'où et en appliquant le lemme 2 on obtient la proposition suivante.

Proposition 7 *On a*

$$\sum_{n\geq 0} E_{2n+1}(x)t^{2n+1} = \cfrac{xt}{1-\cfrac{2xt^2}{1-\cfrac{2(x+2)t^2}{1-\cfrac{4(x+2)t^2}{1-\cfrac{4(x+4)t^2}{\ddots}}}}}.$$

(**IV**) On peut aussi considérer le problème analogue pour toutes les permutations de $[n]$. Posons $g_n(x,y) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} x^{\operatorname{recp}\sigma} y^{\operatorname{reci}\sigma}$.

Proposition 8 *Les polynômes $g_n(x,y)$ ont l'expression explicite suivante :*

$$\begin{aligned} g_{2n}(x,y) &= x(y+1)\cdots(x+2n-2)(y+2n-1),\\ g_{2n+1}(x,y) &= y(x+1)\cdots(y+2n-2)(x+2n-1)(y+2n). \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit en effet de montrer que $g_{n+1}(x,y) = (y+n)g_n(y,x)$. Pour ce faire, on va exhiber une bijection entre $[n+1]\times\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{S}_{n+1}$. Étant donné $(k,\sigma)\in[n+1]\times\mathcal{S}_n$, on construit la permutation σ' de $\mathcal{S}_{n+1}$ de la façon suivante :

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i)+1 & \text{si } 1\leq i\leq k-1,\\ 1 & \text{si } i=k,\\ \sigma(i-1)+1 & \text{si } k+1\leq i\leq n+1. \end{cases}$$

Il est facile de voir que si $k=1$, alors $\operatorname{recp}(\sigma') = \operatorname{reci}(\sigma)$ et $\operatorname{reci}(\sigma') = \operatorname{recp}(\sigma)+1$; sinon $\operatorname{recp}(\sigma') = \operatorname{reci}(\sigma)$ et $\operatorname{reci}(\sigma') = \operatorname{recp}(\sigma)$. Ceci explique la relation de récurrence $g_{n+1}(x,y) = (y+n)g_n(y,x)$. □

Références

[1] André (D.), *Développements de* $\sec x$ *et* $\operatorname{tg} x$, C. R. Acad. Sci. Paris, 88 (1879), 965-967.

[2] Carlitz (L.), *Explicit formulas for the Dumont-Foata polynomials*, Disc. Math., 30 (1980), 211-225.

[3] Carlitz (L.) et Scoville (R.), *Enumeration of up-down permutations by upper records*, Monats. für Math., 79 (1975), 3-12.

[4] Dumont (D.), *Pics de cycle et dérivées partielles*, Actes du séminaire lotharingien de Combinatoire, 13ième session, 1985, Publication IRMA, Strasbourg.

[5] Dumont (D.) et Randrianarivony (A.), *Sur une extension des nombres de Genocchi*, Europ. J. Combinatorics, 16 (1994), 147-151.

[6] Flajolet (P.), *Combinatorial aspects of continued fractions*, Disc. Math., 41 (1982), 145-153.

[7] Foata (D.) et Schützenberger (M. P.), *Théorie géométrique des polynômes euleriens*, Lecture Notes in Math., Vol. 138, Springer Verlag, Berlin, 1970.

[8] Françon (J.) et Viennot (G.), *Permutations selon les pics, creux, doubles montées, doubles descentes, nombres d'Euler, nombres de Genocchi*, Disc. Math. 28 (1979), 21-35.

[9] Stieltjes (T. J.), *Sur la réduction en fraction continue d'une série procédant suivant les puissances décroissantes d'une variable*, Ann. Fac. Sc. Toulouse, 3 (1889), 1-17.

[10] Strehl (V.), *Alternating permutations and modified Ghandi-polynomials*, Disc. Math., 28(1979), 89-100.

[11] Viennot (G.), *Interprétations combinatoires des nombres d'Euler et de Genocchi*, Séminaire de Théorie des nombres, 1980/1981, exposé $n°$ 11, Publication de l'Univ. Bordeaux I.

[12] Viennot (G.), *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*, Note de conférence à l'Université du Québec à Montréal, 1983.

[13] Wall (H. S.), *Continued fractions and totally monotone sequences*, Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940), 165-184.

[14] Zeng (J.), *Énumération de permutations et J-fractions continues*, Europ. J. Combinatorics, 14 (1993), 373-382.

Département de Mathématiques
Université Louis-Pasteur
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex, France