le 12 Novembre 1996

# Démonstration Combinatoire des Formules de Prodinger Concernant les Arbres Binaires

Guo-Niu HAN

**1. Introduction**.— Nous considérons les arbres binaires d'ordre $n$. Il est bien connu que le nombre de ces arbres est égal au nombre de Catalan $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Pour $m = 0, 1$ ou 2, on définit *$m$-noeuds* comme étant les noeuds ayant $m$ fils. En particulier, les 0-noeuds ne sont d'autre que les feuilles.

Dans [M], Mahmoud a trouvé trois formules qui donnent le nombre des arbres binaires ayant j feuilles, j 1-noeuds et j 2-noeuds respectivement. D'après ces résultat, Prodinger a trouvé trois formules closes pour ces mêmes nombres [P], en utilisant le logiciel Ekhad, développé par Zeilberger [Z].

Dans cette note, on trouvera une démonstration combinatoire pour ces formules.

**2. Formule de Prodinger**.— Dans un arbre binaire, il est facile à vérifier que le nombre des feuilles est égal au nombre des 2-noeuds plus 1. Les formules de Prodinger se réduisent donc à une seule formule [P] :

**Théoème** [Prodinger].—*Le nombre des arbres binaires d'ordre $n$ ayant $j$ feuilles est égal à*

$$A_n^j = \frac{2^{n+1-2j}(n-1)!}{j!(j-1)!(n+1-2*j)!}.$$

**3. Démonstration Combinatoire**.— Considérons les mots finis engendrés par l'alphabet $\{U, D, R, L\}$ (Up, Down, Right, Left). Un tel mot $w$ est dit de *Grand-Motzkin* si $|w|_D = |w|_U$. Il est évident que le nombre des mots de Grand-Motzkin d'ordre $n$ ayant $j$ *Down* est égal à

$$B_n^j = \binom{n}{j, j, n-2*j} 2^{n-2*j}.$$

Un mot $w = x_1x_2\cdots x_{n-1}D$ est dit de *Motzkin*, si $x_1x_2\cdots x_{n-1}$ est de Grand-Motzkin et si $|x_1x_2\cdots x_i|_D \le |x_1x_2\cdots x_i|_U$ pour tout $1 \le i \le n-1$. Soit $w$ un mot de Motzkin d'ordre $n$ ayant $j$ *Down*, il existe $j$ façons de factoriser ce mot sous la forme $w = uDv$. C'est clair que la concatenation

$vu$ est un mot de Grand-Motzkin, et que le nombre des mots de Motzkin d'ordre $n$ ayant $j$ *Down* est $jB_{n-1}^{j-1} = A_n^j$.

Enfin, la formule de Prodinger est assurée par une simple bijection entre les arbres binaires et les mots de Motzkin, qui envoie les feuilles en *Down*, les 2-noeuds en *Up*, et les 1-noeuds ayant un fils droit en *Right*, les 1-noeuds ayant un fils gauche en *Left*.

Exercice.— Tracer l'arbre binaire correspondant au mot de Motzkin $w = ULDRUULDRDRD$.

## BIBLIOGRAPHIE


[M] H. M. Mahmoud. The joint distribution of the three types of nodes in uniform binary trees. *Algorithmica*, 13:313-323, 1995.

[P] H. Prodinger. A note on the distribution of the three types of nodes in uniform binary trees. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, B38b, 5pp, 1996. `http://cartan.u-strasbg.fr/~slc/`

[Z] M. Petkovsek, H. Wilf, and D. Zeilberger. *A = B*. A.K. Peters, Ltd., 1996.



IRMA, Université Louis Pasteur & CNRS
7, rue René-Descartes
67084 Strasbourg Cedex, France
email: guoniu@math.u-strasbg.fr