Séminaire Lotharingien de Combinatoire **44** (2001), Article B44i

DE L'ALGÈBRE DES ζ DE RIEMANN MULTIVARIÉES À L'ALGÈBRE DES ζ DE HURWITZ MULTIVARIÉES

HOANG NGOC MINH, GÉRARD JACOB, MICHEL PETITOT, NOUR EDDINE OUSSOUS

Abstract. The theory of noncommutative rational power series allows to express as iterated integrals some generating series associated to polylogarithms and polyzêtas, also called MZV's (*multiple zeta values* : a generalization of the Riemann ζ function). We introduce the Hurwitz polyzêtas, as a multivalued generalization of the classical Hurwitz ζ function. They are in fact generating series of the classical polyzêtas in commuting variables. Based on the shuffle product of noncommutative rational series, explicit formulae are given for computing the product of these generating series. We define also another shuffle product for the Hurwitz polyzêtas. This structure allows us to produce a new algorithm for computing the coloured polyzêtas relations, by mean of Dirichlet generating series associated to the periodic sequences of numbers. Concerning the regularization of divergent polyzêtas, we give explicit syntaxic formulae based on the combinatorics of words. As application we compute the Arakawa-Kaneko integrals in terms of polyzêtas.

Résumé. La théorie des séries rationnelles en variables non commutatives permet d'exprimer sous forme d'intégrales itérées certaines séries génératrices associées aux polylogarithmes et aux polyzêtas, ou MZV's (*multiple zeta values* : une généralisation de la fonction ζ de Riemann). Nous introduisons les polyzêtas de Hurwitz, qui généralisent la fonction ζ de Hurwitz classique. Ils apparaissent comme des séries génératrices des polyzêtas en variables commutatives. En nous basant sur le produit de mélange des séries rationnelles, nous donnons des formules explicites pour calculer les produits de ces séries génératrices. Nous explicitons également un autre produit de mélange pour les polyzêtas de Hurwitz. Cette structure permet d'obtenir un *nouvel* algorithme de génération des relations entre les polyzêtas *colorés* par l'intermédiaire des séries génératrices de Dirichlet associées aux suites périodiques de nombres. En ce qui concerne la régularisation des polyzêtas divergents, nous obtenons des formules syntaxiques explicites utilisant la combinatoire des mots. En application, nous calculons les intégrales d'Arakawa-Kaneko en termes de polyzêtas.

Contents

1. Introduction

Les valeurs de la fonction ζ de Riemann pour des arguments entiers positifs :

$$\zeta(s) = \sum_{n>0} \frac{1}{n^s}$$

sont bien connues depuis Euler pour les entiers pairs : $\zeta(2p)$ est un multiple rationnel de π^{2p}. Le cas impair est beaucoup moins bien connu. Apéry a prouvé en 1978 que $\zeta(3)$ est irrationnel. Récemment Rivoal (2000) [30] a montré que $\zeta(2p+1)$ est irrationnel pour une infinité d'entiers p. En outre, l'un des nombres $\zeta(s)$ pour s entier impair, $5 \leq s \leq 21$, est irrationnel. Rien n'est connu sur l'indépendance algébrique des zêtas impairs.

1.1. **Polyzêtas.**

Les voies de recherche actuelles s'orientent toutes vers un "supplément de structure". On a ainsi introduit les *polyzêtas* (appelés aussi zêtas multi-variés, ou nombres d'Euler-Zagier, ou MZV's - i.e. "Multiple Zeta Values") :

$$\zeta(s_1, \ldots, s_r) = \sum_{n_1 > \ldots > n_r > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \ldots n_r^{s_r}}, \qquad s_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad s_1 > 1$$

Les polyzêtas interviennent en théorie des nombres [33], en théorie des nœuds [2, 9], en mécanique quantique [12, 13, 26, 18], en physique des hautes énergies [6, 7], pour l'analyse des structures de données hiérarchiques [15].

Le polyzêta $\zeta(s_1, \ldots, s_r)$ est de profondeur r et de poids $\sum_{i=1}^r s_i$. Notons d_n la dimension du $\mathbb{Q}-$espace vectoriel engendré par les polyzêtas de poids n. Zagier a proposé la conjecture suivante :

Conjecture 1 ([33]). *Les entiers d_n vérifient :*

$$d_1 = 0, \quad d_2 = d_3 = 1, \quad d_n = d_{n-2} + d_{n-3}, \qquad \textit{pour } n \geq 4.$$

Elle est confortée par les travaux de Goncharov [17] qui étudie les polylogarithmes du point de vue des motifs de Tate mixtes. Sa conjecture 1.1 fait apparaître, (modulo $\zeta(2)$), une algèbre de Lie ayant exactement un générateur de degré n pour chaque entier $n > 1$ impair. Si cette conjecture était vraie, on pourrait en particulier espérer en déduire des résultats d'indépendance algébrique pour les $\zeta(2p+1)$. L'indépendance algébrique des $\zeta(2p+1)$ n'est pas aujourd'hui accessible. Ce qui est accessible, c'est le calcul des relations entre *polyzêtas "symboliques"*, c'est-à-dire les relations découlant du supplément de structure, qui est relié à l'existence d'une double structure de mélange (voir ci-dessous).

1.2. **Polyzêtas colorés.** Le calcul des *diagrammes de Feynman* en mécanique quantique conduit aux *polyzêtas colorés*, c'est-à-dire aux sommes suivantes :

$$\zeta\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_r \\ q^{i_1}, \ldots, q^{i_r} \end{pmatrix} = \sum_{n_1 > \ldots > n_r > 0} \frac{q^{i_1 n_1} \ldots q^{i_r n_r}}{n_1^{s_1} \ldots n_r^{s_r}},$$

où N est un entier positif fixé, et où q est une racine primitive N-ième de l'unité. L'algèbre des polyzêtas colorés contient, en plus des polyzêtas, des nombres transcendants comme :

$$\zeta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\log(2),$$

1.3. **Polyzêtas de Hurwitz.** Dans cet article, nous introduisons une autre extension des polyzêtas, que nous appelons *polyzêtas de Hurwitz*, qui sont indexés par un double multi-indice :

$$\zeta[(s_1; t_1), \ldots, (s_r; t_r)] = \sum_{n_1 > \ldots > n_r > 0} \frac{1}{(n_1 - t_1)^{s_1} \ldots (n_r - t_r)^{s_r}},$$

où les s_i sont des entiers positifs, et où les t_i sont des variables formelles. Ces variables formelles ont pour vocation de permettre le calcul certaines séries génératrices commutatives des polyzêtas. On retrouve les polyzêtas en spécialisant toutes les variables formelles en $t_i = 0$ pour tout i. L'algèbre des polyzêtas de Hurwitz contient quant à elle, en plus des polyzêtas, des constantes telles que le nombre de Catalan :

$$G = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = \frac{1}{16}[\zeta(2; -1/4) - \zeta(2; 1/4)].$$

et des polyzêtas colorés. En effet, nous verrons que la périodicité de $\{q^n\}_{n \geq 1}$ permet d'exprimer les polyzêtas colorés sous forme de combinaisons linéaires des polyzêtas de Hurwitz à coefficients dans le corps cyclotomique $\mathbb{Q}(q)$ (voir Proposition 13). Par conséquent, l'étude des *relations polynomiales* entre les polyzêtas colorés peuvent être faites à travers celles des polyzêtas de Hurwitz ayant pour paramètes des nombres rationnels de l'intervalle $[0, 1[$.

2. Codage symbolique

2.1. **Séries non commutatives et intégrales itérées.** Soit $X = \{x_0, x_1, \ldots x_m\}$ un alphabet fini. Le monoïde libre engendré par X est est noté X^*. C'est l'ensemble des mots sur l'alphabet X. Le mot vide est noté "ϵ". Nous notons X^+ l'ensemble $X^* \setminus \{\epsilon\}$. Associons à chaque lettre x_i de l'alphabet X une *1-forme différentielle* ω_i, définie dans un ouvert connexe $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$.

Pour tout chemin γ allant de z_0 à z dans $\mathcal{U}$, on définit récursivement comme suit l'*intégrale itérée* de Chen [11] de z_0 à z le long de γ pour tout mot $w = x_{i_1} \ldots x_{i_k}$:

$$\int_{z_0,\gamma}^{z} \omega_{i_1}\omega_{i_2}\ldots\omega_{i_k} = \int_{z_0,\gamma}^{z} \omega_{i_1}(z_1) \int_{z_0,\gamma}^{z_1} \omega_{i_2}\ldots\omega_{i_k}. \tag{1}$$

En notation abrégée, nous écrirons :

$$\alpha_{z_0,\gamma}^{z}(w) = \alpha_{z_0,\gamma}^{z}(x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}) = \int_{z_0,\gamma}^{z} \omega_{i_1}\omega_{i_2}\ldots\omega_{i_k} \quad \text{et} \quad \alpha_{z_0,\gamma}^{z}(\varepsilon) = 1.$$

Cette notation est relative au choix des formes ω_i associées aux lettres x_i. Plus généralement, si $F(z)$ est une fonction analytique nulle en z_0, on pose :

$$\alpha_{z_0,\gamma}^{z}(x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}; F) = \int_{z_0,\gamma}^{z} \omega_{i_1}(t)\alpha_{z_0,\gamma}^{t}(x_{i_2}\ldots x_{i_k}; F).$$

Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre commutative. On note $A\langle X\rangle$ (resp. $A\langle\langle X\rangle\rangle$) l'anneau des polynômes non commutatifs (resp. des séries non commutatives) à coefficients dans A. Une série S non commutative de $A\langle\langle X\rangle\rangle$ sera notée :

$$S = \sum_{w\in X^*} \langle S \mid w\rangle\, w.$$

Les polynômes s'identifient aux séries de support fini.

Pour tout polynôme S (resp. pour toute série, sous réserve de convergence), on définit [19] :

$$\alpha_{z_0,\gamma}^{z}(S) = \sum_{w\in X^*} \langle S|w\rangle\; \alpha_{z_0,\gamma}^{z}(w).$$

Le produit de mélange (ou shuffle) de deux mots u et v est le polynôme défini récursivement comme suit :

$$\left\{\begin{array}{lclcll} \epsilon ⧢ u & = & u ⧢ \epsilon & = & u & \text{si } u \in X^*, \\ au ⧢ bv & = & a(u ⧢ bv) + b(au ⧢ v) & & & \text{si } a, b \in X, \quad u, v \in X^*. \end{array}\right. \tag{2}$$

Le mélange est étendu aux séries formelles par distributivité.

Le $\mathbb{C}$-module $A\langle\langle X\rangle\rangle$ muni du produit de mélange est une A-algèbre commutative, notée $Sh_A\langle\langle X\rangle\rangle$.

Avec les notations précédentes, on déduit des propriétés de l'intégration par parties l'égalité :

$$\alpha_{z_0,\gamma}^{z}(S ⧢ T) = \alpha_{z_0,\gamma}^{z}(S)\; \alpha_{z_0,\gamma}^{z}(T).$$

C'est vrai si S et T sont deux mots, c'est vrai aussi (par distributivité) si S et T sont deux séries non commutatives. En d'autres termes, $\alpha_{z_0,\gamma}^z$ est un homomorphisme de $A\langle\langle X\rangle\rangle$ (pour le mélange) dans A.

2.2. **Séries rationnelles.** Les opérations rationnelles dans $A\langle\langle X\rangle\rangle$ sont :

(1) la somme, le produit par un élément de A,
(2) le produit de concaténation (ou de Cauchy), hérité du produit de concaténation des mots,
(3) l'*étoile* des séries formelles *propres* (i.e. à *terme constant nul*) :

$$S^* \;=\; 1 + S + S^2 + \ldots + S^n + \ldots$$

S^* est l'inverse bilatère de $(1-S)$, et vérifie $S^* = 1 + SS^* = 1 + S^*S$. On pose $S^+ = S^* - 1$.

Une série est dite *rationnelle* [10] si elle est obtenue à partir de ε et des lettres de X par un nombre fini d'opérations rationnelles.

Soient à présent $t_1, \ldots, t_n, \ldots$ des variables formelles, et $A = \mathbb{C}[t_1, \ldots t_n, \ldots]$ l'anneau des polynômes commutatifs sur les t_i.

Considérons les séries rationnelles de la forme :

$$(t_1x_0)^*x_{i_1}\ldots(t_rx_0)^*x_{i_r} = \sum_{s_1,\ldots,s_r>0}(t_1x_0)^{s_1-1}x_{i_1}\ldots(t_rx_0)^{s_r-1}x_{i_r}. \tag{3}$$

Cette forme est préservée par le produit de mélange. En effet, si $U = (ux_0)^*xU'$ et $V = (vx_0)^*yV'$, où $u, v \in A$, $x, y \in X$ et $U', V' \in A\langle\langle X\rangle\rangle$, on a :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} U \,\text{ш}\, \epsilon &=& \epsilon \,\text{ш}\, U &=& U, \\ U \,\text{ш}\, V &=& ((u+v)x_0)^*[x(U' \,\text{ш}\, V) + y(U \,\text{ш}\, V')]. \end{array}\right. \tag{4}$$

2.3. **Polylogarithmes.** A toute composition (i.e. à toute suite finie d'entiers strictement positifs) $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r)$ on associe le polylogarithme :

$$\mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_r}(z) = \sum_{n_1>\ldots>n_r>0}\frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1}\ldots n_r^{s_r}}, \qquad |z|<1.$$

On a donc $\zeta(\mathbf{s}) = \mathrm{Li}_{\mathbf{s}}(1)$, à condition que cette somme soit convergente, c'est-à-dire si $s_1 > 1$. Introduisons l'alphabet $X = \{x_0, x_1\}$, et les deux formes différentielles :

$$\omega_0 = \frac{dz}{z} \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{dz}{1-z}.$$

Associons à toute composition $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r)$ le mot $w = x_0^{s_1-1}x_1\ldots x_0^{s_r-1}x_1$. On obtient ainsi un isomorphisme de concaténation de la A-algèbre des compositions dans $A\langle X\rangle$. On identifiera parfois la composition $\mathbf{s}$ avec son codage par le mot w sur $\{x_0, x_1\}$.

On vérifie que polylogarithme $\mathrm{Li}_{s_{i_1},\ldots,s_{i_r}}(z)$ est aussi la valeur de l'intégrale itérée :

$$\alpha_{z_0,\gamma}^z(w) = \alpha_{z_0,\gamma}^z(x_0^{s_1-1}x_1\ldots x_0^{s_k-1}x_1)$$

ce qui fournit le prolongement analytique des $L_{\mathbf{s}}(z) = \mathrm{Li}_{\mathbf{s}}(z)$ sur le revêtement universel de $\mathbb{C}$ privée des deux points 0 et 1. La *série génératrice non commutative* $L(z) = \sum_{w \in X^*} L_w(z)\, w$ est alors solution de l'équation différentielle :

$$(5) \qquad dL(z) = (x_0\omega_0 + x_1\omega_1)L(z) \quad \text{avec} \quad L(\varepsilon) = e^{x_0 \log \varepsilon} + O(\sqrt{\varepsilon}) \text{ si } \varepsilon \to 0^+.$$

$L(z)$ est l'exponentielle d'une série de Lie, et vérifie le critère de Friedrichs :

$$L_{u \sqcup\!\sqcup v}(z) = L_u(z)\, L_v(z), \qquad u, v \in X^*.$$

Par le théorème de Radford, l'algèbre de mélange $Sh_{\mathbb{Q}}\langle X \rangle$ est une algèbre de polynômes (commutatifs) sur l'ensemble des mots de Lyndon, qui en forme donc une base de transcendance.

Soit $\mathcal{C}$ l'algèbre $\mathbb{C}[z, 1/z, 1/1-z]$ des fonctions polynomiales en z, $1/z$ et $1/1-z$, et soit $\mathrm{LI}_{\mathcal{C}}$ la plus petite $\mathcal{C}$-algèbre contenant $\mathcal{C}$ et stable par intégration par rapport à ω_0 et ω_1. $\mathrm{LI}_{\mathcal{C}}$ s'identifie au $\mathcal{C}$-module engendré par les $L_w(z)$. Les polylogarithmes $\mathrm{Li}_w(t)$ sont $\mathcal{C}$-linéairement indépendants [22] et donc $\mathrm{LI}_{\mathcal{C}}$ s'identifie à l'algèbre des polynômes commutatifs sur les polylogarithmes indicés par les mots de Lyndon [22].

2.4. **Fonctions quasi-symétriques.** Soit $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r)$ une composition. Alors $\zeta(s_1, \ldots, s_r)$ peut être aussi obtenu en spécialisant les variables $\{t_i\}_{i \geq 1}$ en $t_i = 1/i$ dans la *fonction quasi-symétrique* $F_{s_1,\ldots,s_r}(t)$ de *profondeur* r et de *degr?* (ou *poids*) $s_1 + s_2 \ldots + s_r$[25] :

$$F_{s_1,\ldots,s_r}(t) = \sum_{n_1 > \ldots > n_r > 0} t_{n_1}^{s_1} \ldots t_{n_r}^{s_r}.$$

Notons $\mathbf{e} = ()$ la composition "vide". Le *produit de mélange* (ou "quasi-shuffle" [25]) de deux compositions $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_k) = (r_1, \mathbf{r}')$ et $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_l) = (s_1, \mathbf{s}')$ est défini par :

$$\begin{cases} \mathbf{r} \star \mathbf{e} = \mathbf{e} \star \mathbf{r} = \mathbf{r}, \\ \mathbf{r} \star \mathbf{s} = (r_1, \mathbf{r}' \star \mathbf{s}) + (s_1, \mathbf{r} \star \mathbf{s}') + (r_1 + s_1, \mathbf{r}' \star \mathbf{s}'). \end{cases}$$

On étend la notation $F_{\mathbf{s}}$ aux combinaisons linéaires de compositions. Si $\mathbf{r}$ (resp. $\mathbf{s}$) est une composition de degré r et de poids p (resp. de degré s et de poids q), $F_{\mathbf{r}\star\mathbf{s}}$ est une fonction quasi-symétrique de profondeur $r + s$ et de poids $p + q$, et l'on a :

$$F_{\mathbf{s}\star\mathbf{r}} = F_{\mathbf{s}}\, F_{\mathbf{r}}.$$

Toute composition $\mathbf{s}$ ne commençant pas par 1 correspond bijectivement à un *"mot convergent"* $w \in x_0X^*x_1$. Si deux compositions $\mathbf{r}$ et $\mathbf{s}$ correspondent à deux mots convergents u et v, alors on a sur les polyzêtas convergents la *double structure de mélange* [21] et la famille de relations linéaires :

$$(6) \qquad \zeta(u \sqcup\!\sqcup v) = \zeta(u)\zeta(v), \qquad \zeta(u \star v) = \zeta(u)\zeta(v), \qquad \zeta(x_1 \sqcup\!\sqcup w - x_1 \star w) = 0.$$

Le troisième jeu d'égalités fait intervenir les polynômes $x_1 \sqcup\!\sqcup w - x_1 \star w$ qui sont convergents, même si les deux sommes $\zeta(x_1 \sqcup\!\sqcup w)$ et $\zeta(x_1 \star w)$ sont divergentes.

2.5. **Transformée polylogarithmique.** Soit φ_j une primitive de ω_j. Le théorème de convolution [19] permet d'établir :

$$\begin{aligned} \alpha_{z_0,\gamma}^z(x_j^n x_k) &= \int_{z_0,\gamma}^z \frac{[\varphi_j(z)-\varphi_j(s)]^n}{n!}\omega_k(s) \\ \text{et} \quad \alpha_{z_0,\gamma}^z(x_j^* x_k) &= \int_{z_0,\gamma}^z e^{\varphi_j(z)-\varphi_j(s)}\omega_k(s). \end{aligned}$$

Plus généralement, si $F(z)$ est une fonction analytique nulle en z_0, on a [19] :

$$\begin{aligned} \alpha_{z_0}^z(x_j^s;F) &= \int_{z_0,\gamma}^z \frac{[\varphi_j(z)-\varphi_j(s)]^n}{n!}F(s)ds \\ \text{et} \quad \alpha_{z_0,\gamma}^z(x_j^*;F) &= \int_{z_0,\gamma}^z e^{\varphi_j(z)-\varphi_j(s)}F(s)ds. \end{aligned}$$

A la suite de nombres complexes $\{f_k\}_{k\geq 1}$ associons (pour s un entier, $s\geq 1$) la série [20, 24] :

$$\mathrm{Di}_s(F|z)=\sum_{k\geq 1} f_k\frac{z^k}{k^s}, \quad |z|<1.$$

Elle généralise à la fois [19] la s.g.o. (série génératrice ordinaire) $F(z)=\sum_{k\geq 1} f_k z^k$ et la s.g.d (série génératrice de Dirichlet) $\mathrm{Di}(F;s)=\sum_{k\geq 1} f_k/k^s$. Elle peut être vue comme la *transformée polylogarithmique* de F [20, 24] :

$$\mathrm{Di}_s(F|z)=\alpha_{z_0,\gamma}^z(x_0^{s-1};F)=\int_{z_0}^z \frac{\log^{s-1}(z/t)}{\Gamma(s)}F(t)\frac{dt}{t}. \tag{7}$$

On posant (pour z fixé) $t=zr$, puis $r=e^{-u}$, on obtient :

$$\mathrm{Di}_s(F|z)=\int_0^1 \frac{\log^{s-1}(1/r)}{\Gamma(s)}F(zr)\frac{dr}{r}=\int_0^\infty \frac{F(ze^{-u})}{\Gamma(s)}\frac{du}{u^{1-s}}$$

En particulier, pour $z=1$, il s'agit de la *transformation de Mellin* et nous obtenons la s.g.d. $\mathrm{Di}(F/\Gamma(s);s)$ associée à $F(\tau)/\Gamma(s)$, où $F(\tau)=\sum_{k\geq 1} f_k q^k$ et $q=e^{-\tau}$. Si $F(\tau)$ est une série de rayon de convergence non nul alors $\mathrm{Di}(F;s)$ est une fonction en la variable complexe s. Par conséquent :

Théorème 1. *Pour toute fonction $F(z)\in \mathrm{LI}_{\mathcal{C}}$:*

1. *la transformée polylogarithmique de $F(z)$ est encore un élément de $\mathrm{LI}_{\mathcal{C}}$,*
2. *la s.g.d.* $\mathrm{Di}(F;s)$ *associée à $F(z)$ est un élément de l'algèbre des* MZV*'s.*

3. Régularisation syntaxique des termes divergents

L'équation différentielle (5) permet de définir le polylogarithme $L_w(z)$ pour tout mot w de X^*. Mais $\zeta(w)$ n'est défini que sur les mots *"convergents"*, c'est-à-dire sur $\mathrm{C}_1=\mathbb{Q}\oplus x_0\mathbb{Q}\langle X\rangle x_1$. La régularisation $\zeta_{ш}$ doit être un prolongement de ζ *à tous les mots* w de X^*, de telle sorte que $\zeta_{ш}$ soit encore un morphisme pour le ш. On aura ainsi donné un sens aux $\zeta(w)$ de somme divergente. D'après le théorème de Radford [28], c'est possible d'une et d'une seule façon, une fois fixées les valeurs de $\zeta(x_0)$ et

$\zeta(x_1)$. En effet, on a $(\mathbb{Q}\langle X\rangle, ш) \simeq \mathbb{Q}[\mathcal{L}yn(X)] = \mathrm{C}_1[x_1, x_0]$ où $\mathcal{L}yn(X)$ est l'ensemble des mots de Lyndon sur X. Toutes les régularisation pour ш peuvent être retrouvées à partir de la plus simple, qui envoie x_0 et x_1 sur 0.

De même, si on code toute composition $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ par le mot $y_{s_1} \ldots y_{s_k}$ sur l'alphabet infini $Y = \{y_j\}_{j=1,2,\ldots,n}$ alors $\zeta_\star(\mathbf{s})$ n'est défini que sur les mots *"convergents"* de $Y^\star$, c'est-à-dire sur $\mathrm{C}_2 = \mathbb{Q} \oplus (Y \setminus \{y_1\}\mathbb{Q}\langle Y\rangle)$. D'après Hoffman [25], le théorème de Radford se géméralise à l'alphabet infini Y. Il existe donc une et une seule régularisation $\zeta_\star$ qui prolonge ζ à tout Y^* et qui soit un morphisme pour l'opération $\star$, une fois fixée la valeur de $y_1 = x_1$. En effet, on a $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \star) \simeq \mathbb{Q}[\mathcal{L}yn(Y)] = \mathrm{C}_2[y_1]$ où $\mathcal{L}yn(Y)$ est l'ensemble des mots de Lyndon sur Y. On choisira d'envoyer $x_1 = y_1$ sur 0.

On ne peut pas régulariser ζ simultanément pour les deux produits. en effet :

Exemple 1 ([5, 8, 14, 31])**.** *Pour le premier mélange, on doit avoir* $\zeta_ш(1)\zeta_ш(1) = 2\zeta_ш(1,1)$*. On obtient* $\zeta_ш(1,1) = 0$ *et généralement* $\zeta_ш(\{1\}^k) = 0$ *pour* $k \geq 1$*. Pour le second, on a* $\zeta_\star(1)\zeta_\star(1) = 2\zeta_\star(1,1) + \zeta(2)$*. On obtient* $\zeta_\star(1,1) = -\zeta(2)/2$*.*

Définition 1. *On note* $\mathsf{reg}_ш$ *l'unique morphisme de* $(\mathbb{Q}\langle X\rangle, ш)$ *dans lui-même qui laisse fixes les mots convergents, et vérifie* $\mathsf{reg}_ш(x_0) = \mathsf{reg}_ш(x_1) = 0$*. De même, on note* $\mathsf{reg}_\star$ *l'unique morphisme de* $(\mathbb{Q}\langle Y\rangle, \star)$ *qui laisse fixes les mots convergents, et vérifie* $\mathsf{reg}_\star(y_1) = 0$*.*

On a alors :

$$\zeta_ш = \zeta \circ \mathsf{reg}_ш, \qquad et \quad \zeta_\star = \zeta \circ \mathsf{reg}_\star.$$

Le calcul de $\mathsf{reg}_ш$ et de $\mathsf{reg}_\star$ permet donc de calculer syntaxiquement les régularisation pour ш et pour $\star$.

3.1. Régularisation et série diagonale.

Nous utilisons la *factorisation de Lyndon.* Un mot $w \in X^*$ est un mot de Lyndon si et seulement si il est strictement plus petit (pour l'ordre lexicographique) que tout ses facteurs droits propres.

Soit l un mot de Lyndon. Le *crochetage standard* $P(l)$ de l est le polynôme de Lie défini récursivement comme suit :

$$\begin{array}{rcll} P(x_j) & = & x_j & \text{si } x_j \in X \\ P(l) & = & [m,n] & \text{si } n \text{ est le plus grand facteur} \\ & & & \quad \text{droit propre de Lyndon de } l \end{array}$$

La base de Poincaré-Birkhoff-Witt [29] de $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ est constituée de tous les produits décroissants de la forme $P^{i_1}(l_1)P^{i_2}(l_2)\ldots P^{i_k}(l_k)$ avec $l_1 > l_2 > \ldots > l_k$. La base duale contient en particulier les duaux $P^\star(l)$ des polynômes $P(l)$.

On munit le produit tensoriel complété $\mathbb{Q}\langle X\rangle\widehat{\otimes}\mathbb{Q}\langle X\rangle$, de l'opération suivante : le shuffle ш pour le facteur gauche, et la concaténation pour le facteur droit. (On peut aussi le considérer comme l'algèbre $(\mathcal{S}h_A\langle X\rangle)\langle X\rangle$ des polynômes à coefficients dans l'algèbre de mélange). La série diagonale

$$\sum_{w \in X^*} w \otimes w \in \mathbb{Q}\langle X\rangle\widehat{\otimes}\mathbb{Q}\langle X\rangle$$

est une représentation de l'application identité de $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ dans lui-même. Par un théorème de Schützenberger [29], elle se factorise en un produit infini, indexé par les mots de Lyndon en ordre décroissant :

$$\sum_{w\in X^*} w\otimes w = e^{x_1\otimes x_1}\Big[\prod_{l\in\mathcal{L}yn(X)\setminus X} e^{P^*(l)\otimes P(l)}\Big]e^{x_0\otimes x_0}. \tag{8}$$

Posons :

$$\Phi_{ш} = \sum_{w\in X^*} \mathsf{reg}_{ш}(w)\otimes w \quad \text{et} \quad \Phi_{\star} = \sum_{w\in Y^*} \mathsf{reg}_{\star}(w)\otimes w.$$

Théorème 2. [27] *On a le résultat* global *suivant :*

$$\Phi_{ш} = e^{-x_1\otimes x_1}\Big[\sum_{w\in X^*} w\otimes w\Big]e^{-x_0\otimes x_0} \quad et \quad \Phi_{\star} = e^{-y_1\otimes y_1}\Big[\sum_{w\in Y^*} w\otimes w\Big].$$

Preuve – Dans l'expression (8), les polynômes $P(l)$ et $P^\star(l)$, pour $l\notin\{x_0,x_1\}$ appartiennent à C_1, et donc restent fixes par $\zeta_{ш}$. En prenant l'image de la série diagonale par le morphisme $\mathsf{reg}_{ш}\otimes id$, on en tire :

$$\Phi_{ш} = \prod_{l\in\mathcal{L}yn(X)\setminus X} e^{P^*(l)\otimes P(l)}$$

d'où le résultat.

La même démonstration vaut pour $\Phi_\star$, mutatis mutandis, en utilisant les mots de Lyndon sur l'alphabet Y. Les polynômes de C_2 restent fixes par $\zeta_\star$. On utilise la série diagonale dans $\mathbb{Q}\langle Y\rangle\widehat{\otimes}\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ avec l'opération : $\star$ sur le membre gauche, concaténation sur le membre droit, et le morphisme $\mathsf{reg}_\star\otimes id$. □

Corollaire 1. *On pose :*

$$Z = \sum_{w\in X^*} (\zeta\circ\mathsf{reg}_{ш}(w))\, w.$$

La série non commutative Z, au signe près, n'est autre que l'associateur de Drinfel'd.

En effet, Z est l'image par $(\zeta_{ш}\otimes Id)$ de la série diagonale. Elle est l'unique exponentielle de Lie telle que [22] :

$$(Z|x_0) = (Z|x_1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall w\in x_0X^*x_1, \quad (Z|w) = \zeta(w).$$

3.2. **Régularisation syntaxique.** On utilise dans cette partie le calcul syntaxique des deux régularisations en utilisant la combinatoire des mots.

3.2.1. *La régularisation pour le premier mélange* $\mathsf{reg}_{ш}$.

Définition 2. *Soit a l'application* antipode *de $A\langle\langle X\rangle\rangle$ dans lui-même. Pour tout $w\in X^*$ on a $a(w) = (-1)^{|w|}\tilde{w}$. Pour un mot sur une seule lettre x (x_0 ou x_1), on a donc $a(x^k) = (-x)^k$.*

Proposition 1. *Pour tous $U \in A\langle\langle X\rangle\rangle$, et $S_1 \in A\langle\langle x_1\rangle\rangle$ (resp. $S_0 \in A\langle\langle x_0\rangle\rangle$), on a :*

$$\mathsf{reg}_{⧢}(S_1x_0U) = \mathsf{reg}_{⧢}(x_0[a(S_1) ⧢ U]) \quad \textit{et} \quad \mathsf{reg}_{⧢}(Ux_1S_0) = \mathsf{reg}_{⧢}([U ⧢ a(S_0)]x_1),$$

et par conséquent :

$$\mathsf{reg}_{⧢}(S_1x_0Ux_1) = x_0[a(S_1) ⧢ (Ux_1)] \quad \textit{et} \quad \mathsf{reg}_{⧢}(x_0Ux_1S_0) = [(x_0U) ⧢ a(S_0)]x_1.$$

PREUVE – Il suffit de démontrer la proposition pour $S_1 = x_1^k$ (resp. $S_0 = x_0^k$), avec k entier positif, et où U et V sont des mots de $x_0X^*x_1$, c'est-à-dire :

$$\mathsf{reg}_{⧢}(x_1^kx_0u) = x_0[(-x_1)^k ⧢ u] \quad \text{et} \quad \mathsf{reg}_{⧢}(vx_1x_0^k) = [V ⧢ (-x_0)^k]x_1.$$

La première expression est une conséquence de l'identité syntaxique suivante [19] :

$$\forall k \geq 0, \forall u \in X^*, \quad x_1^kx_0u = \sum_{l=0}^{k} x_1^l ⧢ (x_0[(-x_1)^{k-l} ⧢ u]). \tag{9}$$

En appliquant le morphisme de miroir, puis le morphisme de substitution $\sigma(x_0) = x_1$ et $\sigma(x_1) = x_0$ dans les deux membres de (9), on obtient une identité duale conduisant à la seconde expression. □

La régularisation pour le second mélange $\mathsf{reg}_\star$ *est donnée par* :

Lemme 1 ([8])**.** *Pour tout $w \in y_1Y^*$ et $m \geq 0$, on a*

$$\mathsf{reg}_\star(y_1^mw) = \sum_{i=0}^{m} \frac{(-y_1)^{\star i}}{i!} \star (y_1^{m-i}w).$$

PREUVE – Avec l'expression de l'exponentielle et d'après la définition du produit de Cauchy des séries formelles non commutatives, nous obtenons le résultat voulu (en identifiant terme par terme dans $\Phi_\star$). □

Lemme 2 (Lemme binomial)**.**

$$y_1^{\star k} \star uv = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} [y_1^{\star i} \star u]D^{k-i}(v), \textit{où } D(v) = y_1 \star v - y_1v.$$

PREUVE – Pour $k = 1$, on a $y_1 \star uv = (y_1 \star u)v + uD(v)$. On suppose la formule vraie (pour l'entier k). On en tire :

$$\begin{aligned} y_1^{\star k+1} \star uv &= y_1^{\star k} \star [(y_1 \star u)v + uD(v)] \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} [y_1^{\star i+1} \star u]D^{k-i}(v) + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} [y_1^{\star i} \star u]D^{k+1-i}(v) \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} [y_1^{\star j} \star u]D^{k+1-j}(v). \end{aligned}$$

□

Proposition 2 (Formule d'inversion)**.** *Pour tout entier k strictement positif, on a :*

$$y_1^k = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l y_1^l \star y_{k-l}.$$

Preuve – C'est la conséquence de la propriété $y_1^l \star y_k = y_1^{l-1} ш y_{k+1} + y_1^l ш y_k$, pour k et $l \geq 1$, où ш désigne ici le mélange ordinaire, mais sur l'alphabet Y. En effet en appliquant cette propriété au second membre du résultat souhaité, nous obtenons :

$$\begin{array}{ll} y_k - (y_k + y_1 ш y_{k-1}) + (y_1 ш y_{k-1} + y_1^2 ш y_{k-2}) + \ldots & \\ \qquad - (-1)^k (y_1^{k-2} ш y_2 + y_1^{k-1} ш y_1) & \\ & = (-1)^{k-1} k y_1^k. \end{array}$$

□

Corollaire 2. *Pour $k > 2$, nous avons*

$$\mathsf{reg}_\star(y_1^k) = \frac{(-1)^{k-1}}{k} y_k + \sum_{l=2}^{k-2} \frac{(-1)^{k-1-l}}{k} \mathsf{reg}_\star(y_1^l) \star y_{k-l}.$$

Proposition 3. *Pour tout mot $w \in x_0 X^* x_1$, on a*

$$\mathsf{reg}_\star(y_1^m w) = \sum_{p=0}^{m} \frac{(-1)^p}{p!} \mathsf{reg}_\star(y_1^{m-p})\ D^p(w).$$

Preuve – En utilisant le lemme 1 puis le lemme binomial, on a successivement :

$$\begin{aligned} \mathsf{reg}_\star(y_1^m w) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \left[\sum_{p=0}^{m} \binom{k}{p} (y_1^{\star k-p} \star y_1^{m-k}) \right] D^p(w), \\ &= \sum_{p=0}^{m} \sum_{k=p}^{m} \frac{(-1)^k}{p!(k-p)!} (y_1^{\star k-p} \star y_1^{n-k})\ D^p(w), \\ &= \sum_{p=0}^{m} \frac{(-1)^p}{p!} \left[\sum_{k=p}^{m} \frac{(-y_1)^{\star k-p}}{(k-p)!} \star y_1^{m-k} \right] D^p(w), \\ &= \sum_{p=0}^{m} \frac{(-1)^p}{p!} \mathsf{reg}_\star(y_1^{m-p})\ D^p(w). \end{aligned}$$

□

Le corollaire 2 et la proposition 3 terminent la régulation syntaxique des mots $y_1^m w$ par $\mathsf{reg}_\star$.

3.3. **Un exemple : les intégrales d'Arakawa et Kaneko.** Arakawa et Kaneko ont défini, pour $k_1, \ldots, k_n \geq 1$, l'intégrale suivante [1] :

$$\xi_{k_1,\ldots,k_n}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_n}(1-e^{-t})}{e^t - 1} \frac{dt}{t^{1-s}}.$$

Arakawa et Kaneko ont montré que $\xi_{k,\{1\}^{r-1}}(l)$ est un polynôme en des MZV's. Ils ont posé la question de la possibilité d'exprimer l'intégrale $\xi_{k_1,\ldots,k_n}(l)$ en termes des MZV's [1]. Nous allons montrer que cette question a une réponse positive et qu'elle dépend seulement de l'expression des $\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_n}(1-t)$ en des polylogarithmes de profondeur inférieure à n et de poids inférieur à $\sum_{i=1}^n k_i$. Effectuons le changement de variable $t \to e^{-t}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\xi_{k_1,\ldots,k_n}(s) &= \int_0^1 \mathcal{B}_{k_1,\ldots,k_n}(t)\frac{\log^{s-1}(1/t)}{\Gamma(s)}\frac{dt}{t},\\ &\text{où}\quad \mathcal{B}_{k_1,\ldots,k_n}(z) = \frac{z}{1-z}\,\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_n}(1-z).\end{aligned}$$

Théorème 3. *Pour tout entier $k_1,\ldots,k_n \ge 1$, l'intégrale $\xi_{k_1,\ldots,k_n}(s)$ est un polynôme en les polyzêtas à coefficients rationnels.*

Ceci est une conséquence directe de l'équation fonctionnelle suivante [23] :

$$L(1-t) = \sigma[L(t)]\,Z,\quad t\in[0,1[,$$

où σ est le morphisme *involutif* de substitution défini par $\sigma(x_0) = -x_1$ et $\sigma(x_1) = -x_0$. Une des conséquences de l'équation fonctionnelle (10) est que pour tout mot $w \in X^*$, le polylogarithme $\mathrm{Li}_w(1-t)$ est un polynôme en les polylogarithmes indicés par les mots de Lyndon de profondeur plus petite ou égale à $|w|$ et à coefficients dans l'algèbre des MZV's [23]. Par conséquent :

Proposition 4. *Pour tout entier $r,k \ge 1$, nous avons :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_{k,\{1\}^{r-1}}(1-t) &= \sum_{l=0}^{k-2}\zeta(k-l)\frac{\log^l(1-t)}{\Gamma(l+1)} + \frac{\log^r(1/t)}{\Gamma(r+1)}\frac{\log^{k-1}(1-t)}{\Gamma(k)}\\ &\quad+(-1)^r\sum_{l=0}^{k-2}\frac{\log^l(1-t)}{\Gamma(l+1)}\,\mathrm{Li}_{x_0(x_1^{k-1-l}\,\sqcup\!\sqcup\, x_0^{r-1})}(t).\end{aligned}$$

Preuve – En identifiant le coefficient du mot $x_0^{k-1}x_1^r$ dans (10), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_{x_0^{k-1}x_1^r}(1-t) &= \sum_{l=0}^{k-1}\zeta\circ\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(x_0^{k-1-l}x_1^r)\,\mathrm{Li}_{\sigma(x_0^l)}(t)\\ &\quad+\sum_{l=1}^{r-1}\zeta\circ\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(x_1^{r-l})\,\mathrm{Li}_{\sigma(x_0^{k-1}x_1^l)}(t) + \mathrm{Li}_{\sigma(x_0^{k-1}x_1^r)}(t)\\ &= \sum_{l=0}^{k-2}\zeta(x_0^{k-1-l}x_1)\frac{\log^l(1-t)}{\Gamma(l+1)} - (-1)^{k+r}\,\mathrm{Li}_{x_1^{k-1}x_0^r}(t).\end{aligned}$$

L'identité syntaxique (9) nous donne le résultat en prenant $u = x_0^{r-1}$. $\square$

En particulier, pour tout entier $k \ge 1$, le polylogarithme $\mathrm{Li}_k(1-t)$ est un polynôme en les logarithmes $\log(1-t)$ et en les polylogarithmes $\{\mathrm{Li}_{\{1\}^q,2}(t)\}_{0<q<k}$ dont les coefficients sont des MZV's simplement indicés.

Corollaire 3. *Pour pour tous entiers r,k,l avec $r,k \ge 1$, nous avons :*

$$\xi_{k,\{1\}^{r-1}}(l) = \sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i\zeta(k-i)\zeta(l,\{1\}^i) + \frac{\Gamma(r+l)}{\Gamma(r+1)\Gamma(l)}\zeta(r+l,\{1\}^{k-1})$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{i=0}^{k-2}(-1)^{r+i}\zeta[x_0^{l-1}x_1^i x_0(x_0^{r-1} \sqcup\!\sqcup\, x_1^{k-i-2})x_1]\\
&+ \sum_{i=0}^{k-2}(-1)^{r+i}\sum_{j=1}^{r-1}\zeta\Big([(x_0^{l-1}x_1^i x_0(x_0^{r-1} \sqcup\!\sqcup\, x_1^{k-1-i}))\sqcup\!\sqcup(-x_0)^j]x_1\Big).
\end{aligned}
$$

Preuve – D'après la proposition 4 et la transformation polylogarithmique, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\xi_{k,\{1\}^{r-1}}(l) &= \sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i\zeta(k-i)\zeta(l,\{1\}^i) + \frac{\Gamma(r+l)}{\Gamma(r+1)\Gamma(l)}\zeta(r+l,\{1\}^{k-1})\\
&+ \sum_{i=0}^{k-2}(-1)^{r+i}\zeta_{\sqcup\!\sqcup}(x_0^{l-1}x_1^i x_0[x_1^{k-1-i} \sqcup\!\sqcup\, x_0^{r-1}]).
\end{aligned}
$$

La dernière somme contient des MZV's divergents que l'on peut, de nouveau, régulariser en utilisant la proposition 1. En effet, en utilisant la définition du produit de mélange, nous avons :

$$
x_0^k \sqcup\!\sqcup\, x_1^l = (x_0^k \sqcup\!\sqcup\, x_1^{l-1})x_1 + \sum_{j=1}^{k}(x_0^{k-j} \sqcup\!\sqcup\, x_1^{l-1})x_1x_0^j.
$$

D'où, en posant $w = x_0^{l-1}x_1^i x_0$, nous avons :

$$
w(x_0^{r-1} \sqcup\!\sqcup\, x_1^{k-1-i}) = w(x_0^{r-1} \sqcup\!\sqcup\, x_1^{k-i-2})x_1 + \sum_{j=1}^{r-1} w(x_0^{r-1-j} \sqcup\!\sqcup\, x_1^{k-i-2})x_1x_0^j
$$

et d'après la proposition 1, nous avons aussi :

$$
\begin{aligned}
\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}[w(x_0^{r-1} \sqcup\!\sqcup\, x_1^{k-1-i})] &= w(x_0^{r-1} \sqcup\!\sqcup\, x_1^{k-i-2})x_1\\
&+\sum_{j=1}^{r-1}[(w(x_0^{r-1} \sqcup\!\sqcup\, x_1^{k-1-i}))\sqcup\!\sqcup(-x_0)^j]x_1.
\end{aligned}
$$

En appliquant le morphisme ζ, nous obtenons le résultat voulu. □

4. Polylogarithmes de Hurwitz

4.1. Définition et propriétés de base.

Définition 3. *Soit r un entier strictement positif. Pour toute composition $\mathbf{s} = s_1, \ldots, s_r$ et toutes variables formelles $t_1, \ldots, t_r$, nous appelons* fonction de Lerch généralisée*, la fonction définie par :*

$$
\Phi_{s_1,\ldots,s_r}(z; t_1, \ldots, t_r) = \sum_{n_1>\ldots>n_r>0} \frac{z^{n_1}}{(n_1-t_1)^{s_1}\ldots(n_r-t_r)^{s_r}}, \quad |z| < 1.
$$

Le polyzêta de Hurwitz *associé est alors :*

$$
\zeta[(s_1; t_1), \ldots, (s_r; t_r)] = \Phi_{s_1,\ldots,s_r}(1; t_1, \ldots, t_r).
$$

Ces séries comportent des termes divergents que nous examinerons en Section 4.5.

Proposition 5. *Les polyzêtas de Hurwitz vérifient les équations fonctionnelles :*

$$\zeta[(s_1;t_1),\ldots,(s_i;t_i),\ldots,(s_r;t_r)]-\zeta[(s_1;t_1),\ldots,(s_{i-1};t_{i-1}),(s_i;t_i-1),\ldots,(s_r;t_r)]$$
$$=(1-t_i)^{-s_i}\zeta[(s_1;t_1),\ldots,(s_{i-1};t_{i-1}),(s_{i+1};t_{i+1}),\ldots,(s_r;t_r)].$$

Proposition 6. *Les polyzêtas de Hurwitz vérifient l'équation différentielle :*

$$\partial/\partial t_i\zeta[(s_1;t_1),\ldots,(s_i;t_i),\ldots,(s_r;t_r)]=s_i\zeta[(s_1;t_1),\ldots,(s_i+1;t_i),\ldots,(s_r;t_r)].$$

4.2. **Premier codage des polyzêtas de Hurwitz.** Soit $X=\{x_0,x_1\}$. D'après le théorème de convolution, ces fonctions de Lerch peuvent être représentées par les intégrales itérées avec les deux formes différentielles ω_0 et ω_1 :

$$\omega_0=\frac{dz}{z}\quad\text{et}\quad\omega_1=\frac{dz}{1-z}.$$

Si S est une série propre, on pose $S^{*n}=(S^*)^n$. De l'identité rationnelle :

$$(tx_0)^*\sqcup\!\sqcup\, x_0^{s-1}=[(tx_0)^*x_0]^{s-1}(tx_0)^*=x_0^{s-1}[(tx_0)^{*s}],$$

on déduit, en appliquant successivement la transformation polylogarithmique :

Proposition 7. $\Phi_{s_1,\ldots,s_r}(z;t_1,\ldots,t_r)=\alpha_0^z[x_0^{s_1-1}(t_1x_0)^{*s_1}x_1\ldots x_0^{s_r-1}(t_rx_0)^{*s_r}x_1].$

D'après la formule récursive (4), cette classe de séries rationnelles est stable par le produit $\sqcup\!\sqcup$.

Exemple 2 ([20])**.** *La série génératrice commutative suivante :*

$$\mathcal{L}_1(z;t_1\ldots t_r)=\sum_{s_1,\ldots,s_r>0}\mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_r}(z)\;t_1^{s_1-1}\ldots t_r^{s_r-1},$$

où les variables formelles t_i commutent avec les lettres x_0 et x_1, vérifie :

$$\mathcal{L}_1(z;t_1\ldots t_r)=\alpha_0^z[(t_1x_0)^*x_1\ldots(t_rx_0)^*x_1].$$

Exemple 3 ([20])**.** *De même, la série génératrice suivante :*

$$\mathcal{L}_2(z;t_1\ldots t_r)=\sum_{s_1,\ldots,s_r>1}s_1\ldots s_r\,\mathrm{Li}_{s_1+1,\ldots,s_r+1}(z)\;t_1^{s_1}\ldots t_r^{s_r},$$

où les s_i sont des entiers, et où les variables formelles t_i commutent avec les lettres x_0 et x_1, vérifie :

$$\mathcal{L}_2(z;t_1\ldots t_r)=\alpha_0^z[t_1x_0(t_1x_0)^{*2}x_1\ldots t_rx_0(t_rx_0)^{*2}x_1].$$

En effet, pour toute lettre $x\in X$ on a :

$$x^*\sqcup\!\sqcup\, x=x^*xx^*=x(x^*)^2=\sum_{n\geq1}nx^n.$$

Les mêmes séries rationnelles codent respectivement les séries génératrices des polyzêtas

$$\mathcal{Z}_1(t_1\ldots t_r)=\mathcal{L}_1(1;t_1\ldots t_r),\qquad\textit{et}\quad\mathcal{Z}_2(t_1\ldots t_r)=\mathcal{L}_2(1;t_1\ldots t_r).$$

(sous réserve de convergence, c'est-à-dire après régularisation par $\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}$).

4.3. **Deuxième codage des polyzêtas de Hurwitz.** Pour toute variable formelle t introduisons la 1-forme différentielle

$$\Omega_t = z^{-t}\frac{dz}{1-z} = \frac{dz}{z^t(1-z)}.$$

Soient $T = \{t_1, \ldots, t_r\}$ et $\bar{T} = \{\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r\}$ deux familles de paramètres, liées par le changement de variables suivant :

$$(10) \qquad t_1 = \bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \ldots + \bar{t}_r, \quad t_2 = \bar{t}_2 + \bar{t}_3 + \ldots + \bar{t}_r, \quad \ldots, \quad t_r = \bar{t}_r.$$

Le changement de variables inverse est donné par :

$$(11) \qquad \bar{t}_1 = t_1 - t_2, \ldots, \quad \bar{t}_{r-1} = t_{r-1} - t_r, \quad \bar{t}_r = t_r.$$

Soit $X_{\bar{T}}$ l'alphabet $\{x_0, x_{\bar{t}_1}, \ldots x_{\bar{t}_r}\}$ associées aux 1-formes suivantes :

$$\omega_0 \quad \text{et} \quad \Omega_{\bar{t}_i}, \quad i = 1, 2 \ldots r.$$

Nous obtenons :

Proposition 8 ([20])**.** $\Phi_{s_1,\ldots,s_r}(z; t_1, \ldots, t_r) = z^{t_1}\int_0^z \omega_0^{s_1-1}\Omega_{\bar{t}_1} \ldots \omega_0^{s_r-1}\Omega_{\bar{t}_r}$.

Corollaire 4. $\zeta[x_0^{s_1-1}(t_1x_0)^{*s_1}x_1 \ldots x_0^{s_r-1}(t_rx_0)^{*s_r}x_1] = \zeta(x_0^{s_1-1}x_{\bar{t}_1} \ldots x_0^{s_r-1}x_{\bar{t}_r})$.

Le produit de mélange $\sqcup\!\sqcup_{\bar{T}}$ vérifie :

Théorème 4 ([20])**.** *Pour tous mots $U, V \in X_{\bar{T}}^* x_{\bar{T}}$, on a :*

$$\zeta(U \underset{\bar{T}}{\sqcup\!\sqcup} V) = \zeta(U)\zeta(V).$$

4.4. **Troisième codage des polyzêtas de Hurwitz.** Nous étudions à présent le codage défini par les suites finies de la forme :

$$(u_1; \mu_1), (u_2; \mu_2), \ldots, (u_r; \mu_r)$$

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble de ces suites. Un élément de $\mathcal{U}$ est soit la suite vide, soit une suite $U = (u_1; \mu_1), U'$ avec $U' \in \mathcal{U}$. Or on a :

$$\zeta(u;\mu)\zeta(v;\nu) \quad = \quad \sum_{n>m>0} \tfrac{1}{(n-\mu)^u(m-\nu)^v} + \sum_{n>m>0} \tfrac{1}{(n-\nu)^v(m-\mu)^u} + \sum_{n>0} \tfrac{1}{(n-\mu)^u(n-\nu)^v}.$$

Décomposons $1/[(n-\mu)^u(n-\nu)^v]$ en éléments simples, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\zeta(u;\mu)\zeta(v;\nu) &= \zeta[(u;\mu),(v;\nu)] + \zeta[(v;\nu),(u;\mu)] \\ &+ \sum_{k=0}^{v-1} \tbinom{u-1+k}{u-1}\frac{(-1)^k}{(\nu-\mu)^{u+k}}\zeta(v-k;\nu) + (-1)^v\sum_{k=0}^{u-1}\tbinom{v-1+k}{v-1}\frac{1}{(\nu-\mu)^{v+k}}\zeta(u-k;\mu).\end{aligned}$$

Ceci nous conduit à définir un nouveau produit de mélange sur $\mathcal{U}$:

Définition 4. *Considérons $U=(u;\mu),U'$ et $V=(v;\nu),V'$, où u et v sont des entiers, où μ et ν sont des variables formelles, où U' et V' sont dans $\mathcal{U}$. Le produit de mélange "$U\bullet V$" est défini comme suit :*

$$\begin{cases} U\bullet\epsilon &=& \epsilon\bullet U &=& U,\\ U\bullet V &=& (v;\nu),U\bullet V'+(u;\mu),U'\bullet V\\ &+& \displaystyle\sum_{k=0}^{v-1}\binom{u-1+k}{u-1}\frac{(-1)^k}{(\mu-\nu)^{u+k}}(u-k;\mu),U'\bullet V'\\ &+& \displaystyle(-1)^v\sum_{k=0}^{u-1}\binom{v-1+k}{v-1}\frac{1}{(\mu-\nu)^{v+k}}(v-k;\nu),U'\bullet V'. \end{cases}$$

Théorème 5. *Soient $U=(u_1;\mu_1),\ldots,(u_k;\mu_k)$ et $V=(v_1;\nu_1),\ldots,(v_l;\nu_l)$. On a :*

$$\zeta(U\bullet V)=\zeta(U)\zeta(V).$$

4.5. **Régularisation des polyzêtas de Hurwitz divergents.** Nous voulons donc régulariser les expressions de la forme :

$$S_1=H_1H_2\ldots H_qK \tag{12}$$

où l'on a posé, pour $1\le k\le q$:

$$H_k=x_0^{s_k-1}(t_kx_0)^{*s_k}x_1 \quad \text{et} \quad K=x_0^{s_{q+1}-1}(t_{q+1}x_0)^{*s_{q+1}}.$$

La série S_1 se met sous la forme générale :

$$S_1=FGK,$$

où, pour $0\le r\le q$:

$$\begin{array}{ll} F=H_1H_2\ldots H_r,\quad G=1 & \textit{ou}\quad G=H_{r+1}\ldots H_q,\\ \quad\textit{avec}\quad s_1=\ldots=s_r=1, & \quad\textit{et}\quad s_{r+1}>1. \end{array}$$

La série $\alpha_0^1(G)$ est convergente. La série $\alpha_0^1(K)$ est sur l'aphabet à une lettre $\{x_0\}$, et $\mathsf{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(K)$ est égale à 1 si $s_{q+1}=1$, à 0 sinon. Finalement, la somme $\alpha_0^1(S_1)$ est convergente si et seulement si $F=K=1$, autrement dit, si $r=0$, $s_1>1$, et $t_{q+1}=0$). On a dans ce cas :

$$\alpha_0^1(S_1)=\zeta[(s_1;t_1),\ldots,(s_q;t_q)]=\sum_{n_1>\ldots>n_q>0}\frac{1}{(n_1-t_1)^{s_1}\ldots(n_r-t_r)^{s_q}}.$$

Premier cas. Régularisation de $F=(t_1x_0)^*x_1(t_2x_0)^*x_1\ldots(t_rx_0)^*x_1$ (avec $r\ge1$). Nous allons régulariser la somme plus générale :

$$F_1=(t_1x_0)^{*s_1}x_1(t_2x_0)^{*s_2}x_1\ldots(t_rx_0)^{*s_r}x_1. \tag{13}$$

Nous posons $F_{r+1}=1$ et pour $j=1\ldots r$:

$$F_j=(t_jx_0)^{*s_j}x_1\ldots(t_rx_0)^{*s_r}x_1.$$

Remarque – La série F_1 (resp. F_j) est une combinaison linéaire des expressions rationnelles codant les fonctions de Lerch. Ceci découle de l'identité rationnelle :

$$x^{*n} = x^* ш(1-x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^* ш x^i = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i x^{*i+1}.$$

□

Nous utiliserons le lemme :

Lemme 3. *Soit x une lettre. On a l'identité rationnelle :* $x^{*n} = 1 + x\sum_{i=1}^{n} x^{*i}$.

Preuve – Preuve par induction, en utilisant l'identité :

$$x^{*n} = (1+xx^*)x^{*n-1} = x^{*n-1} + xx^{*n}.$$

□

On en déduit les identités, pour $j = 1 \dots r$:

$$\begin{aligned} H_j &= x_1 + (t_j x_0) \sum_{i=1}^{s_j} (t_j x_0)^{*i} x_1, \\ F_j = H_j F_{j+1} &= x_1 F_{j+1} + (t_j x_0) R_j, \\ \text{où} \quad R_j &= \sum_{i=1}^{s_j} (t_j x_0)^{*i} x_1 F_{j+1}. \end{aligned}$$

Lemme 4. *Soit $V \in A\langle\langle X \rangle\rangle$. On a l'identité :* $F_1 V = \sum_{j=1}^{r} x_1^{j-1} (t_j x_0) R_j V$.

Proposition 9. *Soit $V \in A\langle\langle X \rangle\rangle$. On a l'identité :*

$$\begin{aligned} \mathsf{reg}_ш(F_1 V) &= \mathsf{reg}_ш\left(\sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} (t_j x_0)[x_1^{j-1} ш (R_j V)] \right), \\ \mathsf{reg}_ш(F_1) &= \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} (t_j x_0)[x_1^{j-1} ш R_j]. \end{aligned}$$

Preuve – La preuve découle directement du lemme précédent et de la proposition 1. Pour la seconde égalité, il suffit de remarquer que pour tout j, on a $x_0 R_j \in A\langle\langle X \rangle\rangle x_1$.
□

On obtient en conséquence la régularisation du moule *Zig* d'Ecalle [14] :

Corollaire 5.

$$\begin{aligned} \mathsf{reg}_ш(F) &= \mathsf{reg}_ш[(t_1 x_0)^* x_1 \dots (t_r x_0)^* x_1] \\ &= \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} (t_j x_0) \left(x_1^{j-1} ш [(t_j x_0)^* x_1 \dots (t_r x_0)^* x_1] \right). \end{aligned}$$

Deuxième cas. Régularisation de FG.

Lemme 5. *Soit* $V \in A\langle\langle X\rangle\rangle$. *On a l'identité* $FGV = \sum_{j=1}^{r} x_1^{j-1}(t_j x_0) R_j GV$

Proposition 10.

$$\begin{aligned}
\mathsf{reg}_{ш}(FGV) &= \mathsf{reg}_{ш}\left(\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}(t_j x_0)[x_1^{j-1} ш (R_j GV)]\right),\\
\mathsf{reg}_{ш}(FG) &= \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}(t_j x_0)[x_1^{j-1} ш (R_j G)].
\end{aligned}$$

Preuve – On applique la proposition 9. de plus on a $x_0 R_j G \in x_0 A\langle\langle X\rangle\rangle x_1$, d'où la seconde égalité. □

Cas général. Régularisation de $S_1 = FGK$:

$$\mathsf{reg}_{ш}(FGK) = \mathsf{reg}_{ш}\left(\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}(t_j x_0)[x_1^{j-1} ш (R_j GK)]\right).$$

Où la série :

$$x_0[x_1^{j-1} ш (R_j GK)] = \sum_{a+b=j-1} x_0[x_1^a ш (R_j G)](x_1^b ш K)$$

est somme finie de séries de la forme $S_{j,n} = x_0 T_{j,n} x_1 K_{j,n}$, où $K_{j,n}$ est une série rationnelle de la forme $x_0^k(t_{q+1}x_0)^{*l}$, avec $k \le s_{q+1}-1$ et $l \le s_{q+1}$, ayant pour antipode

$$a(K_{j,n}) = a[x_0^k(t_{q+1}x_0)^{*l}] = (-x_0)^k(-t_{q+1}x_0)^{*l}.$$

On en déduit, avec ces notations :

Proposition 11.

$$\begin{aligned}
\mathsf{reg}_{ш}(FGK) &= \mathsf{reg}_{ш}\left(\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}t_j \sum_n x_0 T_{j,n} x_1 K_{j,n}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}t_j \sum_n [x_0 T_{j,n} ш a(K_{j,n})]x_1.
\end{aligned}$$

Remarque – Il est clair que les opérations de régularisation requises ne sortent pas de la classe des expressions rationnelles codant des fonctions de Lerch. □

5. Polyzêtas colorés et Polyzêtas de Hurwitz

5.1. **Séries génératrices de Dirichlet.** Soient m suites de nombres complexes $\{f_{i,n}\}_{i=1..m,n\ge1}$ de s.g.o. $F_i(z) = \sum_{n\ge1} f_{i,n} z^n$. Considérons l'alphabet $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, auquel on associe les $m+1$ formes différentielles suivantes :

$$\omega_0 = \frac{dz}{z}, \quad \omega_i = F_i(z)\frac{dz}{z}, \quad i = 1..m.$$

Considérons également des s.g.d. associées à ces fonctions [20] :

$$\mathrm{Di}(F_{i_1},\ldots,F_{i_r};s_1,\ldots,s_r)=\sum_{n_1>\ldots>n_r>0}\frac{f_{i_1,n_1-n_2}\ldots f_{i_{k-1},n_{k-1}-n_r}f_{i_r,n_r}}{n_1^{s_1}\ldots n_r^{s_r}}.$$

Proposition 12 ([20])**.** $\mathrm{Di}(F_{i_1},\ldots,F_{i_r};s_1,\ldots,s_r)=\alpha_0^1(x_0^{s_1-1}x_{i_1}\ldots x_0^{s_r-1}x_{i_r})$*, où :*

$$\alpha_0^z(x_0^{s_1-1}x_{i_1}\ldots x_0^{s_r-1}x_{i_r})=\sum_{n_1>\ldots>n_r>0}\frac{f_{i_1,n_1-n_2}\ldots f_{i_{k-1},n_{k-1}-n_r}f_{i_r,n_r}}{n_1^{s_1}\ldots n_r^{s_r}}z^{n_1}.$$

En particulier, si les fonctions génératrices $\{F_i(z)\}_{i=1..m}$ sont de la forme $b_iz/(1-b_iz)$ alors :

$$\alpha_0^z(x_0^{s_1-1}x_1\ldots x_0^{s_r-1}x_r)=\sum_{n_1>\ldots>n_r>0}\frac{b_1^{n_1-n_2}\ldots b_{k-1}^{n_{k-1}-n_r}b_r^{n_r}}{n_1^{s_1}\ldots n_r^{s_r}}z^{n_1}. \tag{14}$$

et $\mathrm{Di}(F_1,\ldots,F_r;s_1,\ldots,s_r)$ donne, dans ce cas, le *polylogarithme multiple* [4, 16, 32] :

$$\mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_r}(b_1,\ldots,b_r)=\sum_{n_1>\ldots>n_r>0}\frac{b_1^{n_1}(b_2/b_1)^{n_2}\ldots(b_r/b_{k-1})^{n_r}}{n_1^{s_1}\ldots n_r^{s_r}}.$$

Théorème 6. *Si les* $\{f_{i,n}\}_{n\geq1}, i=1..m$*, sont périodiques de même période* K *alors :*

$$\mathrm{Di}(F_{i_1},\ldots,F_{i_r};s_1,\ldots,s_r)=$$
$$\sum_{a_1,\ldots,a_r=1}^{K}\frac{f_{i_1,a_1}\ldots f_{i_r,a_r}}{K^{s_1+\ldots+s_r}}\zeta\left[\left(s_1;\frac{a_1+\ldots+a_r}{K}\right),\ldots,\left(s_r;\frac{a_r}{K}\right)\right].$$

En d'autres termes, si les $\{f_{i,n}\}_{n\geq1}, i=1..m$, sont périodiques de même période K alors cette série génératrice de Dirichlet est une somme finie de polyzêtas de Hurwitz.

5.2. **Polyzêtas colorés.** Un cas particulier des s.g.d. est celui des polyzêtas *colorés*[1] [3, 4, 16].

En effet, soit m un entier positif et τ son inverse. Introduisons la racine primitive m-ième de l'unité, $q=e^{2i\pi\tau}$, et les fonctions génératrices $\{F_i(z)\}_{i=1..m}$ de la forme $q^iz/(1-q^iz)$.

Proposition 13 (Formule de distribution)**.**

$$\zeta\begin{pmatrix}s_1,\ldots,s_r\\ q^{i_1},\ldots,q^{i_r}\end{pmatrix}=$$
$$\frac{1}{m^{s_1+\ldots+s_r}}\sum_{a_1-a_2,\ldots,a_{r-1}-a_r,a_r=1}^{m}q^{i_1a_1+\ldots+i_ra_r}\zeta[(s_1;-a_1/m),\ldots,(s_r;-a_r/m)].$$

[1]Les polylogarithmes colorés sont obtenus à partir des polylogarithmes multiples [4, 16], en les sp'ecialisant aux racines de l'unité.

PREUVE – D'après l'expression (14) et le théorème 6, nous avons successivement :

$$\zeta\begin{pmatrix} s_1,\ldots,s_{r-1},s_r \\ q^{i_1-i_2},\ldots,q^{i_r-i_{r-1}},q^{i_r}\end{pmatrix} = \alpha_0^1(x_0^{s_1-1}x_{i_1}\ldots x_0^{s_r-1}x_{i_r})$$
$$= \tau^{s_1+\ldots+s_r}\sum_{a_1,\ldots,a_r=1}^{m} q^{i_1a_1+\ldots+i_ra_r}\zeta[(s_1;(a_1+\ldots+a_r)\tau),\ldots,(s_r;a_r\tau)].$$

En changeant les indices $a_1,\ldots,a_r$ comme dans (10) et (11), nous obtenons l'expression voulue. □

Par conséquent, les polyzêtas colorés sont des combinaisons linéaires, à coefficients dans le corps cyclotomique $\mathbb{Q}(q)$ de polyzêtas de Hurwitz ayant pour paramètes des nombres rationnels de l'intervalle $[0,1[$. Ils peuvent être également vus commes des évaluations, en les racines m-ième de l'unité, de polynômes à coefficients dans la $\mathbb{Q}$-algèbre des polyzêtas de Hurwitz.

REFERENCES

[1] T. Arakawa & M. Kaneko.– Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, Nagoya Math. J., 153, pp. 189–209, 1999.

[2] V.I. Arnold.– *The Vassiliev theory of discriminants and knots*, First European Congress of Mathematics, volume 1, pages 3–29. Birkhäuser, 1994.

[3] M. Bigotte.– *Étude symbolique et algorithmique des fonctions polylogarithmes et des nombres Euler-Zagier coloré*, Thèse, Université Lille 1, Décembre 2000.

[4] J.M. Borwein, D.M. Bradley, D.J. Broadhurst and P. Lisoněk.– *Special Values of Multiple Polylogarithms*, Trans. Amer. Math. Soc., 353, pp. 907–941, 2001.

[5] L. Boutet de Monvel.– *Remarque sur les séries polylogarithmes divergentes*, colloque "Polylogarithme, Multizêta et la conjecture Deligne-Ihara", Luminy, Avril 2000.

[6] D.J. Broadhurst and D. Kreimer.– *Knots and Numbers in ϕ^4 Theory to 7 Loops and beyond.* Internat. J. Modern Phys. C, 6, pp. 519–524, 1995.

[7] D.J. Broadhurst and D. Kreimer.– *Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops.* Phys. Lett., B 393, pp. 403–412, 1997.

[8] P. Cartier.– *Les méthodes de régularisation en physique mathématique*, séminaire IHP, Janvier 2000.

[9] P. Cartier.– *Construction combinatoire des invariants de Vassiliev–Kontsevich des noeuds*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 316, série I, pp. 1205–1210, 1993.

[10] J. Berstel and C. Reutenauer.– *Rational series and their languages*, Springer-Verlag, 1988.

[11] K.T. Chen.– *Iterated path integrals*, Bull. Amer. Math. Soc., 83, pp. 831-879, 1977.

[12] V. Drinfel'd.– *Quasi–Hopf Algebras*, Leningrad Math. J., 1, pp. 1419–1457, 1990.

[13] V. Drinfel'd.– *On quasitriangular quasi–hopf algebra and a group closely connected with gal($\bar{q}/q$)*, Leningrad Math. J. (2), 4, pp. 829–860, 1991.

[14] J. Ecalle.– *La libre génération des multizêtas et leur décomposition canonico-explicite en irréductibles*, séminaire IHP, Décembre 1999.

[15] Ph. Flajolet, G. Labelle, L. Laforest and B. Salvy.– *Hypergeometrics and the cost structure of quadtrees*, Random Structures and Algorithms, 7, pp. 117–143, 1995.

[16] A.B. Goncharov.– *Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes*, Math. Res. Letters, 5, pp. 497–516, 1998.

[17] A.B. Goncharov.– *Multiple polylogarithms and mixed Tate motives*, Math. arχiv, AG/0103059, March 2001.

[18] J. Gonzalez-Lorca.– *Série de Drinfel'd, monodromie et algèbres de Hecke*, thèse, École Normale Supérieure, Paris, 1998.

[19] Hoang Ngoc Minh.– *Summations of Polylogarithms via Evaluation Transform*, in Mathematics and Computers in Simulations, 42, 4-6, pp. 707–728, 1996.

[20] Hoang Ngoc Minh.– *Fonctions de Dirichlet d'ordre n et de paramètre t*, Discrete Math., 180, pp. 221–241, 1998.

[21] Hoang Ngoc Minh and M. Petitot.– *Lyndon words, polylogarithmic functions and the Riemann ζ function*, Discrete Math., 217, pp. 273–292, 2000.

[22] Hoang Ngoc Minh, M. Petitot and J. Van der Hoeven.– *Polylogarithms and Shuffle Algebra*, FPSAC'98, Toronto, Canada, Juin 1998.

[23] Hoang Ngoc Minh, M. Petitot and J. Van der Hoeven.– *L'algèbre des polylogarithmes par les séries génératrices*, FPSAC'99, Barcelone, Espagne, Juillet 1999.

[24] Hoang Ngoc Minh, G.-Jacob.– *Symbolic Integration of meromorphic differential equations via Dirichlet functions*, Discrete Math., 210, pp. 87–116, 2000.

[25] M. Hoffman.– *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra, 194, pp. 477–495, 1997.

[26] T.Q.T. Lê and J. Murakami.– *Kontsevich's integral for Kauffman polynomial*, Nagoya Math., pp. 39–65, 1996.

[27] G. Racinet.– *Séries génératrices non-commutatives de polyzêtas et associateurs de Drinfel'd*, Thèse, Université de Picardie–Jules Verne, Amiens, Décembre 2000.

[28] D.E. Radford.– *A natural ring basis for shuffle algebra and an application to group schemes*, J. Algebra, 58, pp. 432–454, 1979.

[29] C. Reutenauer.– *Free Lie Algebras*, London Math. Soc. Monographs, New Series-7, Oxford Science Publications, 1993.

[30] T. Rivoal.– *Propriétés diophantiennes des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs*, Thèse, Université de Caen, 2001.

[31] M. Waldschmidt.– *Valeurs zêta multiples : une introduction*, J. Théorie des Nomb. Bordeaux, 12, pp. 581–595, 2000.

[32] M. Waldschmidt.– *Multiple Polylogarithms*, preprint, available at `http://www.math.jussieu.fr/~miw/`.

[33] D. Zagier.– *Values of zeta functions and their applications*, in "First European Congress of Mathematics", volume 2, pp. 497–512. Birkhäuser, 1994.

Remerciements : Nous remercions Foata et Zagier pour nous avoir signalé les travaux de Kaneko [1], et Boutet de Monvel, Cartier, Ecalle, Racinet et Waldschmidt pour d'utiles discussions.

E-mail address: {`hoang,jacob,oussous,petitot`}`@lifl.fr`

Université Lille II, 59024 Lille, France & Université Lille I, 59655 Villeneuve d'Ascq, France