

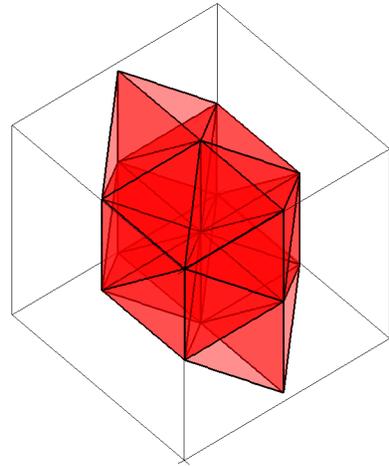
POLYTOPES DE MAYER ET DE REE-HOOVER

Amel Kaouche

Université de Moncton, Canada

24 mars 2015

En collaboration avec Gilbert Labelle, Université du Québec à Montréal



CONTENU DE L'EXPOSÉ

- Fonctions de poids de Mayer et de Ree-Hoover pour les graphes

CONTENU DE L'EXPOSÉ

- Fonctions de poids de Mayer et de Ree-Hoover pour les graphes
- Interprétation des poids en termes de volumes signés de polytopes

CONTENU DE L'EXPOSÉ

- Fonctions de poids de Mayer et de Ree-Hoover pour les graphes
- Interprétation des poids en termes de volumes signés de polytopes
- Méthodes des homomorphismes de graphes

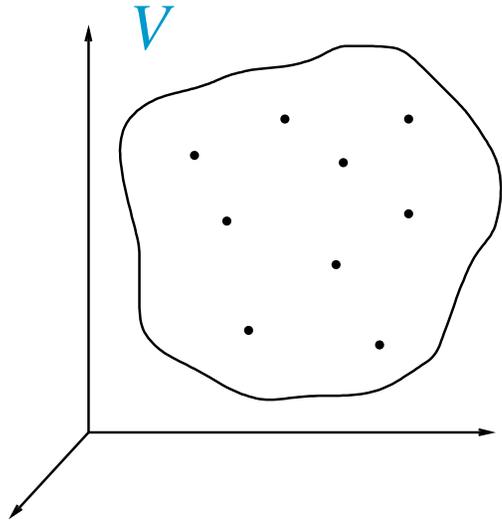
CONTENU DE L'EXPOSÉ

- Fonctions de poids de Mayer et de Ree-Hoover pour les graphes
- Interprétation des poids en termes de volumes signés de polytopes
- Méthodes des homomorphismes de graphes
- Formules explicites pour certaines familles infinies de graphes

CONTENU DE L'EXPOSÉ

- Fonctions de poids de Mayer et de Ree-Hoover pour les graphes
- Interprétation des poids en termes de volumes signés de polytopes
- Méthodes des homomorphismes de graphes
- Formules explicites pour certaines familles infinies de graphes
- Poids de Mayer des graphes bipartis complets

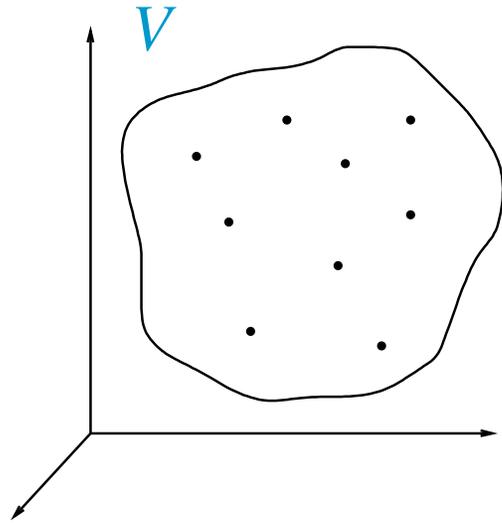
GAZ PARFAIT



N particules ponctuelles
sans interaction

$$\frac{P}{kT} = \frac{N}{V} \text{ (formule classique)}$$

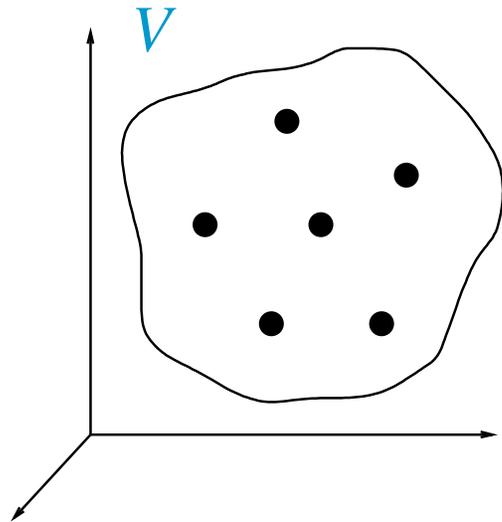
GAZ PARFAIT



N particules ponctuelles
sans interaction

$$\frac{P}{kT} = \frac{N}{V} \text{ (formule classique)}$$

GAZ IMPARFAIT



N particules non ponctuelles
avec interaction

$$\frac{P}{kT} = \frac{N}{V} + \beta_2 \left(\frac{N}{V}\right)^2 + \beta_3 \left(\frac{N}{V}\right)^3 + \dots$$

(développement du viriel)

POIDS DE REE-HOOVER

VERSUS

POIDS DE MAYER

DÉVELOPPEMENT DU VIRIEL

Développement du viriel:

$$\frac{P}{kT} = \frac{N}{V} + \beta_2 \left(\frac{N}{V} \right)^2 + \beta_3 \left(\frac{N}{V} \right)^3 + \dots$$

DÉVELOPPEMENT DU VIRIEL

Développement du viriel:

$$\frac{P}{kT} = \frac{N}{V} + \beta_2 \left(\frac{N}{V} \right)^2 + \beta_3 \left(\frac{N}{V} \right)^3 + \dots$$

- P : pression
- k : constante
- T : température
- N : nombre de particules
- V : Volume

DÉVELOPPEMENT DU VIRIEL

Développement du viriel:

$$\frac{P}{kT} = \frac{N}{V} + \beta_2 \left(\frac{N}{V}\right)^2 + \beta_3 \left(\frac{N}{V}\right)^3 + \dots$$

- P : pression
- k : constante
- T : température
- N : nombre de particules
- V : Volume

Coefficient du viriel:

$$\beta_n = \frac{1-n}{n!} \sum_{b \in \mathcal{B}[n]} w_M(b)$$

$\mathcal{B}[n]$ = l'ensemble des graphes 2–connexes (blocs) sur $[n]$

POIDS DE MAYER DE GRAPHES

Poids de graphes: fonctions sur les graphes invariantes sous les réétiquetages des sommets

Poids de Mayer:

$$w_M(c) = \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in c} f(\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|) d\vec{x}_1 \cdots d\vec{x}_{n-1}$$

POIDS DE MAYER DE GRAPHES

Poids de graphes: fonctions sur les graphes invariantes sous les réétiquetages des sommets

Poids de Mayer:

$$w_M(c) = \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in c} f(\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|) d\vec{x}_1 \cdots d\vec{x}_{n-1}$$

avec

- $\vec{x}_n = 0$
- c : graphe connexe avec n sommets
- $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in \mathbb{R}^d$: positions des n particules
- $f = f(r)$: fonction à valeurs réelles associée à l'interaction des particules deux-à-deux

POIDS DE REE-HOOVER DE GRAPHES

Poids de Ree-Hoover:

$$w_{RH}(b) = \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in b} f(\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|) \prod_{\{i,j\} \in \bar{b}} \bar{f}(\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|) d\vec{x}_1 \cdots d\vec{x}_{n-1}$$

POIDS DE REE-HOOVER DE GRAPHES

Poids de Ree-Hoover:

$$w_{RH}(b) = \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in b} f(\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|) \prod_{\{i,j\} \in \bar{b}} \bar{f}(\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|) d\vec{x}_1 \cdots d\vec{x}_{n-1}$$

avec

- $\vec{x}_n = 0$
- b : graphe 2-connexe avec n sommets
- $\bar{f}(r) = 1 + f(r)$
- $\bar{b} = K_n \setminus b$: graphe complémentaire de b

RELATION ENTRE w_M ET w_{RH}

Pour tout graphe 2-connexe b , on a

- $w_{RH}(b) = \sum_{b \subseteq d \subseteq K_n} w_M(d)$ (par définition)

RELATION ENTRE w_M ET w_{RH}

Pour tout graphe 2-connexe b , on a

- $w_{RH}(b) = \sum_{b \subseteq d \subseteq K_n} w_M(d)$ (par définition)
- $w_M(b) = \sum_{b \subseteq d \subseteq K_n} (-1)^{e(d)-e(b)} w_{RH}(d)$ (par inversion de Möbius)

RELATION ENTRE w_M ET w_{RH}

Pour tout graphe 2-connexe b , on a

- $w_{RH}(b) = \sum_{b \subseteq d \subseteq K_n} w_M(d)$ (par définition)
- $w_M(b) = \sum_{b \subseteq d \subseteq K_n} (-1)^{e(d)-e(b)} w_{RH}(d)$ (par inversion de Möbius)
- $|w_M(b)| = \sum_{b \subseteq d \subseteq K_n} |w_{RH}(d)|$ (dans le cas d'un gaz à noyaux durs)

DÉVELOPPEMENT DU VIRIEL

Développement du viriel:

$$\frac{P}{kT} = \frac{N}{V} + \beta_2 \left(\frac{N}{V} \right)^2 + \beta_3 \left(\frac{N}{V} \right)^3 + \dots$$

DÉVELOPPEMENT DU VIRIEL

Développement du viriel:

$$\frac{P}{kT} = \frac{N}{V} + \beta_2 \left(\frac{N}{V}\right)^2 + \beta_3 \left(\frac{N}{V}\right)^3 + \dots$$

Coefficient du viriel:

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{1-n}{n!} \sum_{b \in \mathcal{B}[n]} w_M(b) && \text{(Mayer)} \\ &= \frac{1-n}{n!} \sum_{b \in \mathcal{B}[n]} \bar{a}_n(b) w_{RH}(b) && \text{(Ree - Hoover)} \end{aligned}$$

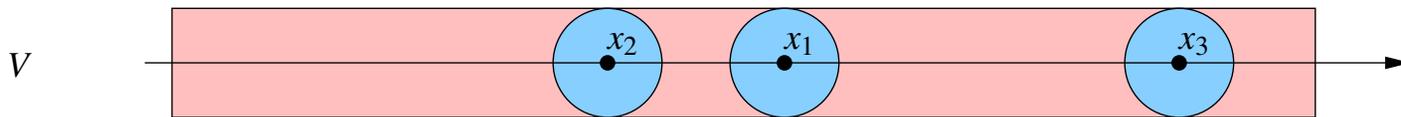
GAZ À NOYAUX DURS

EN

UNE DIMENSION

CAS SPÉCIAL : GAZ À NOYAUX DURS POUR $d = 1$

Particules dures dans $V = [-\frac{v}{2}, \frac{v}{2}]$

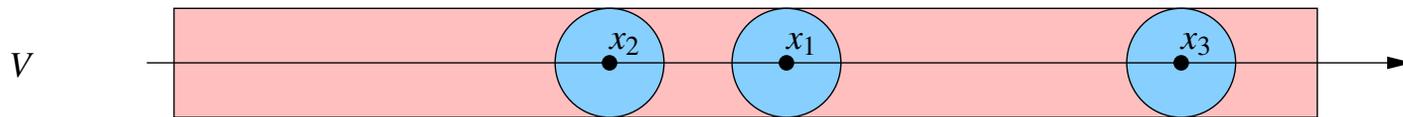


$$f(x, y) = -\chi(|x - y| < 1)$$

$$\bar{f}(x, y) = \chi(|x - y| \geq 1)$$

CAS SPÉCIAL : GAZ À NOYAUX DURS POUR $d = 1$

Particules dures dans $V = [-\frac{v}{2}, \frac{v}{2}]$



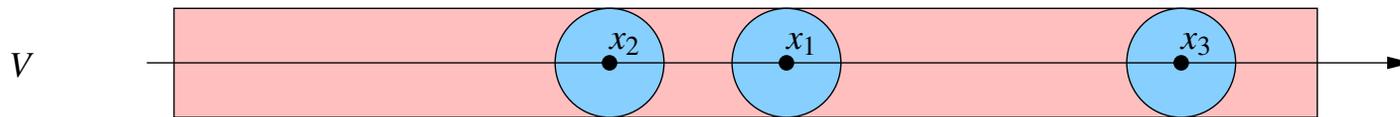
$$f(x, y) = -\chi(|x - y| < 1)$$

$$\bar{f}(x, y) = \chi(|x - y| \geq 1)$$

$$w_M(b) = (-1)^{e(b)} \int_{R^{n-1}} \prod_{\{i, j\} \in b} \chi(|x_i - x_j| < 1) dx_1 \dots dx_{n-1}$$

CAS SPÉCIAL : GAZ À NOYAUX DURS POUR $d = 1$

Particules dures dans $V = [-\frac{v}{2}, \frac{v}{2}]$



$$f(x, y) = -\chi(|x - y| < 1)$$

$$\bar{f}(x, y) = \chi(|x - y| \geq 1)$$

$$w_M(b) = (-1)^{e(b)} \int_{R^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in b} \chi(|x_i - x_j| < 1) dx_1 \dots dx_{n-1}$$

$$w_{RH}(b) = (-1)^{e(b)} \int_{R^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in b} \chi(|x_i - x_j| < 1) \cdot$$

$$\cdot \prod_{\{i,j\} \in \bar{b}} \chi(|x_i - x_j| \geq 1) dx_1 \dots dx_{n-1}$$

POIDS DE MAYER ET VOLUME DE POLYTOPES

$$\begin{aligned}w_M(c) &= (-1)^{e(c)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in c} \chi(|x_i - x_j| < 1) dx_1 \dots dx_{n-1}, \quad x_n = 0 \\ &= (-1)^{e(c)} \text{Vol}(\mathcal{P}(c))\end{aligned}$$

POIDS DE MAYER ET VOLUME DE POLYTOPES

$$\begin{aligned}w_M(c) &= (-1)^{e(c)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in c} \chi(|x_i - x_j| < 1) dx_1 \dots dx_{n-1}, \quad x_n = 0 \\ &= (-1)^{e(c)} \text{Vol}(\mathcal{P}(c))\end{aligned}$$

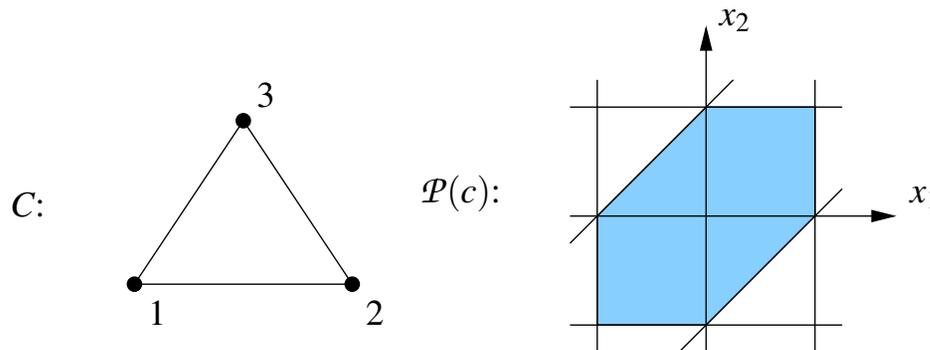
où $\mathcal{P}(c) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \text{ et } |x_i - x_j| \leq 1 \ \forall \{i, j\} \in c\}$

POIDS DE MAYER ET VOLUME DE POLYTOPES

$$\begin{aligned}w_M(c) &= (-1)^{e(c)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in c} \chi(|x_i - x_j| < 1) dx_1 \dots dx_{n-1}, \quad x_n = 0 \\ &= (-1)^{e(c)} \text{Vol}(\mathcal{P}(c))\end{aligned}$$

où $\mathcal{P}(c) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \text{ et } |x_i - x_j| \leq 1 \ \forall \{i, j\} \in c\}$

Exemple



POIDS DE REE-HOOVER ET POLYTOPES

$$\begin{aligned}w_{RH}(b) &= (-1)^{e(b)} \int_{R^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in b} \chi(|x_i - x_j| < 1) \cdot \\ &\quad \cdot \prod_{\{i,j\} \in \bar{b}} \chi(|x_i - x_j| \geq 1) dx_1 \dots dx_{n-1}, \quad x_n = 0 \\ &= (-1)^{e(b)} \text{Vol}(\mathcal{P}_{RH}(b))\end{aligned}$$

POIDS DE REE-HOOVER ET POLYTOPES

$$\begin{aligned}w_{RH}(b) &= (-1)^{e(b)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in b} \chi(|x_i - x_j| < 1) \cdot \\ &\quad \cdot \prod_{\{i,j\} \in \bar{b}} \chi(|x_i - x_j| \geq 1) dx_1 \dots dx_{n-1}, \quad x_n = 0 \\ &= (-1)^{e(b)} \text{Vol}(\mathcal{P}_{RH}(b))\end{aligned}$$

où $\mathcal{P}_{RH}(b) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \text{ et } |x_i - x_j| \leq 1 \ \forall \{i, j\} \in b, \\ |x_i - x_j| \geq 1 \ \forall \{i, j\} \in \bar{b}\}$

MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHES

$$\begin{aligned}w_M(c) &= (-1)^{e(c)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in c} \chi(|x_i - x_j| < 1) dx_1 \dots dx_{n-1}, \quad x_n = 0 \\ &= (-1)^{e(c)} \text{Vol}(\mathcal{P}(c))\end{aligned}$$

MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHS

$$\begin{aligned}w_M(c) &= (-1)^{e(c)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in c} \chi(|x_i - x_j| < 1) dx_1 \dots dx_{n-1}, \quad x_n = 0 \\ &= (-1)^{e(c)} \text{Vol}(\mathcal{P}(c))\end{aligned}$$

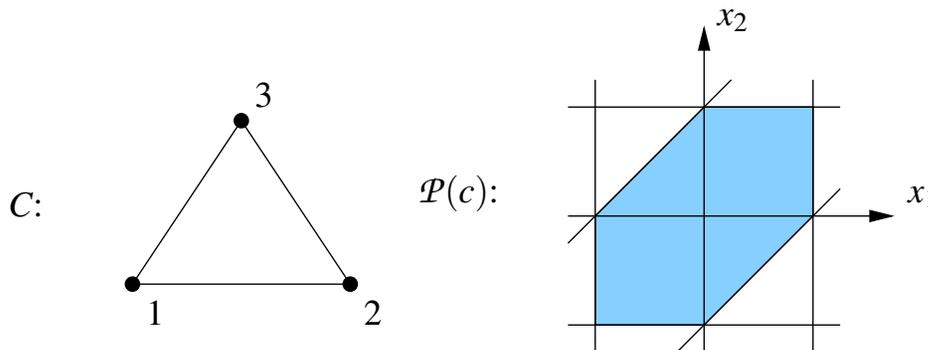
où $\mathcal{P}(c) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \text{ et } |x_i - x_j| \leq 1 \ \forall \{i, j\} \in c\}$

MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHERS

$$\begin{aligned}w_M(c) &= (-1)^{e(c)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in c} \chi(|x_i - x_j| < 1) dx_1 \dots dx_{n-1}, \quad x_n = 0 \\ &= (-1)^{e(c)} \text{Vol}(\mathcal{P}(c))\end{aligned}$$

où $\mathcal{P}(c) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \text{ et } |x_i - x_j| \leq 1 \ \forall \{i, j\} \in c\}$

Exemple

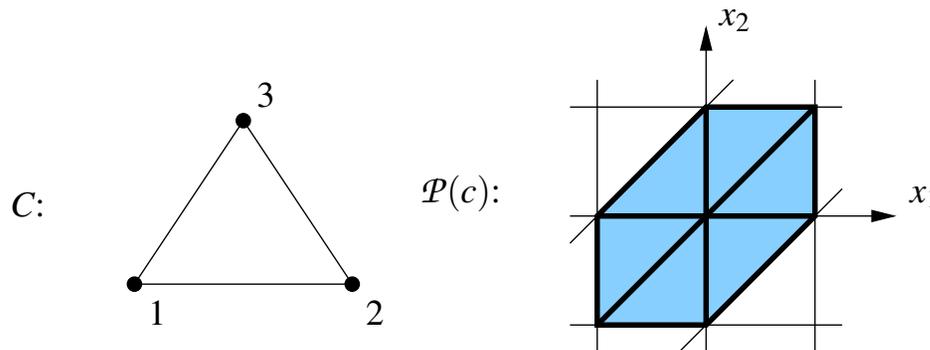


MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHERS

$$\begin{aligned}w_M(c) &= (-1)^{e(c)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in c} \chi(|x_i - x_j| < 1) dx_1 \dots dx_{n-1}, \quad x_n = 0 \\ &= (-1)^{e(c)} \text{Vol}(\mathcal{P}(c)),\end{aligned}$$

où $\mathcal{P}(c) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \text{ et } |x_i - x_j| \leq 1 \ \forall \{i, j\} \in c\}$

Exemple



MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHERS

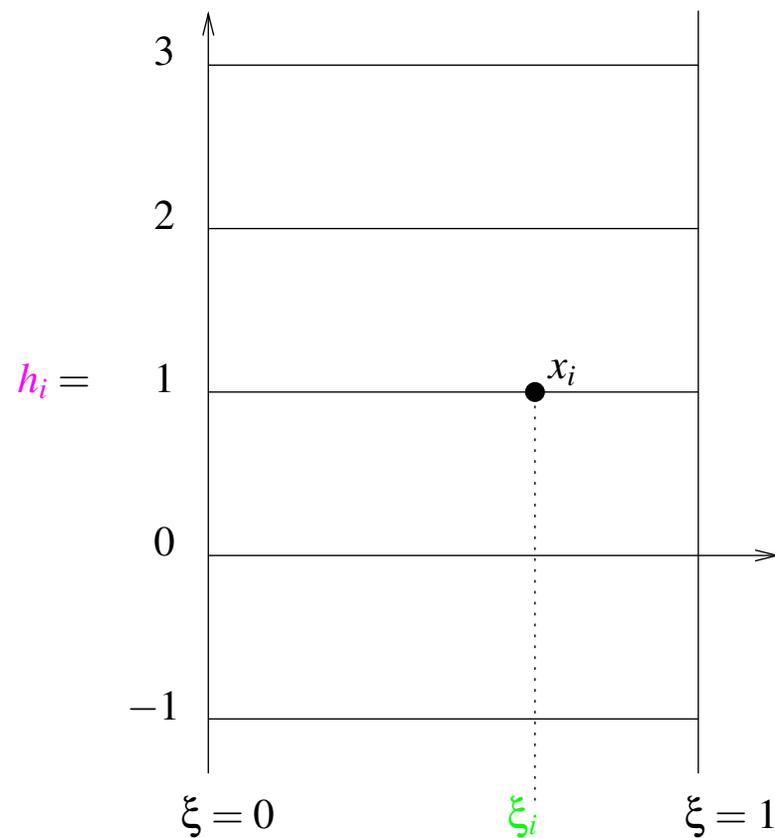
Représentation fractionnaire: $x_i = h_i + \xi_i$

h_i : partie entière de x_i ξ_i : partie fractionnaire de x_i

MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHERS

Représentation fractionnaire: $x_i = h_i + \xi_i$

h_i : partie entière de x_i ξ_i : partie fractionnaire de x_i

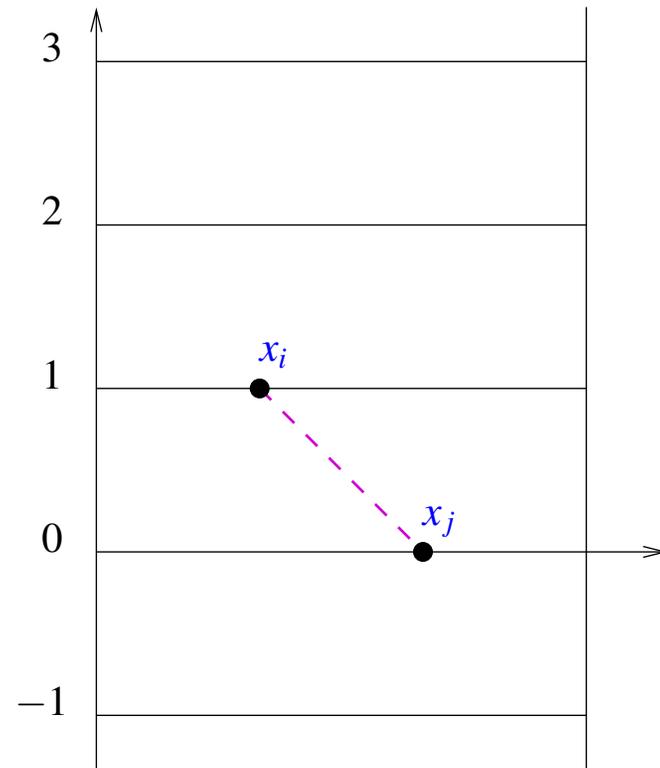
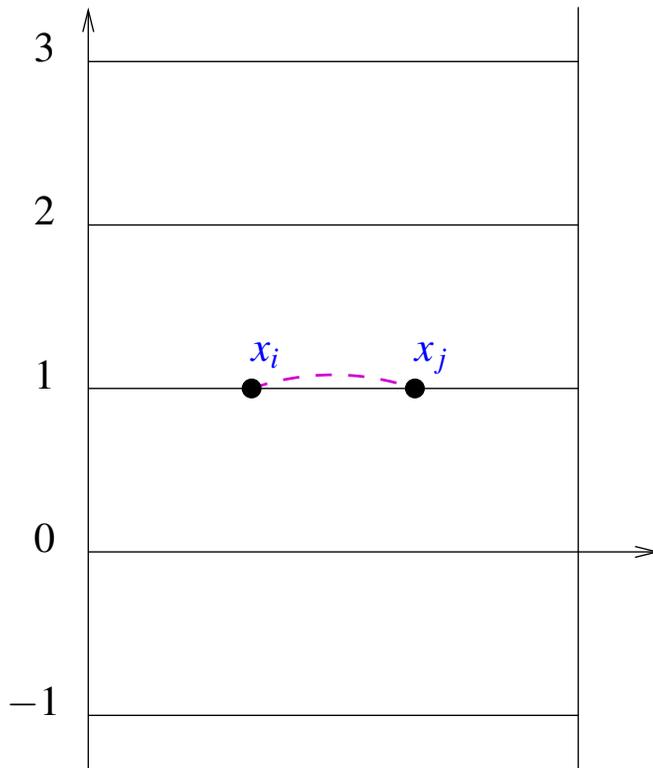


MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHES

$$|x_i - x_j| < 1 \iff$$

MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHES

$$|x_i - x_j| < 1 \iff$$



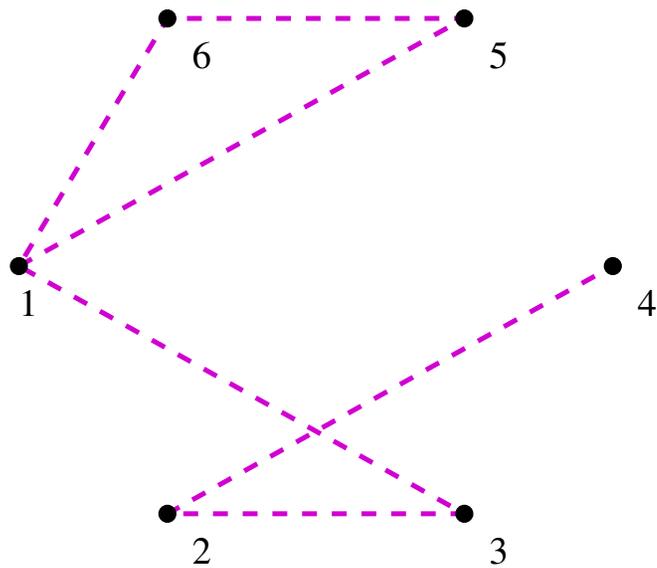
MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHS

- Idée [Bodo Lass]: Évaluer le volume du polytope $\mathcal{P}(c)$ en le décomposant en $v(c)$ simplexes (valides) chacun de volume $\frac{1}{(n-1)!}$

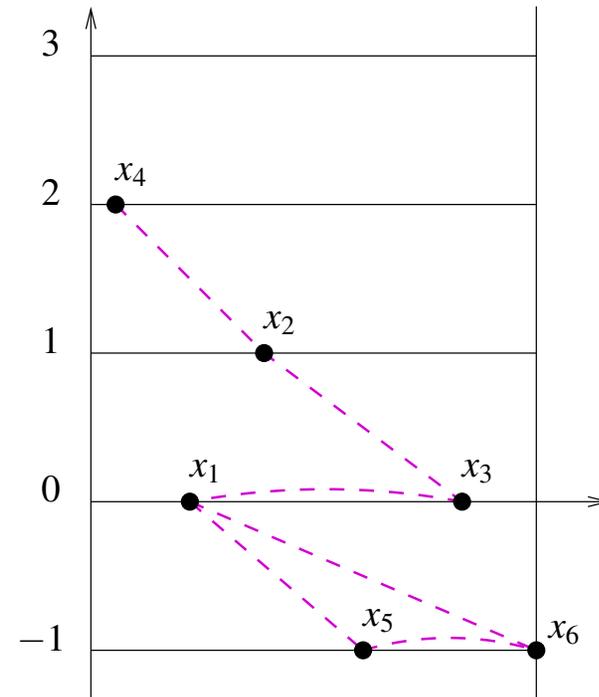
MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHES

- **Idée [Bodo Lass]:** Évaluer le volume du polytope $\mathcal{P}(c)$ en le décomposant en $\mathbf{v}(c)$ simplexes (valides) chacun de volume $\frac{1}{(n-1)!}$
- **Comment:** Ces simplexes sont classifiés en fixant les parties entières (h_1, h_2, \dots, h_n) et les positions relatives des parties fractionnaires $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ des coordonnées des points $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{P}(c)$

MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHES



$$\begin{aligned} h_1 &= 0 \\ h_2 &= 1 \\ h_3 &= 0 \\ h_4 &= 2 \\ h_5 &= -1 \\ h_6 &= -1 \end{aligned}$$



$$\xi_4 < \xi_1 < \xi_2 < \xi_5 < \xi_3 < \xi_6$$

MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHERS CAS DU POIDS DE MAYER

- Simplexes valides:

$$\forall \{i, j\} \in c, \xi_i < \xi_j \text{ implique } h_i = h_j \text{ ou } h_i = h_j + 1$$

MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHERS CAS DU POIDS DE MAYER

- Simplexes valides:

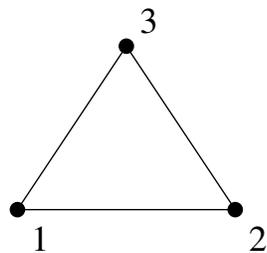
$$\forall \{i, j\} \in c, \xi_i < \xi_j \text{ implique } h_i = h_j \text{ ou } h_i = h_j + 1$$

- Prop [Bodo Lass]: $\text{Vol}(\mathcal{P}(c)) = \frac{v(c)}{(n-1)!}$ où

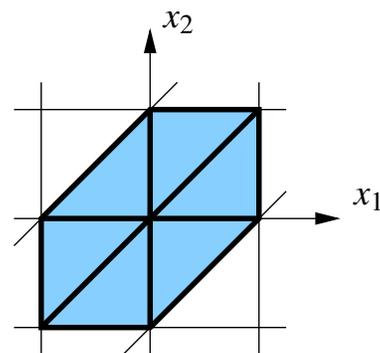
$$\begin{aligned} v(c) &= \# \text{ de simplexes valides de } \mathcal{P}(c) \\ &= \# \text{ de configurations pour le graphe } c \end{aligned}$$

NOMBRE DE CONFIGURATIONS

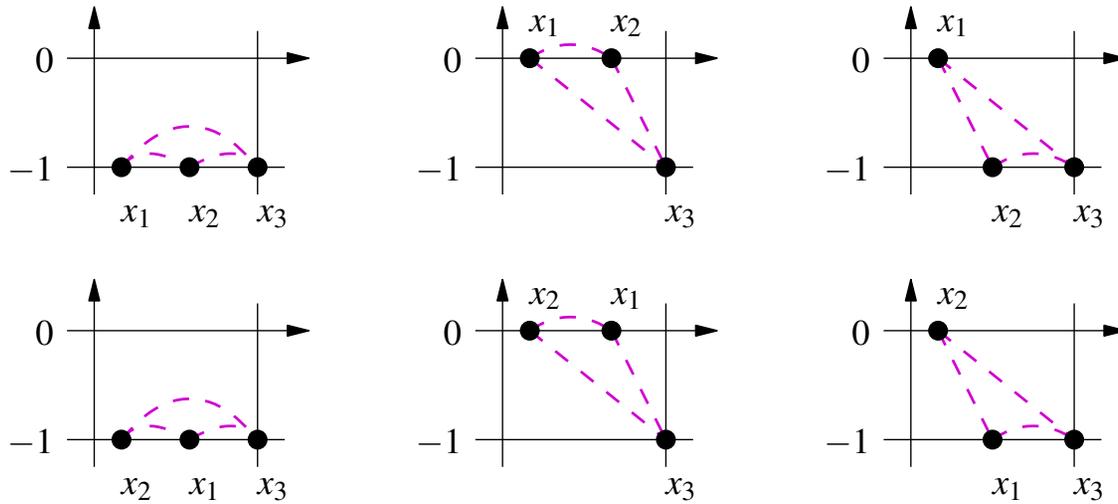
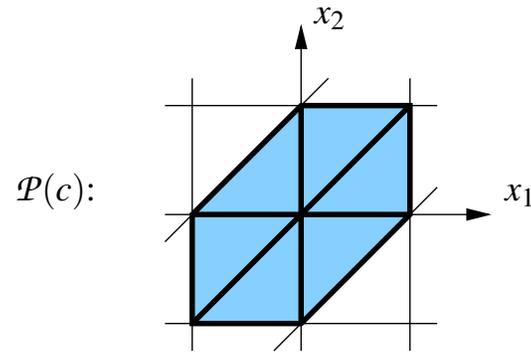
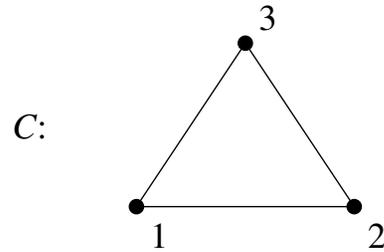
$C:$



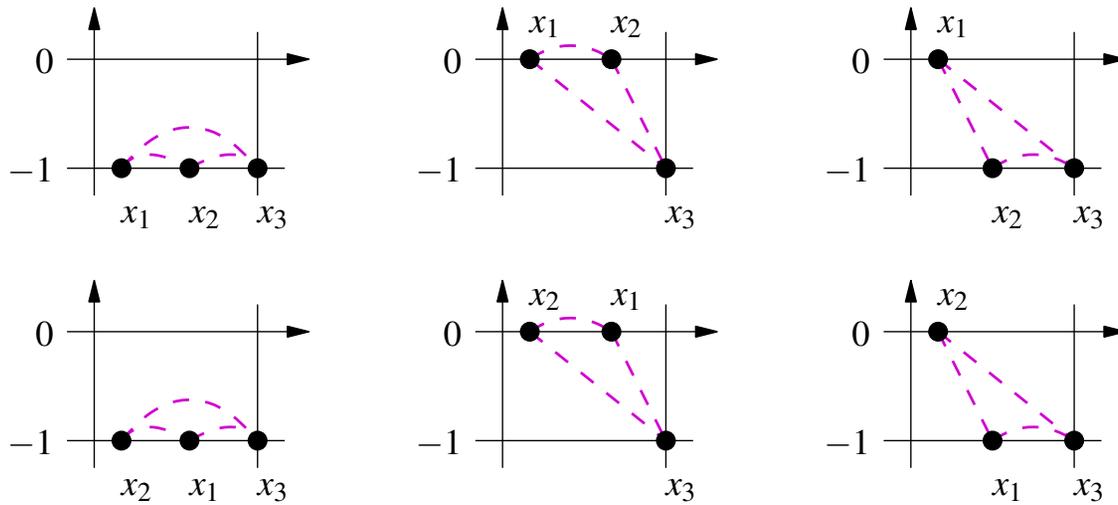
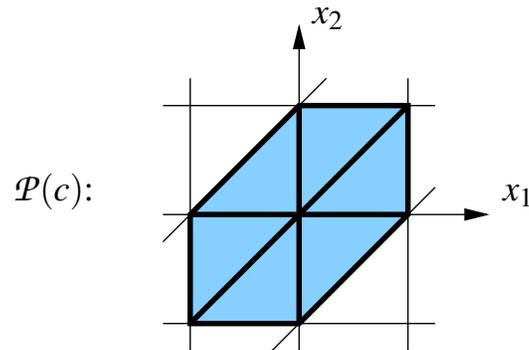
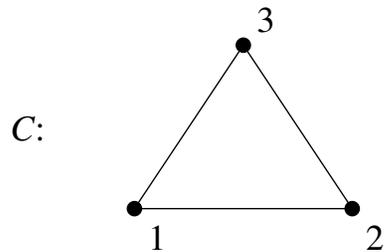
$\mathcal{P}(c):$



NOMBRE DE CONFIGURATIONS



NOMBRE DE CONFIGURATIONS



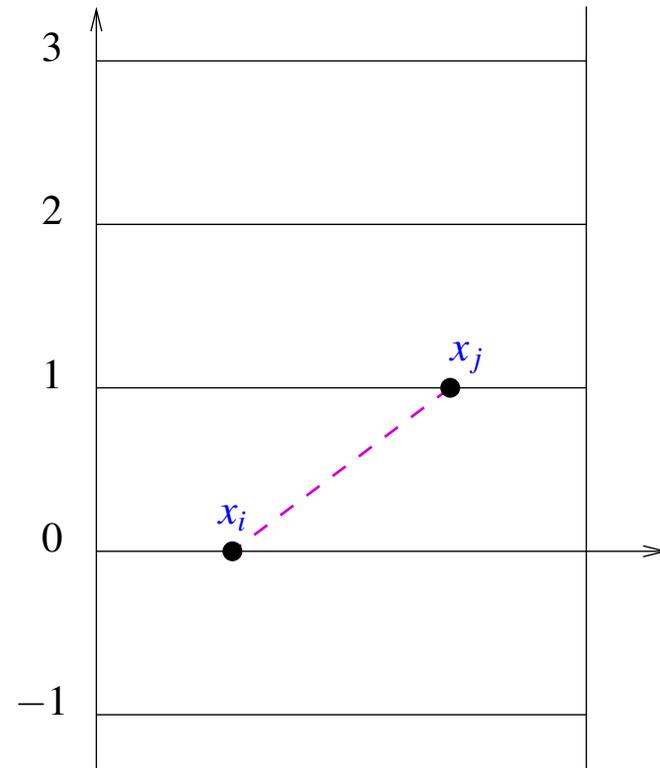
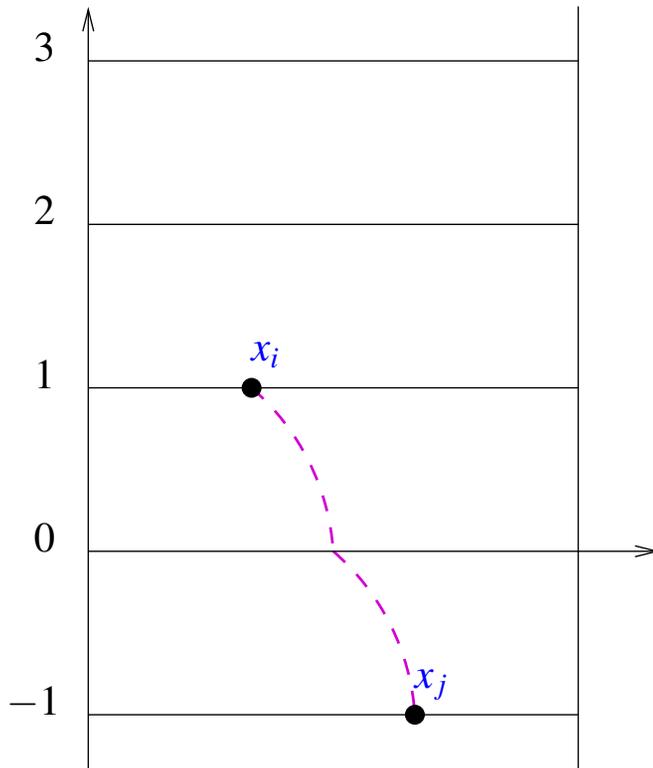
Le poids de chaque configuration est $\frac{(-1)^{e(c)}}{(n-1)!}$

MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHERS ADAPTÉE AU CAS DE REE-HOOVER

$$|x_i - x_j| > 1 \iff$$

MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHERS ADAPTÉE AU CAS DE REE-HOOVER

$$|x_i - x_j| > 1 \iff$$



MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHERS ADAPTÉE AU CAS DE REE-HOOVER

- Simplexes RH-valides:

$\forall \{i, j\} \in c, \xi_i < \xi_j$ implique $h_i = h_j$ ou $h_i = h_j + 1$, et

$\forall \{i, j\} \in \bar{c}, \xi_i < \xi_j$ implique $h_i \leq h_j - 1$ ou $h_i \geq h_j + 2$

MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHERS ADAPTÉE AU CAS DE REE-HOOVER

- Simplexes RH-valides:

$\forall \{i, j\} \in c, \xi_i < \xi_j$ implique $h_i = h_j$ ou $h_i = h_j + 1$, et

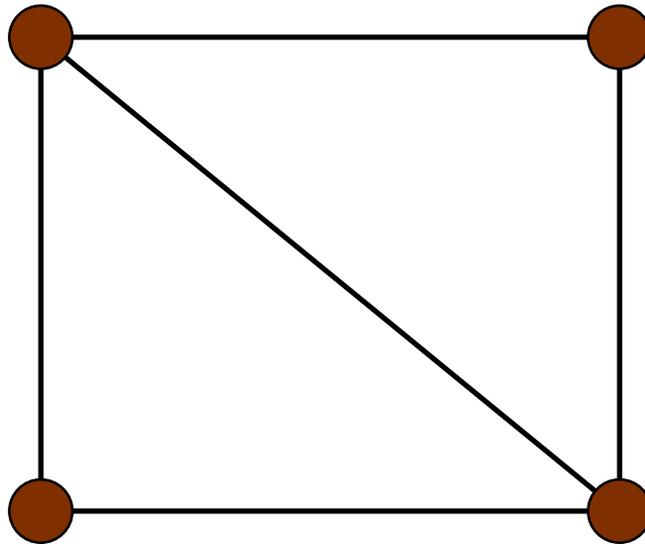
$\forall \{i, j\} \in \bar{c}, \xi_i < \xi_j$ implique $h_i \leq h_j - 1$ ou $h_i \geq h_j + 2$

- Proposition: $\text{Vol}(\mathcal{P}_{RH}(c)) = \frac{\mathbf{v}_{RH}(c)}{(n-1)!}$ où

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{RH}(c) &= \# \text{ de simplexes valides de } \mathcal{P}_{RH}(c) \\ &= \# \text{ de RH - configurations pour le graphe } c\end{aligned}$$

MAYER VERSUS REE-HOOVER

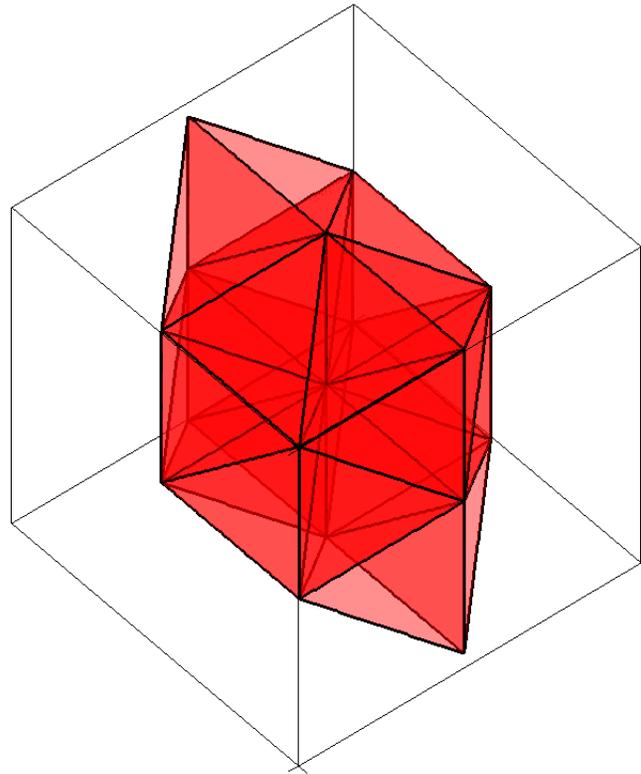
Exemple :



$$K_4 \setminus \{e\}$$

POIDS DE MAYER DE $K_4 \setminus \{e\}$

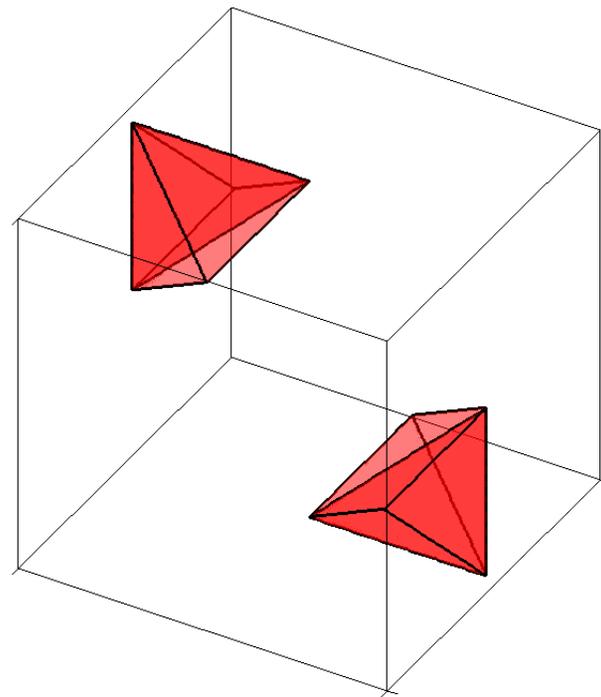
Polytope $\mathcal{P}(K_4 \setminus \{e\})$:



$$|w_M(K_4 \setminus \{e\})| = \frac{28}{3!} = \frac{14}{3}$$

POIDS DE REE-HOOVER DE $K_4 \setminus \{e\}$

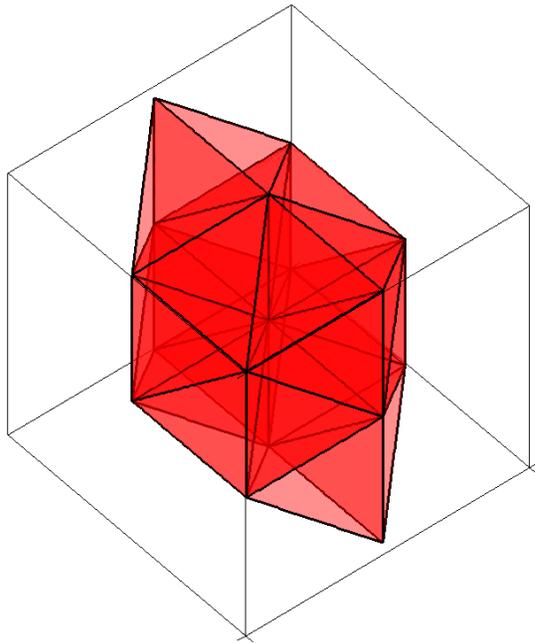
Réunion de polytopes $\mathcal{P}_{RH}(K_4 \setminus \{e\})$:



$$|w_{RH}(K_4 \setminus \{e\})| = \frac{4}{3!} = \frac{2}{3}$$

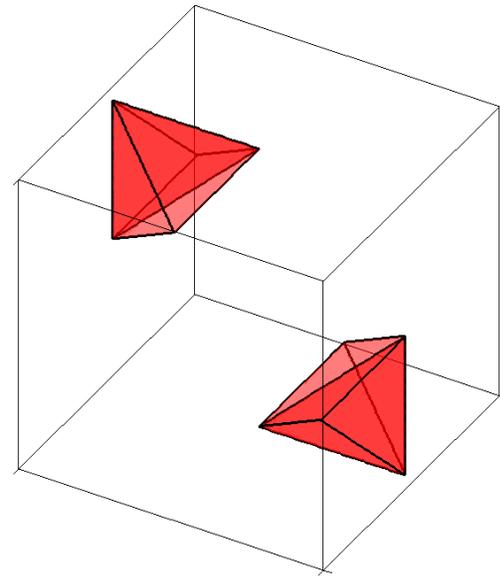
MAYER VERSUS REE-HOOVER

Mayer



28 simplexes

Ree-Hoover



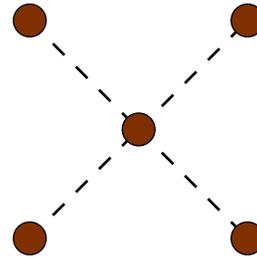
4 simplexes

QUELQUES FORMULES
EXPLICITES POUR
LES DEUX POIDS

NOUVELLES FORMULES EXPLICITES : $K_n \setminus S_k$

Soit S_k le graphe k -étoile

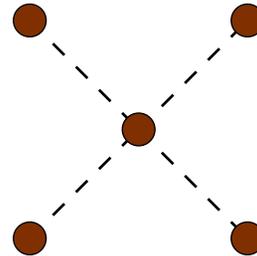
Le graphe S_4



NOUVELLES FORMULES EXPLICITES : $K_n \setminus S_k$

Soit S_k le graphe k -étoile

Le graphe S_4



Pour $k \geq 1$, $n \geq k + 3$, on a

$$|w_M(K_n \setminus S_k)| = n + 2 \sum_{j=1}^k \frac{j! \binom{k}{j}}{(n-1)(n-2) \cdots (n-j)}$$

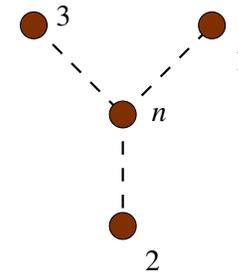
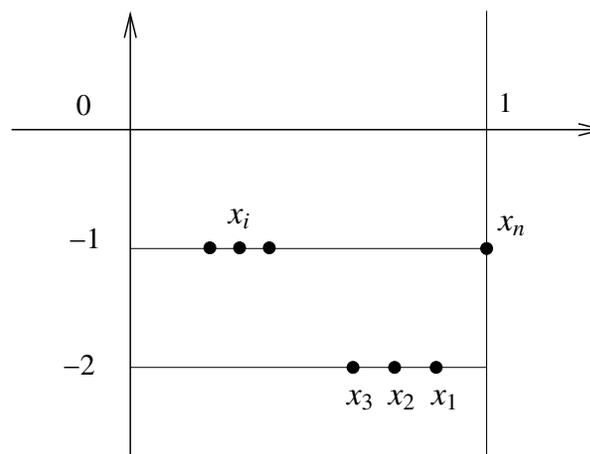
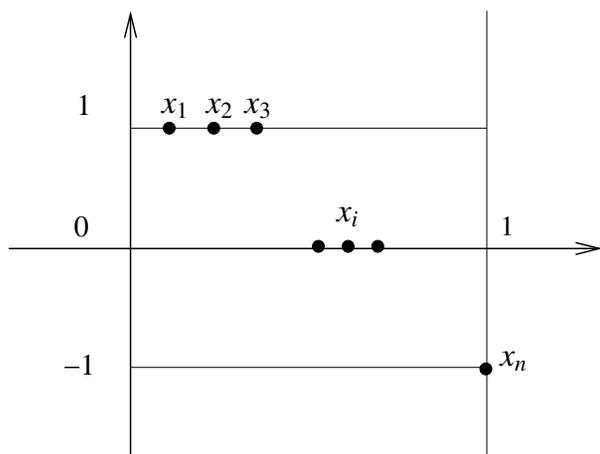
$$|w_{RH}(K_n \setminus S_k)| = \frac{2k!}{(n-1)(n-2) \cdots (n-k)}$$

LE POIDS DE REE-HOOVER DE $K_n \setminus S_3$

Pour $n \geq 3$ on a : $|w_{RH}(K_n \setminus S_3)| = \frac{12}{(n-1)(n-2)(n-3)}$

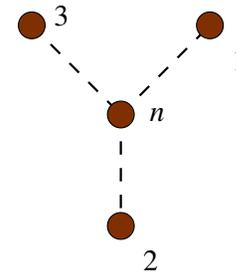
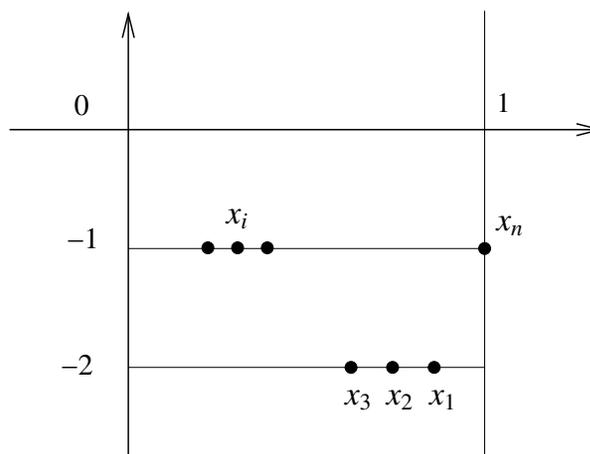
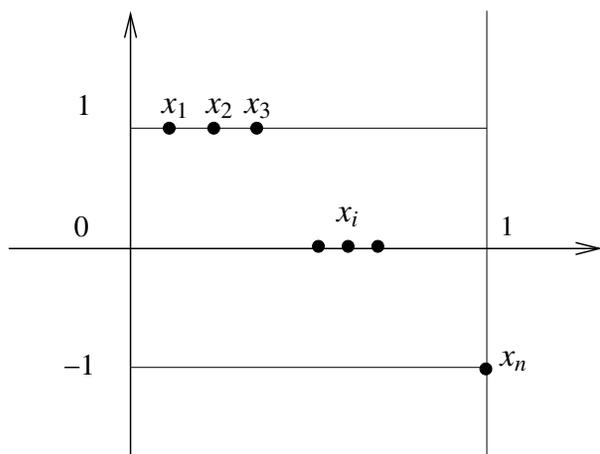
LE POIDS DE REE-HOOVER DE $K_n \setminus S_3$

Pour $n \geq 3$ on a : $|w_{RH}(K_n \setminus S_3)| = \frac{12}{(n-1)(n-2)(n-3)}$



LE POIDS DE REE-HOOVER DE $K_n \setminus S_3$

Pour $n \geq 3$ on a : $|w_{RH}(K_n \setminus S_3)| = \frac{12}{(n-1)(n-2)(n-3)}$



$2 \cdot 3! \cdot (n-4)!$ RH-configurations

LE POIDS DE MAYER DE $K_n \setminus S_3$

On a $|w_M(K_n \setminus S_3)| = n + \frac{6}{(n-1)} + \frac{12}{(n-1)(n-3)}$

LE POIDS DE MAYER DE $K_n \setminus S_3$

$$\text{On a } |w_M(K_n \setminus S_3)| = n + \frac{6}{(n-1)} + \frac{12}{(n-1)(n-3)}$$

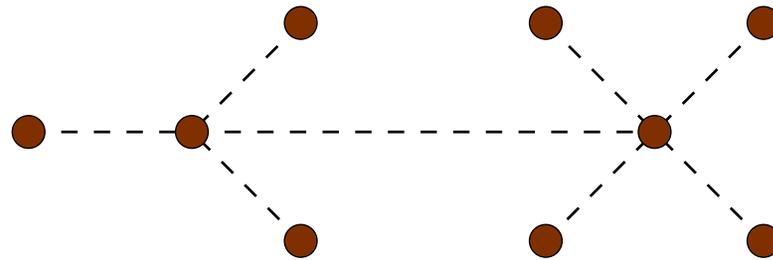
En effet

$$\begin{aligned} |w_M| &= \sum_{K_n \setminus S_3 \subseteq d \subseteq K_n} |w_{RH}(d)| \\ &= |w_{RH}(K_n)| + 3|w_{RH}(K_n \setminus S_1)| + \binom{3}{2} |w_{RH}(K_n \setminus S_2)| + 1|w_{RH}(K_n \setminus S_3)| \\ &= n + 3 \frac{2}{n-1} + \binom{3}{2} \frac{4}{(n-1)(n-2)} + 1 \frac{12}{(n-1)(n-2)(n-3)} \\ &= n + \frac{6}{(n-1)} + \frac{12}{(n-1)(n-3)} \end{aligned}$$

FORMULES EXPLICITES : $K_n \setminus (S_j - S_k)$

Soit $(S_j - S_k)$ le graphe obtenu en joignant par une nouvelle arête les centres d'une j -étoile et d'une k -étoile

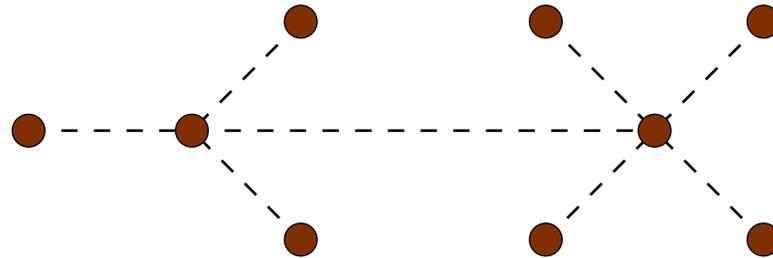
Le graphe $S_3 - S_4$



FORMULES EXPLICITES : $K_n \setminus (S_j - S_k)$

Soit $(S_j - S_k)$ le graphe obtenu en joignant par une nouvelle arête les centres d'une j -étoile et d'une k -étoile

Le graphe $S_3 - S_4$



Pour $j \geq k \geq 1$, $n \geq k + j + 3$, on a

$$|w_{RH}(K_n \setminus (S_j - S_k))| = \frac{2k!j!}{(n-1)(n-2)\cdots(n-(k+j+1))}$$

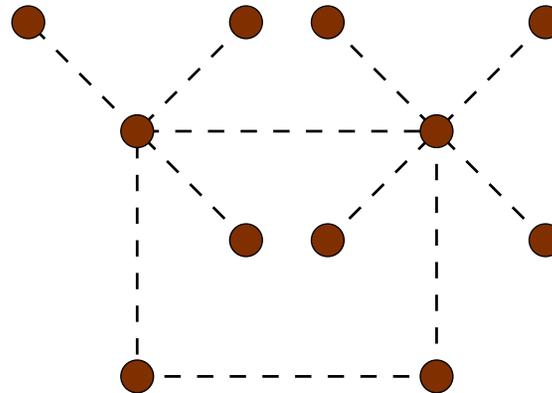
$$|w_M(K_n \setminus (S_j - S_k))| = \sum_{l=1}^{j+1} 2 \left[\binom{j+1}{l} + \binom{k+1}{l} \right] \frac{l!}{(n-1)\cdots(n-l)} - \frac{2}{(n-1)}$$

$$+ \sum_{m=1}^j \sum_{l=1}^k 2 \binom{j}{m} \binom{k}{l} \frac{m!l!}{(n-1)\cdots(n-(m+l+1))} + n$$

FORMULES EXPLICITES : $K_n \setminus (S_j \cdot C_4 \cdot S_k)$

Soit $(S_j \cdot C_4 \cdot S_k)$ le graphe obtenu en joignant par une arête du graphe C_4 les centres d'une j -étoile et d'une k -étoile

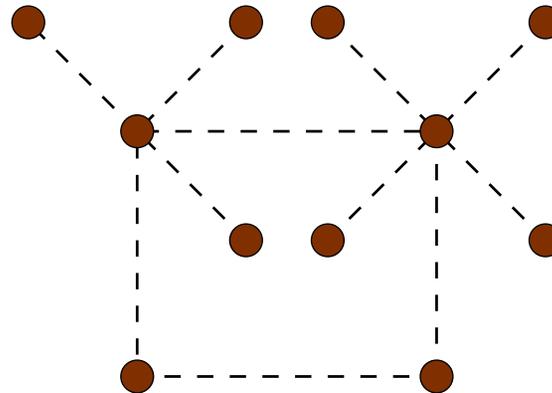
Le graphe $S_3 \cdot C_4 \cdot S_4$



FORMULES EXPLICITES : $K_n \setminus (S_j \cdot C_4 \cdot S_k)$

Soit $(S_j \cdot C_4 \cdot S_k)$ le graphe obtenu en joignant par une arête du graphe C_4 les centres d'une j -étoile et d'une k -étoile

Le graphe $S_3 \cdot C_4 \cdot S_4$



Pour $j \geq k \geq 1$, $n \geq k + j + 5$, on a

$$|w_{RH}(K_n \setminus (S_j \cdot C_4 \cdot S_k))| = \frac{2k!j!}{(n-1)(n-2)\cdots(n-(k+j+3))}$$

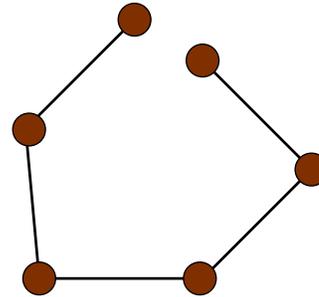
FORMULES EXPLICITES : $K_n \setminus (S_j \cdot C_4 \cdot S_k)$

$$\begin{aligned}
 |w_M(K_n \setminus (S_j \cdot C_4 \cdot S_k))| &= n + \sum_{l=1}^{j+2} 2 \left[\binom{j+2}{l} + \binom{k+2}{l} \right] \frac{l!}{(n-1) \cdots (n-l)} \\
 &\quad + \frac{8}{(n-1)(n-2)} + \frac{10}{(n-1)(n-2)(n-3)} \\
 &\quad + \sum_{l=1}^j 4 \left[\binom{j}{l} + \binom{k}{l} \right] \frac{l!}{(n-1) \cdots (n-(l+3))} \\
 &\quad + \sum_{m=1}^j \sum_{l=1}^k 2 \binom{j}{m} \binom{k}{l} \frac{m!l!}{(n-1) \cdots (n-(m+l+3))} \\
 &\quad + \sum_{l=1}^{j+1} 2 \left[\binom{j+1}{l} + \binom{k+1}{l} \right] \frac{l!}{(n-1) \cdots (n-(l+2))} \\
 &\quad + \sum_{m=1}^{j+1} \sum_{l=1}^{k+1} 2 \binom{j+1}{m} \binom{k+1}{l} \frac{m!l!}{(n-1) \cdots (n-(l+1))}
 \end{aligned}$$

FORMULES EXPLICITES : $K_n \setminus P_k$

Soit P_k la chaîne sur l'ensemble $[k]$

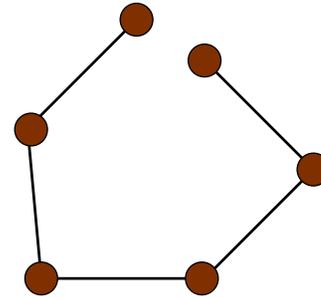
Le graphe P_6



FORMULES EXPLICITES : $K_n \setminus P_k$

Soit P_k la chaîne sur l'ensemble $[k]$

Le graphe P_6

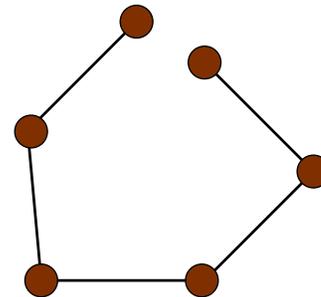


- Pour $k = 3$, $n \geq 5$, on a $K_n \setminus P_3 = K_n \setminus S_2$

FORMULES EXPLICITES : $K_n \setminus P_k$

Soit P_k la chaîne sur l'ensemble $[k]$

Le graphe P_6

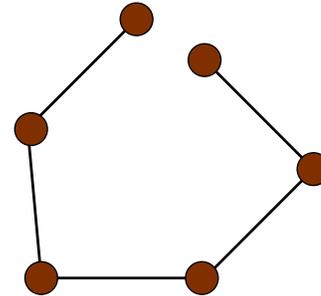


- Pour $k = 3$, $n \geq 5$, on a $K_n \setminus P_3 = K_n \setminus S_2$
- Pour $k = 4$, $n \geq 5$, on a $K_n \setminus P_4 = K_n \setminus S_1 - S_1$

FORMULES EXPLICITES : $K_n \setminus P_k$

Soit P_k la chaîne sur l'ensemble $[k]$

Le graphe P_6



- Pour $k = 3$, $n \geq 5$, on a $K_n \setminus P_3 = K_n \setminus S_2$
- Pour $k = 4$, $n \geq 5$, on a $K_n \setminus P_4 = K_n \setminus S_1 - S_1$
- Pour $k \geq 5$, $n \geq k + 1$, on a

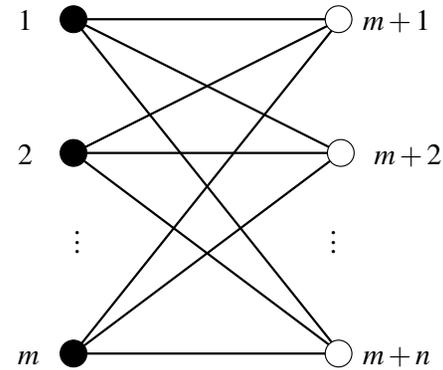
$$|w_M(K_n \setminus P_k)| = n + \frac{2(k-1)}{(n-1)} + \frac{4(k-2)}{(n-1)(n-2)} + \frac{2(k-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$w_{RH}(K_n \setminus P_k) = 0$$

GRAPHES BIPARTIS COMPLETS,
POIDS DE MAYER ET DE R-H
VERSUS INVARIANTS DE GRAPHES

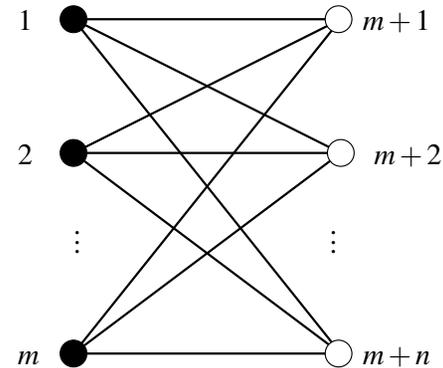
GRAPHES BIPARTIS COMPLETS

$$w_M(K_{m,n}) = (-1)^{mn} \cdot \frac{2^{m+n-1} m! n!}{(m+n-1)!}$$



GRAPHES BIPARTIS COMPLETS

$$w_M(K_{m,n}) = (-1)^{mn} \cdot \frac{2^{m+n-1} m! n!}{(m+n-1)!}$$

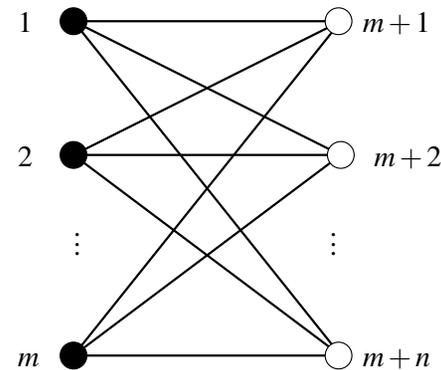


Preuve:

- Évaluation de l'intégrale définissant ce poids (par des changements de variables)

GRAPHES BIPARTIS COMPLETS

$$w_M(K_{m,n}) = (-1)^{mn} \cdot \frac{2^{m+n-1} m! n!}{(m+n-1)!}$$

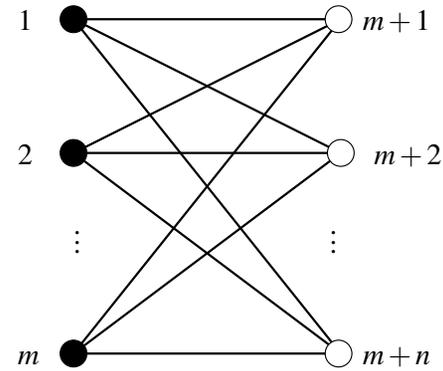


Preuve:

- Évaluation de l'intégrale définissant ce poids (par des changements de variables)
- Dénombrement de certains arrangements planaires spéciaux de points noirs et blancs (+ fonctions Bêta incomplètes)

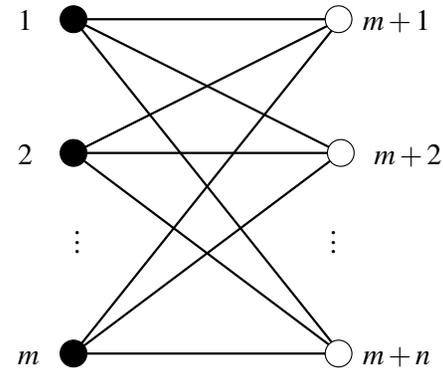
GRAPHES BIPARTIS COMPLETS

$$w_{RH}(K_{m,n}) = 0$$



GRAPHES BIPARTIS COMPLETS

$$w_{RH}(K_{m,n}) = 0$$



MERCI

MERCI

MERCI

MERCI

MERCI

MERCI

MERCI

MERCI

MERCI

MERCI