ISSN 1842-6298 (electronic), 1843-7265 (print)
Volume 11 (2016), 107 – 134

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE ET TOPOLOGIQUE DU FLOT GÉODÉSIQUE SUR LE GROUPE DES ROTATIONS

(GEOMETRIC AND TOPOLOGICAL STUDY OF THE GEODESIC FLOW ON THE ROTATION GROUP)

Ahmed Lesfari

Cet article est dédié au Professeur Luc Haine à l'occasion de son 60ème anniversaire.

Abstract. The aim of this survey paper is to investigate the algebraic complete integrability of Euler-Arnold's body description of the four dimensional rigid body, or equivalently of geodesics in $SO(4)$ using left-invariant metrics that arise from inertia tensors, namely non-degenerate maps $\Lambda : so(4) \to so(4)^* \equiv so(4)$ together with the canonical inner product associated to the Killing form. Algebraic complete integrability is motivated by Arnold-Liouville's classical notion of complete integrability : one extends the value of space and time coordinates from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{C}$, and then the regular invariant manifolds are complex instead of real tori; in addition one demands such complex tori to be projective. Using different methods, as systematized by Adler-Haine-van Moerbeke-Mumford, to study the integrability of the geodesic flow on the rotation group, we will see that the linearization is carried on an abelian surface and each time a Prym variety appears related to this problem.

1 Introduction et généralités

On s'intéresse dans ce travail à l'étude de la complète intégrabilité du flot géodésique sur le groupe des rotations $SO(4)$. Déterminer des métriques invariantes à gauche sur ce groupe telles que le flot géodésique soit complètement intégrable. Cette étude est apparentée à la question de savoir quelles sont les conditions pour que quatre quadriques dans l'espace projectif $\mathbb{P}^6(\mathbb{C})$ se coupent selon la partie affine d'une variété abélienne (un tore algébrique complexe). Nous verrons que cela est du au fait que l'espace vectoriel engendré par ces quadriques contient une courbe

2010 Mathematics Subject Classification: 37J35, 14H40, 14H70.
Keywords: integrable systems, Jacobians, Prym varieties.

entière de quadriques de rang 3. Par ailleurs, on montre que ceci est équivalent à dire que la variété algébrique définie par ces quadriques est munie d'une structure symplectique linéaire ou encore équivalent à dire que cette même variété algébrique est munie de champs de vecteurs indépendants. Nous allons étudier la géométrie et la topologie de cette situation du point de vue de la caractérisation des variétés abéliennes [11, 21, 30] et plus précisément des variétés de Prym [7, 20, 21, 26]. En utilisant différentes méthodes [1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 24, 25] pour l'étude de l'intégrabilité de ce problème, nous verrons que la linéarisation s'effectue sur une surface abélienne et à chaque fois une variété de Prym apparaît liée à ce problème.

Soit

$$\frac{dx}{dt} = J(x)\frac{\partial H}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n = 2m + k, \tag{1}$$

un système hamiltonien, où H est l'hamiltonien et $J(x)$ est une matrice réelle antisymétrique telle que les crochets de Poisson correspondants vérifient l'identité de Jacobi :

$$\{\{H, F\}, G\} + \{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} = 0, \forall H, F, G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

où

$$\{H, F\} = \sum_{i,j} J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j}.$$

Supposons que le système (1) est complètement intégrable, c.-à-d., qu'il admet $m+k$ intégrales premières $H_1 = H, H_2, ..., H_{m+k}$ fonctionnellement indépendantes dont m intégrales sont en involution :

$$\{H_i, H_j\} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq m,$$

et$k$ intégrales sont des fonctions de Casimir :

$$J\frac{\partial H_{m+i}}{\partial x} = 0, \quad 1 \leq i \leq k,$$

et telles que pour presque tous les $c_i \in \mathbb{R}$ les variétés invariantes :

$$\bigcap_{i=1}^{m+k} \{x \in \mathbb{R}^n : H_i(x) = c_i\},$$

sont compactes et connexes. D'après le théorème d'Arnold-Liouville [8], les variétés invariantes sont difféomorphes aux tores réels $T^m_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^m/réseau$. En outre les flots définis par les champs de vecteurs $X_{H_i}, 1 \leq i \leq m$, sont des mouvements rectilignes sur ce tore et les équations du problème sont intégrables par quadratures.

Soient $x \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{C}$ et $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert non vide de Zariski. Comme $H_1, ..., H_{m+k}$ sont fonctionnellement indépendantes, alors l'application

$$\varphi = (H_1, ..., H_{m+k}) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{m+k},$$

est une submersion générique sur Δ. Soit $\mathbf{I} = \varphi(\mathbb{C}^n \backslash \Delta)$, le lieu critique de φ et désignons par $\overline{\mathbf{I}}$ la fermeture de Zariski de $\mathbf{I}$ dans $\mathbb{C}^{m+k}$.

Définition 1. *Le système (1) dont le côté droit est polynomial est algébriquement complètement intégrable [6, 27, 29] si la fibre $M_c \equiv \varphi^{-1}(a)$,*

$$M_c = \bigcap_{i=1}^{m+k} \{x \in \mathbb{C}^n : H_i(x) = c_i\}, \quad c = (c_1, ..., c_{m+k}) \in \mathbb{C}^{m+k} \backslash \overline{\boldsymbol{I}} \tag{2}$$

est la partie affine d'une variété abélienne (un tore complexe $T^m_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}^m/$réseau qui admet un plongement dans un espace projectif). Les flots $g^t_{X_i}(x)$, $x \in M_c$, $t \in \mathbb{C}$, définies par les champs de vecteurs $X_{H_1}, ..., X_{H_m}$ sont des lignes droites sur $T^m_{\mathbb{C}}$, c.-à-d.,

$$\left[g^z_{W_i}(w)\right]_j = f_j\left(p + z(k^i_1, ..., k^i_n)\right),$$

où $f_j(t_1, ..., t_m)$ sont des fonctions abéliennes sur le tore $T^m_{\mathbb{C}}$, $f_j(p) = x_j$, $1 \leq j \leq n$.

Soit $\overline{M}_c$ la fermeture projective de M_c dans l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de dimension n. Alors $\overline{M}_c$ n'est pas une variété abélienne puisque cette dernière n'est pas simplement connexe et ne peut donc en général être une intersection complète projective. Dès lors, pour que M_c soit la partie affine d'une variété abélienne, la variété $\overline{M}_c$ doit être singulière à l'infini. En éclatant la singularité le long du lieu atteint par le flot et en implosant la partie du lieu qui n'est pas atteint par le flot, on montre que la variété $\overline{M}_c$ se transforme en une variété abélienne $\widetilde{M}_c$ et le lieu à l'infini se transforme en une ou plusieurs sous-variétés de codimension 1. On procède comme suit : soit $w_i \longrightarrow u_i$ une transformation birationnelle telle qu'au voisinage de $z = 0$, on ait :

$$u_i = \alpha_i + o(t), \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad u_n = z + o\left(t^2\right),$$

où $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ sont des paramètres libres. Les nouvelles variables u_i ont pour effet d'éclater la singularité de la variété $\overline{M}_c$ le long du lieu à l'infini atteint par le flot. Exprimées dans ces nouvelles variables $u_1, ..., u_n$, les équations différentielles sont régulières et holomorphes au voisinage de $u_n = 0$ tandis que les équations définissant la fibre M_c s'écrivent sous la forme :

$$F_i\left(u_1(t), ..., u_{n-1}(t), u_n(t)\right) = c_i, \quad 1 \leq i \leq m+k,$$

où $F_1, ..., F_{m+k}$ sont des polynômes en w. Pour $t = 0$, on obtient

$$F_i\left(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, 0\right) = c_i, \quad 1 \leq i \leq m+k,$$

et ces relations algébriques entre les paramètres libres $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ fournissent les équations d'une sous-variété $\mathcal{D}$ qui jouera, entre autres, un rôle important dans la compactification de la fibre M_c. Les paramètres libres $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ et la sous variété $\mathcal{D}$ peuvent s'obtenir directement de la manière suivante: d'abord l'on montre l'existence de solutions $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ du système (1) sous la forme de séries de Laurent dépendant de $n-1$ paramètres libres $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$. L'étape suivante consiste à considérer la fermeture $\mathcal{D}$ des composantes continues de l'ensemble des séries de Laurent de $x(t)$ tels que :

$$H_1(x) = c_1, \ldots, H_{m+k}(x) = c_{m+k}.$$

Plus précisément,

$$\mathcal{D} = \bigcap_{i=1}^{m+k} \left\{ \text{coefficient de } t^0 \text{ dans } H_i(x(t)) = a_i \right\}.$$

C'est une sous-variété (un diviseur) de codimension 1. Ensuite on procède à la compactification de la fibre $M_c(3)$ en une variété abélienne $\widetilde{M_c}$. Cette compactification s'obtient par l'adjonction à M_c de ce diviseur $\mathcal{D}$.

Indépendamment du fait que la plupart des exemples classiques et nouveaux de systèmes hamiltoniens complètement intégrables sont algébriquement complètement intégrables, une motivation plus profonde pour leur étude est la suivante : ces systèmes apparaissent systématiquement lorsque l'on étudie les déformations isospectrales d'opérateurs linéaires contenant une indéterminée rationnelle (en bref: paire de Lax). En fait, un théorème de Adler-Kostant-Symes (voir ci-dessous) appliqué aux algèbres de Kac-Moody (extensions formelles de dimension infinie d'une algèbre de Lie semi-simple) fournit de tels systèmes qui sont des déformations isospectrales et qui, par un théorème de van Moerbeke-Mumford [29], sont algébriquement complètement intégrables. Rappelons brièvement de quoi il s'agit.

Définition 2. *Une équation de Lax [16] est une équation différentielle de la forme*

$$\dot{A}(h) = [A(h), B(h)], \qquad \cdot = \frac{d}{dt}, \tag{3}$$

avec

$$A(h) = \sum_{k=1}^{N} A_k(t)\, h^k, \quad B(h) = \sum_{k=1}^{N} B_k(t)\, h^k,$$

des fonctions dépendant d'un paramètre complexe h (paramètre spectrale) et où les A_k et B_k sont des matrices. Le couple (A, B) s'appelle paire de Lax. La courbe algébrique complexe projective $\mathcal{C}$, d'équation affine

$$P(h, z) = \det(A - zI) = 0, \tag{4}$$

est appelée courbe spectrale. Un point (h, z) de la courbe $\mathcal{C}$ décrit une valeur propre z de la matrice A.

Le polynôme caractéristique (4) ne dépend pas de t. Le spectre de A est un invariant (ne dépend pas de t) de la trajectoire de A sous le flot (3). Autrement dit, les coefficients du polynôme caractéristique $P(h,z)$ ne dépendent pas du temps t : ces coefficients sont déterminés uniquement par $tr(A^n)$ et ce sont des intégrales premières. En d'autres termes, on dit que l'équation différentielle (3) décrit une déformation isospectrale. La courbe $\mathcal{C}$ ne dépend pas du temps, son équation s'écrit explicitement sous la forme

$$P(h,z) = h^N + p_1(z)\,h^{N-1} + \cdots + p_N(z),$$

et l'on peut utiliser les méthodes de la géométrie algébrique pour l'étudier. Le résultat principal ici est que lorsque un flot possède cette structure, alors celui-ci se linéarise d'après une méthode de van Moerbeke-Mumford [29] sur la variété jacobienne $Jac(\mathcal{C})$ (ou sur une sous-variété de cellec-ci) c'est-à-dire sur un tore complexe algébrique engendré par le réseau défini par la matrice des périodes de la courbe $\mathcal{C}$. Signalons que dans un certain nombre de travaux, un lien avec la théorie des groupes et algèbres de Lie a été fait. Cette approche est basée sur le théorème d'Adler-Kostant-Symes [3, 14, 28] ci-dessous, qui donne une construction de grandes familles de fonctions en involution basée sur des décompositions d'algèbres de Lie. Ce théorème fournit des systèmes intégrables comme déformations isospectrales sur des orbites coadjointes dans des algèbres de Kac-Moody (extensions formelles de dimensions infinies d'algèbres de Lie semi-simples). Ces systèmes ont suffisament d'intégrales premières en involution. Appliqué à des algèbres de dimension finie, ce théorème fournit des systèmes hamiltoniens à surfaces invariantes non-compactes tandis que la dimension infinie fournit des systèmes compacts. Des résultats précis ont été obtenus pour une classe intéressante d'orbites que ce soit dans le cas d'algèbres de Lie de dimension finie ou infinie.

Théorème 3. *(Adler-Kostant-Symes). Soit $\mathcal{L} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{N}$ une algèbre de Lie, somme directe de deux sous algèbres $\mathcal{K}$ et $\mathcal{N}$, munie d'une forme bilinéaire non-dégénérée Ad-invariante $\langle\ ,\ \rangle$. Soient $\mathcal{K}^\perp$ et $\mathcal{N}^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{N}$ respectivement. Alors, la projection $\mathcal{L} \to \mathcal{K}^\perp$ munit $\mathcal{K}^\perp$ de la structure coadjointe pour $\mathcal{N}$. En outre, on a $\mathcal{L} = \mathcal{L}^* = \mathcal{K}^\perp \oplus \mathcal{N}^\perp$, et $\mathcal{K}^\perp = \mathcal{N}^*$ (dual de $\mathcal{N}$) est munie avec $\mathcal{N}$ d'une forme induite héritant de la structure de Kostant-Kirillov. Soit $V \subset \mathcal{N}^*$ une variété invariante sous l'action coadjointe de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{N}^*$ et notons $\mathcal{A}(V)$ l'algèbre des fonctions définies sur un voisinage de V, invariante sous l'action coadjointe de $\mathcal{L}$ (ce qui est distinct de l'action de $\mathcal{N} - \mathcal{N}^*$). Alors les fonctions H dans $\mathcal{A}(V)$ mènent à des champs de vecteurs commutants et ayant la forme de Lax suivante :*

$$\dot{a} = [a, pr_{\mathcal{K}}(\nabla H)],$$

où $pr_{\mathcal{K}}$ désigne la projection sur $\mathcal{K}$.

Pour toute algèbre de Lie $\mathcal{L}$ de dimension finie munie du crochet $[,]$ et de la forme de Killing $\langle , \rangle$, il existe une extension formelle (dimension infinie) sous forme de série de Laurent :

$$\mathcal{L} = \left\{ \sum_{-\infty}^{N} A_i h^i : A_i \in \mathcal{L}, N \in \mathbb{Z} \text{ arbitraire} \right\},$$

munie du crochet

$$\left[\sum A_i h^i, \sum B_j h^j \right] = \sum_{i,j} [A_i, B_j]\, h^{i+j},$$

et des formes symétriques ad-invariantes

$$\left\langle \sum A_i h^i, \sum B_j h^j \right\rangle_k = \sum_{i+j=-k} \langle A_i, B_j \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si $\langle , \rangle$ est non-dégénérée, alors il en est de même des formes $\langle , \rangle_k$. Soit $\mathcal{L}_{p,q}$ $(p \leq q)$ l'espace vectoriel des puissances de h compris entre p et q. Une classe intéressante de problèmes s'obtient en prenant $\mathcal{L} = \mathcal{G}l(n, \mathbb{R})$ et en choisissant la forme $\langle , \rangle_1$ sur l'extension de Kac-Moody. Alors nous avons la décomposition en sous algèbres de Lie

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{0,\infty} \oplus \mathcal{L}_{-\infty,-1} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{N},$$

avec $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{\perp}$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\perp}$ et $\mathcal{K} = \mathcal{N}^*$. Considérons la variété invariante V_m, $m \geq 1$ dans $\mathcal{K} = \mathcal{N}^*$, définie par

$$V_m = \left\{ A = \sum_{i=1}^{m-1} A_i h^i + \alpha h^m \ , \ \alpha = diag(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \text{ fixé} \right\},$$

avec $diag\,(A_{m-1}) = 0$. On montre que la variété V_m possède une structure symplectique naturelle, les fonctions $H = \left\langle f(Ah^{-j}), h^k \right\rangle_1$ sur V_m(f étant régulière) mènent à des systèmes complètement intégrables ayant la forme

$$\dot{A} = \left[A, pr_{\mathcal{K}}(f'(Ah^{-j})h^{k-j}) \right], \qquad A = \sum_{i=0}^{m-1} A_i h^i + \alpha h.$$

Ces systèmes se linéarisent sur la variété jacobienne d'une courbe algébrique $\mathcal{C}$ d'équation $P\,(z, h) = \det\,(A - zI) = 0$, et de genre $(n-1)\,(nm-2)\,/2$. Les coefficients de ce polynôme fournissent les invariants d'orbite de V_m et un ensemble d'intégrales premières indépendantes. En particulier, pour $j = m$, $k = m + 1$, les flots s'écrivent sous la forme

$$\dot{A} = \left[A \ , \ ad_\beta \ ad_\alpha^{-1} A_{m-1} + \beta h \right], \quad \beta_i = f'\,(\alpha_i)$$

Une autre classe s'obtient en choisissant une algèbre de Lie L semi-simple quelconque. Alors pour l'extension de Kac-Moody $\mathcal{L}$ munie de la forme $\langle , \rangle = \langle , \rangle_0$, on a

$$\mathcal{L} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} L_i, [L_i, L_j] \subset L_{i+j}, \quad [L_0, L_0] = 0, \quad L_i^* = L_{-i}.$$

Soit

$$B^{+}=\sum_{i\geq 0}L_i,\quad B^{-}=\sum_{i\langle 0}L_i.$$

Alors le produit $\mathcal{L}\times\mathcal{L}$ avec

$$\Big[(l_1,l_2)\,,(l_1',l_2')\Big]=\Big([l_1,l_1'],-[l_2,l_2']\Big),\qquad \Big\langle(l_1,l_2)\,,(l_1',l_2')\Big\rangle=\langle l_1,l_1'\rangle-\langle l_2,l_2'\rangle,$$

admet la décomposition en $\mathcal{K}+\mathcal{N}$ avec

$$\begin{aligned}\mathcal{K}&=\{(l,-l):l\in\mathcal{L}\}\,,\qquad \mathcal{K}^{\perp}=\{(l,l):l\in\mathcal{L}\}\,,\\ \mathcal{N}&=\big\{(l_-,l_+):l_-\in B^-,l_+\in B^+,pr_0(l_-)=pr_0(l_+)\big\}\,,\\ \mathcal{N}^{\perp}&=\big\{(l_-,l_+):l_-\in B^-,l_+\in B^+,pr_0(l_++l_-)=0\big\}\,,\end{aligned}$$

où pr_0 désigne la projection sur L_0. Les orbites dans $\mathcal{N}^*{=}K^{\perp}$ possèdent un ensemble de champs de vecteurs hamiltoniens commutatifs. La variété N-invariante définie par

$$V_{-j,k}=\sum_{-j\leq i\leq k}L_i\subseteq\mathcal{L}\simeq\mathcal{K}^{\perp},$$

possède une structure symplectique naturelle et les fonctions $H(l_1,l_2)=f(l_1)$ sur $V_{-j,k}$ mènent à des champs de vecteurs commutants et ayant la forme de Lax suivante :

$$\dot{l}=\left[l,(pr^+-\frac{1}{2}pr_0)\nabla H\right],\ pr^+\ projection\ sur B^+.$$

La linéarisation s'effectue sur la variété jacobienne d'une courbe définie par le polynôme charactéristique d'éléments dans $V_{-j,k}$.

Cette approche (courbe spectrale) a permis de découvrir une intéressante classe de systèmes intégrables. Comme nous l'avons déjà signalé, cela consiste à voir si l'on peut ramener les équations différentielles du problème à étudier à l'équation de Lax. Si c'est le cas, le spectre de la matrice A est indépendant du temps et fournit les intégrales premières en involution et le problème en question se linéarise sur la variété jacobienne (ou une sous-variété de celle-ci) de la courbe $\mathcal{C}$ (4). Autrement dit, les équations qui linéarisent le problème s'écrivent sous la forme

$$\int_{s_1(0)}^{s_1(t)}\omega_k+\int_{s_2(0)}^{s_2(t)}\omega_k+\cdots+\int_{s_g(0)}^{s_g(t)}\omega_k=c_kt,\quad 1\leq k\leq g$$

où $\omega_1,\ldots,\omega_g$ engendrent l'espace (de dimension g) des formes différentielles holomorphes sur la courbe $\mathcal{C}$ de genre g. Donc dès que le flot possède cette structure de Lax, le reste suit de la théorie générale.

Example 4. *(Flot géodésique sur le groupe $SO(n)$). Dans le cas particulier $m=1$, c.-à-d., pour V_1, on choisit $A=X+\alpha h$ où $X\in so(n)$. Dans ce cas, le flot hamiltonien décrit par l'équation de Lax se ramène à l'étude des équations d'Euler-Arnold pour le flot géodésique sur $SO(n)$.*

Example 5. *(Flot géodésique sur un ellipsoide et problème de C. Neumann). Pour $m = 2$, c.-à-d., V_2, si on choisit*

$$A = \alpha h^2 - hx \wedge y - y \otimes y,$$

où $x, y \in \mathbb{R}^n$, alors l'équation de Lax se ramène à

$$\dot{A} = [A, V + \beta h],$$

où

$$V = ad_\beta ad_\alpha^{-1}(y \wedge x), \quad \beta_i = f'(\alpha_i).$$

On peut ramener cette équation au système hamiltonien suivant :

$$\dot{x} = -Vx - \beta y = -\frac{\partial H_\beta}{\partial y}, \qquad \dot{y} = -Vy = \frac{\partial H_\beta}{\partial x},$$

où

$$H_\beta = \frac{1}{2}\sum_i \beta_i F_i(x, y), \quad F_i(x, y) = y_i^2 + \sum_{j \neq i} \frac{(x_i y_j - x_j x_i)^2}{\alpha_i - \alpha_j}.$$

Pour $f(z) = \ln z$, c.-à-d., $\beta_i = \frac{1}{\alpha_i}$, on obtient le problème du flot géodésique sur un ellipsoide,

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{\alpha_n^2} = 1,$$

qui décrit le mouvement de la droite $x + sy, s \in \mathbb{R}$, tangente à l'ellipsoide en x dans la direction y de la géodésique. Pour $f(z) = \frac{1}{2}z^2$, c.-à-d., $\beta_i = \alpha_i$, on obtient le problème de C. Neumann régissant le mouvement d'un point sur la sphère S^{n-1} : $|X| = 1$, sous l'influence de la force $-\alpha x$. D'après ce qui précéde, le flot géodésique sur un ellipsoide et le problème de C. Neumann sont des mouvements rectilignes sur la variété jacobienne $Jac(\mathcal{H})$ où $\mathcal{H}$ est une courbe hyperelliptique de genre $n - 1$.

2 La complète intégrabilité du flot géodésique sur $SO(4)$

On considère le groupe $SO(4)$, son algèbre de Lie $so(4)$ et la forme de Killing

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2}\, tr\ (X.Y)\,,$$

dans $so(4)$ où

$$X = (X_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4} = \sum_{i=1}^{6} x_i e_i = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 & -x_4 \\ x_3 & 0 & -x_1 & -x_5 \\ -x_2 & x_1 & 0 & -x_6 \\ x_4 & x_5 & x_6 & 0 \end{pmatrix} \in so(4).$$

Une métrique invariante à gauche sur $SO(4)$ est définie par une application linéaire symétrique non-singulière

$$\Lambda : so(4) \longrightarrow so(4), \quad X \longmapsto \Lambda.X,$$

avec

$$\langle gX, gY \rangle = \left\langle X, \Lambda^{-1}.Y \right\rangle, \quad g \in SO\,(4)\,.$$

Dès lors le flot géodésique pour cette métrique s'écrit sous la forme (équations d'Euler-Arnold [8, 22, 23]),

$$\dot{X} = [X, \Lambda.X]\,, \tag{5}$$

où

$$\Lambda.X = (\lambda_{ij} X_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4} = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i x_i e_i = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_3 x_3 & \lambda_2 x_2 & -\lambda_4 x_4 \\ \lambda_3 x_3 & 0 & -\lambda_1 x_1 & -\lambda_5 x_5 \\ -\lambda_2 x_2 & \lambda_1 x_1 & 0 & -\lambda_6 x_6 \\ \lambda_4 x_4 & \lambda_5 x_5 & \lambda_6 x_6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 6. *Le flot géodésique (5) s'écrit sous la forme d'un champ de vecteurs hamiltonien (6) et admet les intégrales premières triviales suivantes*

$$H_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2\right), \qquad H_3 = x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6.$$

En outre, si

$$\begin{aligned} &\lambda_1\lambda_6\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_5 - \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_6\lambda_5 - \lambda_3\lambda_6\lambda_4 - \lambda_3\lambda_2\lambda_5, \\ &+\lambda_4\lambda_2\lambda_5 + \lambda_4\lambda_1\lambda_3 - \lambda_4\lambda_1\lambda_5 + \lambda_6\lambda_2\lambda_3 - \lambda_6\lambda_2\lambda_5 - \lambda_1\lambda_6\lambda_3 = 0, \end{aligned}$$

alors il existe une quatrième intégrale première de la forme

$$H_4 = \frac{1}{2}\left(\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 + \cdots + \mu_6 x_6^2\right),$$

Ces intégrales sont fonctionnellement indépendantes, en involution et le système en question est complètement intégrable.

Preuve : Les équations (5) s'écrivent explicitement sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (\lambda_3 - \lambda_2)\,x_2 x_3 + (\lambda_6 - \lambda_5)\,x_5 x_6, \\ \dot{x}_2 &= (\lambda_1 - \lambda_3)\,x_1 x_3 + (\lambda_4 - \lambda_6)\,x_4 x_6, \\ \dot{x}_3 &= (\lambda_2 - \lambda_1)\,x_1 x_2 + (\lambda_5 - \lambda_4)\,x_4 x_5, \\ \dot{x}_4 &= (\lambda_3 - \lambda_5)\,x_3 x_5 + (\lambda_6 - \lambda_2)\,x_2 x_6, \\ \dot{x}_5 &= (\lambda_4 - \lambda_3)\,x_3 x_4 + (\lambda_1 - \lambda_6)\,x_1 x_6, \\ \dot{x}_6 &= (\lambda_2 - \lambda_4)\,x_2 x_4 + (\lambda_5 - \lambda_1)\,x_1 x_5, \end{aligned}$$

et forment un champ de vecteurs hamiltonien

$$\dot{x}(t) = J\frac{\partial H}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}^6, \tag{6}$$

avec

$$H = \frac{1}{2}\langle X, \Lambda X\rangle = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_6 x_6^2\right),$$

et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 & 0 & -x_6 & x_5 \\ x_3 & 0 & -x_1 & x_6 & 0 & -x_4 \\ -x_2 & x_1 & 0 & -x_5 & x_4 & 0 \\ 0 & -x_6 & x_5 & 0 & -x_3 & x_2 \\ x_6 & 0 & -x_4 & x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_5 & x_4 & 0 & -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \in so(6).$$

On a $\det J = 0$, donc $m = 2n + k$ et $m - k = 2n = rgJ$. Ici $m = 6$ et $rgJ = 4$, donc $n = k = 2$. Pour l'étude de la complète intégrabilité de ce système, il nous faut trouver quatre intégrales premières. La première est connue puisque c'est $H_1 = H$. Deux autres intégrales premières H_2 et H_3 sont triviales et satisfont donc aux équations :

$$J\frac{\partial H_2}{\partial x} = J\frac{\partial H_3}{\partial x} = 0.$$

On obtient

$$H_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2\right), \qquad H_3 = x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6.$$

Nous allons chercher la quatrième intégrale première sous la forme

$$H_4 = \frac{1}{2}\left(\mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 + \cdots + \mu_6 x_6^2\right).$$

Les intégrales premières du problème doivent être fonctionnellement indépendantes et en involution, donc on a en particulier $\{H_4, H_3\} = 0$, c.-à-d.,

$$\begin{aligned} &((\lambda_3 - \lambda_2)\mu_1 + (\lambda_1 - \lambda_3)\mu_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)\mu_3)\, x_1x_2x_3 \\ &+ ((\lambda_6 - \lambda_5)\mu_1 + (\lambda_1 - \lambda_6)\mu_5 + (\lambda_5 - \lambda_1)\mu_6)\, x_1x_5x_6 \\ &+ ((\lambda_4 - \lambda_6)\mu_2 + (\lambda_6 - \lambda_2)\mu_4 + (\lambda_2 - \lambda_4)\mu_6)\, x_2x_4x_6 \\ &+ ((\lambda_5 - \lambda_4)\mu_3 + (\lambda_3 - \lambda_5)\mu_4 + (\lambda_4 - \lambda_3)\mu_5)\, x_3x_4x_5 = 0. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} (\lambda_3 - \lambda_2)\mu_1 + (\lambda_1 - \lambda_3)\mu_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)\mu_3 &= 0, \\ (\lambda_6 - \lambda_5)\mu_1 + (\lambda_1 - \lambda_6)\mu_5 + (\lambda_5 - \lambda_1)\mu_6 &= 0, \\ (\lambda_4 - \lambda_6)\mu_2 + (\lambda_6 - \lambda_2)\mu_4 + (\lambda_2 - \lambda_4)\mu_6 &= 0, \end{aligned}$$

$$(\lambda_5 - \lambda_4)\,\mu_3 + (\lambda_3 - \lambda_5)\,\mu_4 + (\lambda_4 - \lambda_3)\,\mu_5 = 0.$$

Posons

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda_3 - \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_3 & \lambda_2 - \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_6 - \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_6 & \lambda_5 - \lambda_1 \\ 0 & \lambda_4 - \lambda_6 & 0 & \lambda_6 - \lambda_2 & 0 & \lambda_2 - \lambda_4 \\ 0 & 0 & \lambda_5 - \lambda_4 & \lambda_3 - \lambda_5 & \lambda_4 - \lambda_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le nombre de solutions du système ci-dessus est égal au nombre de colonnes de la matrice $\mathcal{A}$ moins le rang de $\mathcal{A}$. Comme $rg\mathcal{A} \leq 4$, alors plusieurs possibilités se présentent et nous allons chercher celle qui nous conduira à une nouvelle intégrale première. Le premier cas est $rg\mathcal{A} = 4$, ce qui implique l'existence de deux solutions : la première $\mu_i = 1$ donne lieu à l'intégrale première H_2. La seconde solution est $\mu_i = \lambda_i$ ce qui correspond à l'intégrale première H_3. Donc quand $rg\mathcal{A} = 4$, il n'y a pas de nouveautés. Passons au cas où $rg\mathcal{A} = 3$, ce qui signifie que chaque mineur d'ordre quatre de la matrice $\mathcal{A}$ est singulier. Or

$$\begin{pmatrix} \lambda_3 - \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_3 & \lambda_2 - \lambda_1 & 0 \\ \lambda_6 - \lambda_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 - \lambda_6 & 0 & \lambda_6 - \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_5 - \lambda_4 & \lambda_3 - \lambda_5 \end{pmatrix} = -\,(\lambda_6 - \lambda_5)\,C,$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_3 & \lambda_2 - \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_6 \\ \lambda_4 - \lambda_6 & 0 & \lambda_6 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_5 - \lambda_4 & \lambda_3 - \lambda_5 & \lambda_4 - \lambda_3 \end{pmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_6)\,C,$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_6 & \lambda_5 - \lambda_1 \\ 0 & \lambda_6 - \lambda_2 & 0 & \lambda_2 - \lambda_4 \\ \lambda_5 - \lambda_4 & \lambda_3 - \lambda_5 & \lambda_4 - \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} = -\,(\lambda_2 - \lambda_1)\,C,$$

où

$$\begin{aligned} C \equiv \quad & \lambda_1\lambda_6\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_5 - \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_6\lambda_5 - \lambda_3\lambda_6\lambda_4 - \lambda_3\lambda_2\lambda_5 \\ & + \lambda_4\lambda_2\lambda_5 + \lambda_4\lambda_1\lambda_3 - \lambda_4\lambda_1\lambda_5 + \lambda_6\lambda_2\lambda_3 - \lambda_6\lambda_2\lambda_5 - \lambda_1\lambda_6\lambda_3, \end{aligned}$$

donc la condition pour que ces mineurs s'annulent est $C = 0$. ■

3 Linéarisation via la méthode des déformations isospectrales

Théorème 7. *Le système (6) est un flot hamiltonien pour la structure symplectique de Kostant-Kirillov induite sur l'orbite*

$$\mathcal{O} = \{Ad_g^*(X) = g^{-1}Xg : g \in SO(4)\}, \quad X \in so(4), \tag{7}$$

formé par l'action coadjointe $Ad_g^*(X) = g^{-1}Xg$ *du groupe* $SO(4)$ *sur le dual de l'algèbre de Lie* $so(4)^* \approx so(4)$*. Sous la condition de Manakov (9), le système (6) s'écrit sous la forme de l'équation de Lax (10) et celle-ci est un flot hamiltonien sur une orbite définie dans une algèbre de Kac-Moody. Les équations d'Euler-Arnold (5) se linéarisent sur la variété* $Prym(\Gamma/\Gamma_0)$ *où* Γ *(12) est une surface de Riemann de genre* 3 *et* Γ_0 *(14) une courbe elliptique.*

Preuve : Soient $Z_1Z_2, X \in so(4)$ et $\xi_1 = [X, Z_1]$, $\xi_2 = [X, Z_2]$ deux vecteurs tangents à l'orbite ci-dessus. Sur une telle orbite, la structure symplectique (entre ξ_1 et ξ_2) est définie par

$$(\xi_1, \xi_2) = \langle X, [Z_1, Z_2]\rangle = \langle [X, Z_1], Z_2\rangle.$$

Notons que l'orbite $\mathcal{O}$ (7) (espace de phase) est une sous-variété de dimension quatre. On a

$$\det\left(gXg^{-1}\right) = \det X = (x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6)^2\,,$$

et

$$\begin{aligned} tr\left(gXg^{-1}\right)^2 &= tr\left(gXg^{-1}.gXg^{-1}\right),\\ &= tr\left(gX^2g^{-1}\right),\\ &= tr\left(X^2\right),\\ &= -2\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2\right). \end{aligned}$$

Il faut chercher $tr\left(gXg^{-1}\right)^n$ pour n paire. Pour $n = 2$ on a obtenu trX^2, pour $n = 4$ on aura le produit de trX^2 avec $\det X$ donc pas de nouveautés et la même conclusion se repète pour $n = 6, 8, ...$ L'orbite $\mathcal{O}$ (7) est donc définie par les deux invariants orbitaux suivants :

$$\begin{aligned} \sqrt{\det X} &= x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6,\\ -\frac{1}{2}tr\left(X^2\right) &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2. \end{aligned}$$

Les fonctions H définies sur cette orbite déterminent des champs de vecteurs hamiltoniens $\dot{X} = [X, \nabla H(X)]$. Notons que ∇H est antisymétrique. En particulier

$$H = \frac{1}{2}\langle X, \Lambda X\rangle = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{6}\lambda_j x_j^2, \tag{8}$$

conduit au mouvement du flot géodésique (5) ou (6). Ici on prend pour espace de phase, l'orbite de X. En effet, on peut être tenté de prendre $so(4)$ mais ce choix est à exclure car la structure symplectique est dégénérée (en fait on n'a pas de structure symplectique tout simplement), par contre dans l'orbite de X la structure symplectique est non dégénérée. Les constantes du mouvement sont données par les deux invariants (triviaux) d'orbite $\mathcal{O}$ (7) et par un invariant (non trivial) H (8). L'espace de phase étant de dimension 4, alors pour que le système en question soit complètement intégrable, il faut trouver un quatrième invariant (non trivial). Nous avons vu précédemment que le système est complètement intégrable si la condition suivante est satisfaite

$$\begin{gathered}\lambda_1\lambda_6\lambda_4+\lambda_1\lambda_2\lambda_5-\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_6\lambda_5-\lambda_3\lambda_6\lambda_4-\lambda_3\lambda_2\lambda_5\\ +\lambda_4\lambda_2\lambda_5+\lambda_4\lambda_1\lambda_3-\lambda_4\lambda_1\lambda_5+\lambda_6\lambda_2\lambda_3-\lambda_6\lambda_2\lambda_5-\lambda_1\lambda_6\lambda_3=0.\end{gathered}$$

Cette relation est invariante par translation cyclique : $1\to 4$, $2\to 5$, $3\to 6$, et elle est vérifiée si (condition de Manakov [22])

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\frac{\beta_2-\beta_3}{\alpha_2-\alpha_3}, &\lambda_2=\frac{\beta_1-\beta_3}{\alpha_1-\alpha_3}, &&\lambda_3=\frac{\beta_1-\beta_2}{\alpha_1-\alpha_2},\\ \lambda_4&=\frac{\beta_1-\beta_4}{\alpha_1-\alpha_4}, &\lambda_5=\frac{\beta_2-\beta_4}{\alpha_2-\alpha_4}, &&\lambda_6=\frac{\beta_3-\beta_4}{\alpha_3-\alpha_4},\end{aligned}\tag{9}$$

avec $\alpha_j,\beta_j\in\mathbb{C}$, $\prod_{j<k}(\alpha_j-\alpha_k)\neq 0$. Cette paramétrisation implique que les équations (5) ou (6) peuvent s'écrire sous la forme de Lax

$$(X+\alpha h)^{\cdot}=[X+\alpha h,\Lambda X+\beta h]\,,\tag{10}$$

avec

$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1&0&0&0\\0&\alpha_2&0&0\\0&0&\alpha_3&0\\0&0&0&\alpha_4\end{pmatrix},\qquad \beta=\begin{pmatrix}\beta_1&0&0&0\\0&\beta_2&0&0\\0&0&\beta_3&0\\0&0&0&\beta_4\end{pmatrix},$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}\dot{X}&=[X,\Lambda.X]\Longleftrightarrow(5),\\ [X,\beta]+[\alpha,\Lambda.X]&=0\Longleftrightarrow(9),\\ [\alpha,\beta]&=0\text{ satisfaite pour les matrices diagonales.}\end{aligned}$$

L'équation (10) est un flot hamiltonien sur une orbite définie dans une algèbre de Kac-Moody. Considérons donc l'extension de $gl(n,\mathbb{C})$ (pour $n=4$) de l'algèbre de Kac-Moody

$$\mathcal{L}=\widetilde{gl(n,\mathbb{C})}=\left\{\sum_{-\infty}^{N}A_ih^i : A_i\in gl(n),\ N\ \in\mathbb{Z},\ \text{arbitraire}\right\},$$

avec le commutateur

$$[A(h),B(h)]=\left[\sum A_ih^i,\sum B_jh^j\right]=\sum_k\left(\sum_{i+j=k}[A_i,B_j]\right)h^k,$$

et la forme de Killing sur $gl(n,\mathbb{C})$,

$$\langle A(h), B(h)\rangle = \left\langle \sum A_i h^i, \sum B_j h^j \right\rangle = \sum_{i+j=-1} tr(A_i B_j).$$

On obtient ainsi une forme bilinéaire, ad-invariante, non dégénérée et symétrique. Cette algèbre de Lie admet une décomposition naturelle $\mathcal{L} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{N}$, où

$$\mathcal{K} = \left\{ \sum_{i\geq 0} A_i h^i \right\}, \quad \mathcal{N} = \left\{ \sum_{i \,\langle\, 0} B_i h^i \right\}.$$

On a pour la forme de Killing ci-dessus $\mathcal{K}^\perp = \mathcal{K}$, $\mathcal{N}^\perp = \mathcal{N}$ où $\mathcal{K}^\perp$ et $\mathcal{N}^\perp$ désignent l'orthogonal de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{N}$ respectivement. En outre, le dual de $\mathcal{N}$ s'identifie à $\mathcal{K}$, $\mathcal{N}^* \approx \mathcal{K}^\perp = \mathcal{K}$. Le groupe de Lie de dimension infinie sous-jacent à $\mathcal{N}$ agit de manière coadjointe sur le dual $\mathcal{N}^*$ et définit sur ses orbites une structure symplectique avec un crochet de Poisson

$$\{H_1, H_2\}(a) = \langle a, [\nabla_{\mathcal{N}^*} H_1, \nabla_{\mathcal{N}^*} H_2]\rangle,$$

où $a \in \mathcal{N}^*$ et $\nabla_{\mathcal{N}^*} H_j \in \mathcal{N}$, $j = 1, 2$. Toutes les fonctions définies sur cette orbite sont en involution en vertu du théorème d'Adler-Kostant-Symes et les champs de vecteurs correspondants s'écrivent sous la forme

$$\dot{a} = [a, \mathrm{Proj}_{\mathcal{K}} \nabla H].$$

L'élément $a = X + \alpha h \in \mathcal{N}^*$ définit une orbite dans $\mathcal{N}^*$ et une structure symplectique; toutes les fonctions $\mathcal{L}$-invariantes $\frac{1}{k}\left(ah^{-1}\right)^k h^2$, $k \geq 3$, fournissent des champs de vecteurs hamiltoniens commutants

$$(X + \alpha h)^{\cdot} = \left[X + \alpha h, \mathrm{Proj}_{\mathcal{K}} \left((Xh^{-1} + \alpha)^{k-1} h\right)\right] = [X + \alpha h, Y + \beta h],$$

où

$$Y_{ij} = \frac{\alpha_i^{k-1} - \alpha_j^{k-1}}{\alpha_i - \alpha_j} X_{ij}, \quad \beta = \alpha^{k-1}.$$

En prolongeant ce fait aux fonctions analytiques, on obtient l'équation de Lax (10). Cette dernière signifie que pour tout $h \in \mathbb{C}$, le spectre de la matrice $(X + \alpha h)$ est un invariant (ne dépend pas de t) de la trajectoire de $X + \alpha h$ sous le flot. Autrement dit, Les coefficients de $z^i h^i$ apparaissant dans l'équation définissant la surface de Riemann

$$\Gamma : \quad \left\{(z, h) \in \mathbb{C}^2 : \det(X + \alpha h - zI) = 0\right\},$$

associée à l'équation (10), sont des intégrales premières en involution pour la structure symplectique de cette orbite. En effet, explicitement on a

$$\begin{aligned}\det(X+\alpha h - zI) &= \det\begin{pmatrix} \alpha_1 h - z & -x_3 & x_2 & -x_4 \\ x_3 & \alpha_2 h - z & -x_1 & -x_5 \\ -x_2 & x_1 & \alpha_3 h - z & -x_6 \\ x_4 & x_5 & x_6 & \alpha_4 h - z \end{pmatrix}, \\ &= \prod_{j=1}^{4}(\alpha_j h - z) + Q_2 z^2 - Q_3 zh + Q_4 h^2 + Q_1^2,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} Q_1 &\equiv x_6x_3 + x_4x_1 + x_2x_5, \\ Q_2 &\equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2, \\ Q_3 &\equiv (\alpha_1+\alpha_4)\,x_1^2 + (\alpha_2+\alpha_4)\,x_2^2 + (\alpha_3+\alpha_4)\,x_3^2 \\ &\quad + (\alpha_2+\alpha_3)\,x_4^2 + (\alpha_1+\alpha_3)\,x_5^2 + (\alpha_1+\alpha_2)\,x_6^2, \\ Q_4 &\equiv \alpha_1\alpha_4 x_1^2 + \alpha_2\alpha_4 x_2^2 + \alpha_3\alpha_4 x_3^2 + \alpha_2\alpha_3 x_4^2 + \alpha_1\alpha_3 x_5^2 + \alpha_1\alpha_2 x_6^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Notons que Q_1 et Q_2 sont les invariants d'orbites trouvés précédemment. Comme nous l'avons déjà signalé et on peut le vérifier aisément que Q_1 et Q_2 sont des invariants triviaux tandis que Q_3 et Q_4 sont des invariants non triviaux. Ces intégrales premières sont en involution et fonctionnellement indépendantes. En posant $Q_j = c_j$, $1 \le j \le 4$, où c_j sont des constantes génériques, on obtient

$$\Gamma : \prod_{j=1}^{4}(\alpha_j h - z) + c_2 z^2 - c_3 zh + c_4 h^2 + c_1^2 = 0.$$

En faisant le changement de carte suivant : $(h,z) \longmapsto (w = h^{-1}, u = zh^{-1})$, l'équation ci-dessus s'écrit

$$\Gamma : \prod_{j=1}^{4}(\alpha_j - u) + \left(c_2u^2 - c_3u + c_4\right) w^2 + c_1^2 w^4 = 0. \tag{12}$$

L'application

$$\sigma : \Gamma \longrightarrow \Gamma, \quad (w,u) \longmapsto (-w,u), \tag{13}$$

est une involution sur Γ et le quotient $\Gamma_0 = \Gamma/\sigma$ est une courbe elliptique définie par

$$\Gamma_0 : v^2 = \left(c_2u^2 - c_3u + c_4\right)^2 - 4c_1^2 \prod_{j=1}^{4}(\alpha_j - u). \tag{14}$$

La courbe Γ est un revêtement double ramifié le long de Γ_0,

$$\Gamma \longrightarrow \Gamma_0, \quad (w, v, u) \longmapsto (v, u),$$

$$\Gamma : \left\{ \begin{array}{l} w^2 = \dfrac{v - c_2u^2 + c_3u - c_4}{2c_1^2}, \\ v^2 = \left(c_2u^2 - c_3u + c_4\right)^2 - 4c_1^2 \prod_{j=1}^4 (\alpha_j - u) . \end{array} \right.$$

La courbe Γ possède quatre points à l'infini p_j $(1 \leq j \leq 4)$ et quatre points de branchements $q_j \equiv (w = 0, v = c_2u^2 - c_3u + c_4, u = \alpha_j)$, $1 \leq j \leq 4$, sur la courbe elliptique Γ_0. La structure des diviseurs de w et u est

$$(w) = \sum_{j=1}^4 q_j - \sum_{j=1}^4 p_j, \qquad (u) = 4 \text{ zéros} - \sum_{j=1}^4 p_j.$$

D'après la formule de Riemann-Hurwitz, le genre de Γ est

$$g(\Gamma) = 2\,(g(\Gamma_0) - 1) + 1 + \frac{4}{2} = 3.$$

La variété jacobienne $Jac(\Gamma)$ se décompose en deux parties : une partie paire $Jac\,(\Gamma_0)$ c-à-d. ici une courbe elliptique $\Gamma_0 = \Gamma/\sigma$ et une partie impaire notée $Prym(\Gamma/\Gamma_0)$ (variété de Prym). La méthode de linéarisation de van Moerbeke-Mumford, détermine une application algébrique de la variété affine complexe

$$\bigcap_{j=1}^4 \{x : Q_j(x) = c_j\} \subset \mathbb{C}^6,$$

vers la variété de Jacobi $Jac\,(\Gamma)$ et par l'antisymétrie de Γ, cette application envoie cette variété vers la variété de Prym $Prym(\Gamma/\Gamma_0)$:

$$\bigcap_{j=1}^4 \{x : Q_j(x) = c_j\} \longrightarrow Prym(\Gamma/\Gamma_0), \quad x \longmapsto s_1 + s_2 + s_3,$$

de telle façon que les flots complexes engendrés par les constantes du mouvement soient des mouvements rectilignes sur la variété $Prym(\Gamma/\Gamma_0)$, c.-à-d.,

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^3 \int_{p_j}^{s_j(t)} (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0, k, l),$$

où $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est une base de différentielles holomorphes sur Γ telle que :

$$\sigma^*\omega_1 = \omega_1, \quad \sigma^*\omega_2 = -\omega_2, \quad \sigma^*\omega_3 = -\omega_3,$$

pour l'involution σ (13).

4 Linéarisation via la méthode des développements asymptotiques

Théorème 8. *Soit*

$$\Delta = \left\{ s = [s_1 : s_2 : s_3 : s_4] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) : \det Q_s = \det \sum_{j=1}^{4} s_j Q_j = 0 \right\},$$

la variété discriminante o $Q_1, ..., Q_4$ sont les quatre quadriques (11). Alors, Δ contient une courbe elliptique de quadrique de rang 3. Le système des équations différentielles (6) possède des solutions sous la forme de séries de Laurent dépendant de 5 paramètres libres. La variété invariante $M_c \subset \mathbb{C}^6$ obtenue en égalant ces quadriques à des constantes génériques est la partie affine d'une surface abélienne $\widetilde{M_c}$ et le système en question est algébriquement complètement intégrable. La surface abélienne $\widetilde{M_c}$ est isomorphe au tore complexe $\mathbb{C}^2/L_\Omega$ où le réseau L_Ω est engendré par la matrice des périodes

$$\Omega = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & c \\ 0 & 4 & c & b \end{pmatrix}, \ Im \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} > 0, \quad (a, b, c \in \mathbb{C}),$$

avec $\widetilde{M_c} \backslash M_c =$ courbe algébrique $\mathcal{D}$ (16) de genre 9, laquelle est un revêtement ramifié le long d'une courbe elliptique $\mathcal{E}$(17). Par ailleurs, la courbe $\mathcal{D}$ est un revêtement de degré 4 non ramifié le long de la courbe $\mathcal{C}$ (18) de genre 3 et cette dernière est un revêtement double ramifié le long de la courbe elliptique $\mathcal{C}_0$ (19). En outre, la surface abélienne $\widetilde{M_c}$ est caractérisée comme étant la variété Prym $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$.

Preuve : Reprenons les quatre quadriques (11) et considérons le polynôme quadratique

$$Q_s(x) = \sum_{j=1}^{4} s_j Q_j(x), \quad s = [s_1, s_2, s_3, s_4] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}).$$

Nous allons voir que le système linéaire $\{Q_s(x)\}$ contient une courbe elliptique de quadrique de rang 3. En désignant par les mêmes lettres les matrices de $Q_1, ..., Q_4, Q_s$ par rapport à la base canonique, on obtient évidemment

$$Q_s = \sum_{j=1}^{4} s_j Q_j = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \frac{1}{2}s_1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \frac{1}{2}s_1 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & \frac{1}{2}s_1 \\ \frac{1}{2}s_1 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}s_1 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}s_1 & 0 & 0 & f \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} a &= s_2 + (\alpha_1 + \alpha_4) s_3 + \alpha_1\alpha_4 s_4, \quad & d = s_2 + (\alpha_2 + \alpha_3) s_3 + \alpha_2\alpha_3 s_4, \\ b &= s_2 + (\alpha_2 + \alpha_4) s_3 + \alpha_2\alpha_4 s_4, \quad & e = s_2 + (\alpha_1 + \alpha_3) s_3 + \alpha_1\alpha_3 s_4, \\ c &= s_2 + (\alpha_3 + \alpha_4) s_3 + \alpha_3\alpha_4 s_4, \quad & f = s_2 + (\alpha_1 + \alpha_2) s_3 + \alpha_1\alpha_2 s_4. \end{aligned}$$

On a

$$\det Q_s = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4}s_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4}s_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4}s_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & ad - \frac{1}{4}s_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & be - \frac{1}{4}s_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & cf - \frac{1}{4}s_1^2 \end{pmatrix} = \Delta_1.\Delta_2.\Delta_3,$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\equiv [s_2 + (\alpha_1 + \alpha_4)\, s_3 + \alpha_1\alpha_4 s_4]\, [s_2 + (\alpha_2 + \alpha_3)\, s_3 + \alpha_2\alpha_3 s_4] - \frac{1}{4}s_1^2, \\ \Delta_2 &\equiv [s_2 + (\alpha_2 + \alpha_4)\, s_3 + \alpha_2\alpha_4 s_4]\, [s_2 + (\alpha_1 + \alpha_3)\, s_3 + \alpha_1\alpha_3 s_4] - \frac{1}{4}s_1^2, \\ \Delta_3 &\equiv [s_2 + (\alpha_3 + \alpha_4)\, s_3 + \alpha_3\alpha_4 s_4]\, [s_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\, s_3 + \alpha_1\alpha_2 s_4] - \frac{1}{4}s_1^2. \end{aligned}$$

Soit

$$\Delta = \left\{ s = [s_1 : s_2 : s_3 : s_4] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) : \det Q_s = \det \sum_{j=1}^{4} s_j Q_j = 0 \right\},$$

la variété discriminante. Alors $\Delta = K_1 \cup K_2 \cup K_3$, est une surface de degré 6 dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ où K_j, $1 \leq j \leq 3$ sont les cônes quadratiques dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ définis par $K_j : \Delta_j = 0$. Notons que

$$\begin{aligned} K_1 - K_2 : (\alpha_1 - \alpha_2)\,(\alpha_3 - \alpha_4)\left(s_3^2 - s_2 s_4\right) &= 0, \\ K_2 - K_3 : (\alpha_2 - \alpha_3)\,(\alpha_1 - \alpha_4)\left(s_3^2 - s_2 s_4\right) &= 0, \\ K_1 - K_3 : (\alpha_1 - \alpha_3)\,(\alpha_2 - \alpha_4)\left(s_3^2 - s_2 s_4\right) &= 0. \end{aligned}$$

Or $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_4$, donc $s_3^2 = s_2 s_4$, ce qui montre que les équations définissant K_1, K_2, K_3 sont dépendantes. Dès lors, l'intersection $K_1 \cap K_2 \cap K_3$ de ces cônes quadratiques est définie par les équations

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}s_1^2 &= s_2^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)\,(\alpha_1 + \alpha_4)\, s_3^2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 s_4^2 \\ &\quad + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\, s_2 s_3 + (\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4)\, s_2 s_4 \\ &\quad + (\alpha_2\alpha_3\,(\alpha_1 + \alpha_4) + \alpha_1\alpha_4\,(\alpha_2 + \alpha_3))\, s_3 s_4, \\ s_3^2 &= s_2 s_4. \end{aligned}$$

Autrement dit, la courbe projective associée à cette intersection est birationnelle à la courbe projective définie par

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}s_1^2 s_4^2 &= s_3^4 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\, s_3^3 s_4 \\ &\quad + ((\alpha_2 + \alpha_3)\,(\alpha_1 + \alpha_4) + (\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4))\, s_3^2 s_4^2 \\ &\quad + (\alpha_2\alpha_3\,(\alpha_1 + \alpha_4) + \alpha_1\alpha_4\,(\alpha_2 + \alpha_3))\, s_3 s_4^3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 s_4^4, \\ s_3^2 &= s_2 s_4. \end{aligned}$$

Cette courbe admet deux composantes irréductibles; l'une est déterminée par la droite $s_3 = s_4 = 0$ et l'autre comme on va le voir, est une courbe elliptique. Dans la partie affine ($s_4 = 1$), ces équations se réduisent à

$$\frac{1}{4}s_1^2 = (s_3+\alpha_1)(s_3+\alpha_2)(s_3+\alpha_3)(s_3+\alpha_4), \qquad s_3^2 = s_2.$$

Par conséquent l'intersection $K_1 \cap K_2 \cap K_3$ est un revêtement double de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, ramifié en quatre points $-\alpha_1, ..., -\alpha_4$ et c'est une courbe elliptique. Pour tout point $s = [s_1 : s_2 : s_3 : s_4] = [s_1 : s_2 : s_3 : 1] \in K_1 \cap K_2 \cap K_3$, on obtient

$$\begin{aligned}
Q_s &= \pm 2\sqrt{(s_3+\alpha_1)(s_3+\alpha_2)(s_3+\alpha_3)(s_3+\alpha_4)}Q_1 + s_3^2 Q_2 + s_3 Q_3 + Q_4,\\
&= \left(\sqrt{(s_3+\alpha_1)(s_3+\alpha_4)}x_1 \pm \sqrt{(s_3+\alpha_2)(s_3+\alpha_3)}x_4\right)^2\\
&\quad + \left(\sqrt{(s_3+\alpha_2)(s_3+\alpha_4)}x_2 \pm \sqrt{(s_3+\alpha_1)(s_3+\alpha_3)}x_5\right)^2\\
&\quad + \left(\sqrt{(s_3+\alpha_3)(s_3+\alpha_4)}x_3 \pm \sqrt{(s_3+\alpha_1)(s_3+\alpha_2)}x_6\right)^2,
\end{aligned} \tag{15}$$

et on en conclut que le rang de chacune des quadriques Q_s est égal à trois. De même, on obtient deux quadriques de rang trois

$$Q_s = \left(\sqrt{\alpha_1\alpha_4}x_1 \pm \sqrt{\alpha_2\alpha_3}x_4\right)^2 + \left(\sqrt{\alpha_2\alpha_4}x_2 \pm \sqrt{\alpha_1\alpha_3}x_5\right)^2 + \left(\sqrt{\alpha_3\alpha_4}x_3 \pm \sqrt{\alpha_1\alpha_2}x_6\right)^2,$$

liées aux deux points $s[\pm 2 : 1 : 0 : 0]$. En prenant $s_3 = -\alpha_j$ pour $j = 1, ..., 4$ et en l'injectant dans l'expression (15), on obtient après avoir divisé cette dernière par $\prod_{k\neq j}(\alpha_j - \alpha_k)$, les quadriques suivantes :

$$\begin{aligned}
H_1 &\equiv \frac{\alpha_1^2 Q_2 - \alpha_1 Q_3 + Q_4}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)} = \frac{x_2^2}{\alpha_1-\alpha_3} + \frac{x_3^2}{\alpha_1-\alpha_2} + \frac{x_4^2}{\alpha_1-\alpha_4},\\
H_2 &\equiv \frac{\alpha_2^2 Q_2 - \alpha_2 Q_3 + Q_4}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)} = \frac{x_1^2}{\alpha_2-\alpha_3} + \frac{x_3^2}{\alpha_2-\alpha_1} + \frac{x_5^2}{\alpha_2-\alpha_4},\\
H_3 &\equiv \frac{\alpha_3^2 Q_2 - \alpha_3 Q_3 + Q_4}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)} = \frac{x_1^2}{\alpha_3-\alpha_2} + \frac{x_2^2}{\alpha_3-\alpha_1} + \frac{x_6^2}{\alpha_3-\alpha_4},\\
H_4 &\equiv \frac{\alpha_4^2 Q_2 - \alpha_4 Q_3 + Q_4}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)} = \frac{x_4^2}{\alpha_4-\alpha_1} + \frac{x_5^2}{\alpha_4-\alpha_2} + \frac{x_6^2}{\alpha_4-\alpha_3}.
\end{aligned}$$

Notons que $H_1 + H_2 + H_3 + H_4 = 0$. En choisissant trois quadriques quelconques parmi celles-ci, on voit qu'elles engendrent le même espace que celui engendré par les quadriques Q_2, Q_3, Q_4. Dès lors, pour faciliter le calcul, il est plus simple de travailler par exemple avec les quadriques Q_1, H_1, H_2, H_3 au lieu de Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. La variété invariante $M_c \subset \mathbb{C}^6$ obtenue en égalant ces quadriques Q_1, H_1, H_2, H_3 à des constantes génériques est une surface affine lisse et le problème ici consiste aussi à compléter M_c en une surface abélienne $\widetilde{M_c}$. Le système des équations différentielles (6) possède des solutions sous la forme de séries de Laurent,

$$x(t) = t^{-1}\left(x^{(0)} + x^{(1)}t + x^{(2)}t^2 + ...\right),$$

dépendant de dim (espace de phase) $-$ 1 = 5 paramètres libres. Considérons la fermeture $\mathcal{D}$ des composantes continues de l'ensemble des séries de Laurent de $x(t)$ tels que les quatre quadriques $Q_1(x(t))$, $H_1(x(t))$, $H_2(x(t))$, $H_3(x(t))$ sont égales à des constantes génériques c_1, c_2, c_3, c_4. On montre que c'est une surface de Riemann d'équation affine

$$w^2 + c_1\left(x_5^{(0)}x_6^{(0)}\right)^2 + c_2\left(x_4^{(0)}x_6^{(0)}\right)^2 + c_3\left(x_4^{(0)}x_5^{(0)}\right)^2 + c_4x_4^{(0)}x_5^{(0)}x_6^{(0)} = 0, \qquad (16)$$

où w est un paramètre arbitraire et où $x_4^{(0)}, x_5^{(0)}, x_6^{(0)}$ paramétrise la courbe elliptique

$$\mathcal{E} : \begin{cases} \left(x_4^{(0)}\right)^2 + \left(x_5^{(0)}\right)^2 + \left(x_6^{(0)}\right)^2 = 0 \\ \left(\beta x_5^{(0)} + \alpha x_6^{(0)}\right)\left(\beta x_5^{(0)} - \alpha x_6^{(0)}\right) = 1 \end{cases} \qquad (17)$$

avec α, β tels que : $\alpha^2 + \beta^2 + 1 = 0$. La courbe $\mathcal{D}$ est un revêtement double ramifié le long de $\mathcal{E}$. Les points de branchements sont les 16 zéros de

$$F\left(x_4^{(0)}, x_5^{(0)}, x_6^{(0)}\right) = c_1\left(x_5^{(0)}x_6^{(0)}\right)^2 + c_2\left(x_4^{(0)}x_6^{(0)}\right)^2 + c_3\left(x_4^{(0)}x_5^{(0)}\right)^2 + c_4x_4^{(0)}x_5^{(0)}x_6^{(0)},$$

sur la courbe $\mathcal{E}$. Comme la courbe $\mathcal{D}$ n'est pas ramifiée à l'infini, alors d'après la formule de Riemann-Hurwitz le genre de $\mathcal{D}$ est 9. On montre le résultat suivant : le système différentiel (6) est algébriquement complètement intégrable et le flot correspondant évolue sur une surface abélienne $\widetilde{M_c} \cong \mathbb{C}^2/L_\Omega$ où le réseau L_Ω est engendré par la matrice des périodes

$$\Omega = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & c \\ 0 & 4 & c & b \end{pmatrix}, \ \mathrm{Im}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} > 0, \quad (a, b, c \in \mathbb{C}).$$

La surface affine M_c se complète en $\widetilde{M_c}$ par l'adjonction d'une courbe lisse $\mathcal{D}$(16) de genre 9, laquelle est un revêtement ramifié le long d'une courbe elliptique $\mathcal{E}$(17). En utilisant la classification de Enriques-Kodaira sur les surfaces [11], on peut montrer d'une autre manière que la variété invariante M_c peut-être complétée par la courbe $\mathcal{D}$ en une surface abélienne $\widetilde{M_c}$. En effet, soit $\varphi : \widetilde{M_c} \longrightarrow \overline{M_c}$, la normalisation de la variété projective

$$\overline{M_c} = \bigcap_{k=1}^{4}\left\{R_k(X) = c_kX_0^2\right\} \subset \mathbb{P}^6(\mathbb{C}),$$

avec

$$\begin{aligned} R_1 &\equiv \frac{X_2^2}{\alpha_1-\alpha_3}+\frac{X_3^2}{\alpha_1-\alpha_2}+\frac{X_4^2}{\alpha_1-\alpha_4}=c_1X_0^2,\\ R_2 &\equiv \frac{X_1^2}{\alpha_2-\alpha_3}+\frac{X_3^2}{\alpha_2-\alpha_1}+\frac{X_5^2}{\alpha_2-\alpha_4}=c_2X_0^2,\\ R_3 &\equiv \frac{X_1^2}{\alpha_3-\alpha_2}+\frac{X_2^2}{\alpha_3-\alpha_1}+\frac{X_6^2}{\alpha_3-\alpha_4}=c_3X_0^2,\\ R_4 &\equiv X_1X_4+X_2X_5+X_3X_6=c_4X_0^2. \end{aligned}$$

où $X_0, X_1, ..., X_6$ sont des coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^6(\mathbb{C})$. Pour montrer que M_c est la partie affine d'une surface abélienne $\widetilde{M_c}$, nous allons tout d'abord calculer les invariants $\widetilde{M_c}$. Soient $K_{\widetilde{M_c}}$ le fibré canonique, $\chi(\mathcal{O}_{\widetilde{M_c}})$ la caractéristique d'Euler et $q(\widetilde{M_c})$ l'irrégularité de $\widetilde{M_c}$. Le pull-back par φ (ou transposée) :

$$\varphi^*: H^0\left(\overline{M_c}, \mathcal{O}_{\overline{M_c}}\right) \longrightarrow H^0\left(\widetilde{M_c}, \mathcal{O}_{\widetilde{M_c}}\right),$$

est un homomorphisme de groupes de cohomologie. On a

$$K_{\widetilde{M_c}} = \varphi^*\left(K_{\overline{M_c}}\right) - \mathcal{D} = \varphi^*\left(\overline{M_c}.K_{\mathbb{CP}^6} + \left(\sum_{k=1}^{4}\deg R_k\right).\mathbf{H}\right) - \mathcal{D},$$

où $\mathbf{H}$ est un hyperplan dans $\mathbb{P}^6(\mathbb{C})$. Dès lors,

$$K_{\widetilde{M_c}} = \varphi^*\left(8\mathbf{H} - 7\mathbf{H}\right) - \left(\widetilde{M_c} \cap \{X_0 = 0\}\right) = 0,$$

D'autre part, considérons les suites exactes de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{M_c}} \longrightarrow \varphi_*\mathcal{O}_{\widetilde{M_c}} \longrightarrow \varphi_*\mathcal{O}_{\widetilde{M_c}}/\mathcal{O}_{\overline{M_c}} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \longrightarrow \varphi_*\mathcal{O}_{\mathcal{D}} \longrightarrow \varphi_*\mathcal{O}_{\mathcal{D}}/\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \longrightarrow 0.$$

On en déduit

$$\chi\left(\mathcal{O}_{\widetilde{M_c}}\right) = \chi\left(\varphi_*\mathcal{O}_{\widetilde{M_c}}\right) = \chi\left(\varphi_*\mathcal{O}_{\widetilde{M_c}}/\mathcal{O}_{\overline{M_c}}\right) + \chi\left(\mathcal{O}_{\overline{M_c}}\right),$$

d'où,

$$\chi\left(\mathcal{O}_{\widetilde{M_c}}\right) = \chi\left(\varphi_*\mathcal{O}_{\mathcal{D}}/\mathcal{O}_{\mathcal{E}}\right) + \chi\left(\mathcal{O}_{\overline{M_c}}\right) = \chi\left(\mathcal{O}_{\mathcal{D}}\right) - \chi\left(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}\right) + \chi\left(\mathcal{O}_{\overline{M_c}}\right).$$

On a

$$\chi\left(\mathcal{O}_{\mathcal{D}}\right) = 1 - g(\mathcal{D}) = -8, \quad \chi\left(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}\right) = 1 - g(\mathcal{E}) = 0.$$

Pour déterminer $\chi\left(\mathcal{O}_{\overline{M_c}}\right)$, on utilise le complexe de Koszul qui fournit unr résolution canonique

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6(\mathbb{C})}\left(-\sum_{k=1}^{4}\deg R_k\right) \to \underset{k}{\oplus}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6(\mathbb{C})}\left(-\deg R_k\right) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6(\mathbb{C})} \to \mathcal{O}_{\overline{M_c}} \to 0,$$

d'où,

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6(\mathbb{C})}(-8) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6(\mathbb{C})}(-6)^4 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6(\mathbb{C})}(-4)^6 \\ &\to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6(\mathbb{C})}(-2)^4 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6(\mathbb{C})} \to \mathcal{O}_{\overline{M_c}} \to 0. \end{aligned}$$

Dès lors $\chi\left(\mathcal{O}_{\overline{M_c}}\right) = 8$ et par conséquent $\chi\left(\mathcal{O}_{\widetilde{M_c}}\right) = 0$ et $q\left(\widetilde{M_c}\right) = 2$. D'après le théorème de Enriques-Kodaira [11] sur la classification des surfaces abéliennes, $\widetilde{M_c}$ est une surface abélienne. Notons que l'involution

$$\sigma \equiv -\mathrm{id} : (x_0, x_1, ..., x_6) \longmapsto (-x_0, x_1, ..., x_6),$$

possède 16 points fixes sur $\widetilde{M_c}$ donnés par les 16 points de branchements de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{E}$, c.-à-d., les 16 zéros de $F\left(x_4^{(0)}, x_5^{(0)}, x_6^{(0)}\right)$. D'après la théorie de la classification des fibrés en droites amples sur les variétés abéliennes, on obtient $\widetilde{M_c} \simeq \mathbb{C}^2/L_\Omega$ où L_Ω est le réseau associé à la matrice des périodes

$$\Omega = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & a & c \\ 0 & \delta_2 & c & b \end{pmatrix}, \quad Im\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} > 0,$$

avec

$$\delta_1\delta_2 = \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = g\ \ (\mathcal{D}) - 1 = 8, \quad \delta_1 \mid \delta_2, \quad \delta_i \in \mathbb{N}^*.$$

Rappelons qu'en général si $\mathcal{L}$ est un fibré en droites sur une surface abélienne $\widetilde{M_c}$ de type (δ_1, δ_2) et si $\mathcal{L}$ est symétrique, c.-à-d., $\sigma^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$ où σ désigne l'involution " $-$ " sur $\widetilde{M_c}$, alors l'involution σ apparaît dans $\mathcal{L}$ comme une involution $\widetilde{\sigma}$ agissant de deux manières différentes (selon le signe) et dès lors pour chaque section (fonction thêta) $s \in H^0(\widetilde{M_c}, \mathcal{L})$, on a $\widetilde{\sigma}s = \pm s$. Une section $s \in H^0(\widetilde{M_c}, \mathcal{L})$ est dite paire (resp. impaire) si $\widetilde{\sigma}s = +s$ (resp. $\widetilde{\sigma}s = -s$). Sous $\widetilde{\sigma}$ l'espace vectoriel $H^0(\widetilde{M_c}, \mathcal{L})$ se décompose en deux sous espaces :

$$H^0(\widetilde{M_c}, \mathcal{L}) = H^0(\widetilde{M_c}, \mathcal{L})^{paire} \oplus H^0(\widetilde{M_c}, \mathcal{L})^{impaire},$$

où $H^0(\widetilde{M_c}, \mathcal{L})^{paire}$ contient toutes les sections paires et $\mathcal{H}^0(\widetilde{M_c}, \mathcal{L})^{impaire}$ toutes les sections impaires. En utilisant la formule d'inversion [21], on montre que

$$\dim H^0(\widetilde{M_c}, \mathcal{L})^{\substack{paire \\ impaire}} = \begin{cases} \frac{\delta_1\delta_2}{2} \pm 2\left(1 + [\frac{\delta_2}{2}] - \frac{\delta_2}{2}\right) \text{ pour } \delta_1 \text{ paire} \\ \\ \frac{\delta_1\delta_2}{2} \pm \left(1 + [\frac{\delta_2}{2}] - \frac{\delta_2}{2}\right) \text{ pour } \delta_1 \text{ impaire} \end{cases}$$

Ici $\delta_1\delta_2 = 8$, on a donc deux possibilités : (i) $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 8$ et (ii) $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 4$. D'après les formules ci-dessus, le fibré en droites $\mathcal{L}$ a dans le cas (i), 5 sections paires et 3 sections impaires et dans le cas (ii), 6 sections paires et 2 sections impaires. Comme $x_1, ..., x_6$ sont paires, alors (ii) est le seul cas acceptable montrant ainsi que la matrice des périodes est de la forme $\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & c \\ 0 & 4 & c & b \end{pmatrix}$, $\operatorname{Im}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} > 0$. La surface abélienne $\widetilde{M_c}$ peut-être identifiée à la variété de Prym $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ du revêtement (20) ci-dessous. En effet, en posant $\zeta \equiv \alpha^2$, la courbe $\mathcal{D}$ peut-être vue comme étant un revêtement de degré 4 non ramifié le long de la courbe de genre 3 suivante :

$$\mathcal{C} : F(\theta, \zeta) \equiv \left[\theta^2 + c_1\beta^2\gamma^2 + \left(c_2\gamma^2 + c_3\beta^2\right)\zeta\right]^2 - c_4^2\zeta\beta^2\gamma^2 = 0. \tag{18}$$

Notons que l'application

$$\sigma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}, \quad (\theta, \zeta) \longmapsto (-\theta, \zeta),$$

est une involution sur $\mathcal{C}$ et que le quotient $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}/\sigma$ est une courbe elliptique définie par

$$\mathcal{C}_0 : \eta^2 = c_4^2\zeta\left(d_1^2\zeta - 1\right)\left(d_2^2\zeta + 1\right). \tag{19}$$

La courbe $\mathcal{C}$ est un revêtement double ramifié le long de $\mathcal{C}_0$

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_0, \quad (\theta, \eta, \zeta) \longmapsto (\eta, \zeta), \tag{20}$$

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \theta^2 = -c_1\beta^2\gamma^2 - \left(c_2\gamma^2 + c_3\beta^2\right)\zeta + \eta \\ \eta^2 = c_4^2\zeta\left(d_1^2\zeta - 1\right)\left(d_2^2\zeta + 1\right) \end{cases}$$

Soit $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ une base de cycles sur $\mathcal{C}$, avec $a_i o a_j = b_i o b_j = 0$, $a_i o b_j = \delta_{ij}$, et $\sigma(a_1) = a_3$, $\sigma(b_1) = b_3$, $\sigma(a_2) = -a_2$, $\sigma(b_2) = -b_2$, pour l'involution σ. D'après le théorème des résidus de Poincaré [11, 21], les trois différentielles holomorphes $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ sur $\mathcal{C}$ sont de la forme

$$P(\theta, \zeta)\frac{d\zeta}{\frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta, \zeta)}\bigg|_{F(\theta,\zeta)=0} = P(\theta, \zeta)\frac{d\zeta}{4\theta\eta},$$

où P est un polynôme de degré $\leq \deg F - 3 = 1$. Dès lors

$$\omega_0 = \frac{d\zeta}{\eta}, \qquad \omega_1 = \frac{\zeta d\zeta}{\theta\eta}, \qquad \omega_2 = \frac{d\zeta}{\theta\eta},$$

forment une base de différentielles holomorphes sur $\mathcal{C}$ et on a

$$\sigma^*(\omega_0) = \omega_0, \quad \sigma^*(\omega_k) = -\omega_k, \quad k = 1, 2$$

pour l'involution σ. La matrice des périodes Ω de la variété $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$, s'écrit sous la forme

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2\int_{a_1}\omega_1 & \int_{a_2}\omega_1 & 2\int_{b_1}\omega_1 & \int_{b_2}\omega_1 \\ 2\int_{a_1}\omega_2 & \int_{a_2}\omega_2 & 2\int_{b_1}\omega_2 & \int_{b_2}\omega_2 \end{pmatrix}.$$

Soit (dt_1, dt_2) une base de différentielles holomorphes sur $\widetilde{M_c}$ telle que :

$$dt_1|_{\mathcal{D}} = \omega_1, \qquad dt_2|_{\mathcal{D}} = \omega_2.$$

Soit

$$L_{\Gamma'} = \left\{ \sum_{k=1}^{2} m_k \int_{a'_k} \binom{dt_1}{dt_2} + n_k \int_{b'_k} \binom{dt_1}{dt_2} : m_k, n_k \in \mathbb{Z} \right\},$$

le réseau associé à la matrice des périodes

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} \int_{a'_1} dt_1 & \int_{a'_2} dt_1 & \int_{b'_1} dt_1 & \int_{b'_2} dt_1 \\ \int_{a'_1} dt_2 & \int_{a'_2} dt_2 & \int_{b'_1} dt_2 & \int_{b'_2} dt_2 \end{pmatrix},$$

où (a'_1, a'_2, b'_1, b'_2) est une base de $H_1(\widetilde{M_c}, \mathbb{Z})$ et soit

$$\widetilde{M_c} \longrightarrow \mathbb{C}^2 / L_\Gamma : p \longmapsto \int_{p_0}^{p} \binom{dt_1}{dt_2},$$

l'application uniformisante. Le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes montre que l'application $H_1(\mathcal{D}, \mathbb{Z}) \to H_1(\widetilde{M_c}, \mathbb{Z})$ induite par l'inclusion $\mathcal{D} \hookrightarrow \widetilde{M_c}$ est surjective et par conséquent on peut trouver quatre cycles a'_1, a'_2, b'_1, b'_2 sur la courbe $\mathcal{D}$ tels que:

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} \int_{a'_1} \omega_1 & \int_{a'_2} \omega_1 & \int_{b'_1} \omega_1 & \int_{b'_2} \omega_1 \\ \int_{a'_1} \omega_2 & \int_{a'_2} \omega_2 & \int_{b'_1} \omega_2 & \int_{b'_2} \omega_2 \end{pmatrix},$$

et

$$L_{\Lambda'} = \left\{ \sum_{k=1}^{2} m_k \int_{a'_k} \binom{\omega_1}{\omega_2} + n_k \int_{b'_k} \binom{\omega_1}{\omega_2} : m_k, n_k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Rappelons que $F(x_4^0, x_5^0, x_6^0)$ a 4 zéros sur $\mathcal{C}_0(19)$ et 16 zéros sur $\mathcal{E}(17)$. Dès lors, les quatre cycles a'_1, a'_2, b'_1, b'_2 sur $\mathcal{D}$ qu'on cherche à identifier sont $2a_1, a_2, 2b_1, b_2$ et ils engendrent $H_1(\widetilde{M_c}, \mathbb{Z})$ de telle sorte que

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} 2\int_{a_1} \omega_1 & \int_{a_2} \omega_1 & 2\int_{b_1} \omega_1 & \int_{b_2} \omega_1 \\ 2\int_{a_1} \omega_2 & \int_{a_2} \omega_2 & 2\int_{b_1} \omega_2 & \int_{b_2} \omega_2 \end{pmatrix} = \Lambda,$$

soit une matrice de Riemann. On montre que les deux variétés abéliennes $\widetilde{M_c}$ et $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ sont analytiquement isomorphes au même tore complexe $\mathbb{C}^2/L_\Lambda$ et d'après le théorème de Chow, ces variétés sont algébriquement isomorphes.

5 Conclusion

Nous avons vu que la linéarisation des équations d'Euler-Arnold s'effectue sur une variété de Prym $Prym(\Gamma/\Gamma_0)$ d'une surface de Riemann Γ(12) de genre 3; cette dernière étant un revêtement double ramifié le long d'une courbe elliptique Γ_0 (14). Ici, la compactification de la variété affine M_c en une surface abélienne $\widetilde{M_c}$ s'obtient par l'adjonction d'une surface de Riemann $\mathcal{D}$(16) de genre 9, laquelle est un revêtement non ramifié de degré 4 d'une surface de Riemann $\mathcal{C}$(18) de genre 3 et cette dernière est un revêtement ramifié d'une courbe elliptique $\mathcal{C}_0$(19). La surface abélienne $\widetilde{M_c}$ peut-être identifiée à la variété de Prym $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ du revêtement (20) et le problème se linéarise sur cette variété. Comme la linéarisation du problème a été obtenue par deux méthodes différentes (la première sur une variété de Prym $Prym(\Gamma/\Gamma_0)$ utilisant les algèbres de Kac-Moody et la seconde sur une variété de Prym $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ utilisant l'analyse de Painlevé-Kowalewski), une question se pose : quelle est la relation entre $Prym(\Gamma/\Gamma_0)$ et $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$. Il est intéressant de noter que les surfaces abéliennes $\widetilde{M_c} = Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ et $Prym(\Gamma/\Gamma_0)$ ne sont pas identiques mais simplement isogènes; on obtient l'une à partir de l'autre en doublant certaines périodes et en laissant les autres intactes. La relation précise entre ces deux surfaces abéliennes est $\widetilde{M_c} = Prym^{\vee}(\Gamma/\Gamma_0)$, c.-à-d., elles sont duales. En fait, les fonctions $x_1, ..., x_6$ sont méromorphes sur $\widetilde{M_c}$, tandis que $x_1^2, ..., x_6^2$ sont méromorphes sur $Prym(\Gamma/\Gamma_0)$. Signalons aussi que la relation entre les surfaces de Riemann $\mathcal{C}$ et Γ est très compliquée [13]. On a $Prym(\Gamma/\Gamma_0) \setminus \Pi = \Theta \cap Prym(\Gamma/\Gamma_0) = \mathcal{C}$ et $\Theta \cap \widetilde{M_c} = \Gamma$, où Θ désigne le translaté d'un diviseur thêta sur $Jac(\Gamma)$ et $\Pi \subset Prym(\Gamma/\Gamma_0)$ est un ouvert de Zariski.

References

[1] M. Adams, J. Harnad and E. Previato, *Isospectral Hamiltonian Flows in Finite and Infinite Dimensions. I. Generalized Moser Problem and Moment Maps into Loop Algebras*, Commun. Math. Phys., **117** (1988), 451-500. MR0953833(MR89k:58112). Zbl 0659.58022.

[2] M. Adams, J. Harnad and J. Hurtubise, *Isospectral Hamiltonian Flows in Finite and Infinite Dimensions II. Integration of Flows*, Commun. Math. Phys., **134** (1990), 555-585. MR1086744(MR92a:58055). Zbl 0717.58051.

[3] M. Adler, *On a trace functional for pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries equation*, Invent. Math., **50** (1979), 219-248. MR520927(80i:58026) Zbl 0393.35058.

[4] M. Adler, P. and van Moerbeke, *Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and curves*, Adv. in Math., **38** (1980), 267-317. MR597729(MR83m:58041). Zbl 0455.58017.

[5] M. Adler, P. and van Moerbeke, *Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory*, Adv. in Math., **38** (1980), 318-379. MR0597729(MR83m:58042). Zbl 0455.58010.

[6] M. Adler, P., van Moerbeke and P. Vanhaecke, *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, A series of modern surveys in mathematics, Volume **47**, Springer-Verlag, 2004. MR2095251(2006d:37106). Zbl 1083.37001.

[7] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths and J. Harris, *Geometry of algebraic curves I*, Springer-Verlag, 1994. MR0770932(86h:14019).

[8] V.I. Arnold, *Mathematical methods in classical mechanics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York, 1978. MR0690288(MR57:14033b). Zbl 0386.70001.

[9] A.I. Belokolos and V.Z. Enol'skii, *Isospectral deformations of elliptic potentials*, Russ. Math. Surveys, **44** (1989), 155-156. MR1040275(91c:58046).

[10] L.A. Dikii, *Hamiltonian systems connectes with the rotation group*, Funct. Anal. Appl., **6** (1972), 83-84. MR0312527(47:1084). Zbl 0288.58004.

[11] P.A. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience 1978. MR0507725(80b:14001). Zbl 0408.14001.

[12] P.A. Griffiths, *Linearizing flows and a cohomological interpretation of Lax equations*, Amer. J. of Math., **107** (1985), 1445-1483. MR0815768. Zbl 0585.58028.

[13] L. Haine, *Geodesic flow on $SO(4)$ and Abelian surfaces*, Math. Ann., **263** (1983), 435-472. MR0707241. Zbl 0521.58042.

[14] B. Kostant, *The solution to a generalized Toda lattice and representation theory*, Adv. in Math., **34** (1979), 195-338. MR0550790(MR82f:58045).

[15] S. Kowalewski, *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*, Acta Math., **12** (1889), 177-232. Zbl 21.0935.01.

[16] P. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure and Appl. Math., **21** (1968), 467-490. MR0235310. Zbl 0162.41103.

[17] A. Lesfari, *Abelian surfaces and Kowalewski's top*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., Paris, 4e série, **21** (1988), 193-223. MR0956766(89k:58125). Zbl 0667.58019.

[18] A. Lesfari, *Geodesic flow on SO(4), Kac-Moody Lie algebra and singularities in the complex t-plane*, Publ. Mat., Barc., **43**(1) (1999), 261-279. MR1697525(2000f:37078). Zbl 0968.35010.

[19] A. Lesfari, *Le système différentiel de Hénon-Heiles et les variétés Prym*, Pacific J. Math., **212**(1) (2003), 125-132. MR2016973. Zbl 1070.37040.

[20] A. Lesfari, *Prym varieties and applications*, J. Geom. Phys., **58**(9) (2008), 1063-1079. MR2451270. Zbl 1149.14045.

[21] A. Lesfari, *Introduction à la géométrie algébrique complexe*, Hermann, Paris 2015. Zbl 1327.14001.

[22] S.V. Manakov, *A remark on the integration of the Euler equations of the dynamics of an n-dimensional rigid body*, Functional Anal. Appl, **10** (1976), 93-94. MR0455031. Zbl 03535638.

[23] A.S. Mishchenko and A.T. Fomenko, *The Euler equations on finite-dimensional Lie groups*, Math. USSR-Izv, **42** (1978), 371-389. MR0482832.

[24] J. Moser, *Geometry of quadrics and spectral theory*, Chern Sympos., Springer-Verlag, pp. 147-188, 1980. MR0609560. Zbl 0455.58018.

[25] J. Moser, *Various aspects of integrable Hamiltonian systems*, Progress in Math. 8, 223-289, Birkhäuser-Verlag, 1980. MR0589592.

[26] D. Mumford, *Prym varieties I*, in Contributions to Analysis (L.V. Ahlfors, I. Kra, B. Maskit, L. Niremberg, eds.), Academic Press, New-York, 325-350, 1974. MR0379510. Zbl 316.14010.

[27] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta II*, Progress in Math., Birkhäuser, Boston, 1984. MR0742776(MR86b:14017). Zbl 0549.14014.

[28] W. Symes, *Systems of Toda type, inverse spectral problems and representation theory*, Invent. Math., **59** (1980), 13-51. MR0575079. Zbl 0474.58009.

[29] P. van Moerbeke and D. Mumford, *The spectrum of difference operators and algebraic curves*, Acta Math., **143** (1979), 93-154. MR0533894. Zbl 0502.58032.

[30] P. Vanhaecke, *Integrable systems in the realm of algebraic geometry*, Lecture Notes in Math., 1638, Springer-Verlag, Second edition 2001. MR1850713. Zbl 0997.37032.

Ahmed Lesfari
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences, Université Chouaïb Doukkali,
B.P. 20, El-Jadida, Maroc.
e-mail: lesfariahmed@yahoo.fr

License