*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2000. Том 41, № 1*

*УДК 517.982+512.625.5*

# $\kappa$–НОРМИРОВАННЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

**С. В. Людковский**

**Аннотация:** Определены и исследованы $\kappa$-нормируемые топологические векторные пространства $X$ над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или неархимедово. Доказано, что произведение $\kappa$-нормированных пространств является $\kappa$-нормированным. Показано, что строгие индуктивные пределы в общем случае не сохраняют свойство $\kappa$-нормируемости. Исследованы аналоги теорем о неподвижной точке и замкнутом графике для отображений $f : 2_0^X \to 2_0^Y$, где $2_0^X$ обозначает семейство канонических замкнутых подмножеств в $X$. Рассмотрены их расширения $2_\delta^X$, являющиеся семействами замкнутых $G_\delta$-подмножеств. Библиогр. 16.

В работах [1, 2] были определены и исследованы $\kappa$-метризуемые топологические пространства $X$, которые могут быть неметризуемыми (см. также определение 1). Одними из наиболее важных примеров $\kappa$-метризуемых пространств являются локально компактные группы и обобщенные группы петель [3]. Для линейных нормированных пространств изучались различные функции расстояний между подмножествами в [4]. С другой стороны, в теории топологических векторных пространств (ТВП) и, в частности, локально выпуклых пространств (ЛВП) большую роль играют теоремы о замкнутом графике и неподвижной точке [5–8].

В данной работе вводится понятие $\kappa$-нормируемых пространств для ТВП $X$ и доказывается их существование и тот факт, что они могут быть неметризуемыми. При этом в отличие от [1, 2] рассмотрены $\kappa$-метрики и $\kappa$-нормы на $X \times 2_\delta^X$, т. е. на более обширных семействах подмножеств. Для них исследованы аналоги теорем о неподвижной точке, замкнутом графике и открытом отображении (см. пп. 9–11, 25–27), которые могут быть полезны в теории дифференциальных уравнений. В предложении 13 для заданного семейства $\left\{\left(X_\alpha, 2_\delta^{X_\alpha}, \rho_\alpha\right) : \alpha \in A\right\}$ $\kappa$-нормированных пространств с ЛВП $X_\alpha$ приведена конструкция $\kappa$-нормированного пространства $\left(X, 2_\delta^X, \rho\right)$, для которого имеются факторные отображения $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$, индуцирующие из $\rho$ $\kappa$-нормы на $\left(X_\alpha, 2_\delta^{X_\alpha}\right)$, эквивалентные исходным $\rho_\alpha$. Доказана теорема 14 о произведении $\kappa$-нормированных пространств $\left(X_\alpha, 2_0^{X_\alpha}, \rho_\alpha\right)$. В предложении 19 показано, что в общем случае их строгие индуктивные пределы могут быть не $\kappa$-нормируемыми. Введено понятие свободных $\kappa$-нормированных пространств (определение 28), являющихся частными случаями свободных ЛВП (о последних см. в [9–12]). Согласно предложению 8.1.18 и теореме 8.1.20 из [13] один из эквивалентных способов задания равномерности на тихоновском пространстве $X$ состоит в порождении ее семейством $\mathscr{P}$ равномерных псевдометрик $d(x, y)$, обладающих следующими свойствами:

(UP1) если $d_1, d_2 \in \mathscr{P}$, то $\max(d_1, d_2) \in \mathscr{P}$;

(UP2) для каждой пары $x, y$ различных точек в $X$ существует такая $d \in \mathscr{P}$, что $d(x, y) > 0$.

В случае ультраравномерного пространства элементы $d \in \mathscr{P}$ являются псевдоультраметриками, т. е. удовлетворяют ультраметрическому неравенству $d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$ для любых $x, y, z \in X$. Поэтому для тихоновского пространства $X$ можно ограничиться рассмотрением свободного ЛВП $M(X, \mathbb{K})$ над полным полем $\mathbb{K}$, порожденного равномерным пространством $X$, так как топология на $X$ индуцирована некоторой равномерностью. Далее используется определение $M(X, \mathbb{K})$ из работ [9, 10], где $M(X, \mathbb{K})$ и $\mathbb{K}$ полны, а для неархимедовых $\mathbb{K}$ рассматриваются ультраравномерные пространства $X$ (в которых равномерность может быть задана семейством псевдоультраметрик).

Существование свободных $\kappa$-нормированных пространств доказано в теореме 29. В теореме 30 доказано, что пополнение каждого $\kappa$-нормированного ЛВП является фактор-пространством соответствующего свободного $\kappa$-нормированного пространства. На основе теоремы 29 в теореме 31 даются категорные свойства $\kappa$-нормированных пространств.

**1.** Определение. ТВП $X$ над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ равно $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или неархимедово, называется *$\kappa$-нормируемым*, если на $X \times S_X$ (где $S_X := 2_0^X$ или $2_\delta^X$) существует неотрицательная функция $\rho(x, C)$, называемая *$\kappa$-нормой*, удовлетворяющая условиям:

(N1) $\rho(x, C) = 0$ равносильно $x \in C$;

(N2) если $C \subset C'$, то $\rho(x, C) \geq \rho(x, C')$;

(N3) $\rho(x, C)$ равномерно непрерывна по $x \in X$ при каждом фиксированном $C \in S_X$;

(N4) для любой возрастающей трансфинитной последовательности $\{C_\alpha\}$ с $C := \mathrm{cl}(\bigcup_\alpha C_\alpha) \in S_X$ выполнено равенство $\rho(x, C) = \inf_\alpha \rho(x, C_\alpha)$, где $\mathrm{cl}_X(A) = \mathrm{cl}(A)$ — замыкание подмножества $A$ в $X$;

(N5) (a) $\rho(x + y, \mathrm{cl}(C_1 + C_2)) \leq \rho(x, C_1) + \rho(y, C_2)$,

(b) $\rho(x, C_1) \leq \rho(x, C_2) + \bar{\rho}(C_2, C_1)$ (или с max вместо суммы в правых частях неравенств в неархимедовом случае), где $\bar{\rho}(C_2, C_1) := \sup_{x \in C_2} \rho(x, C_1)$;

(N6) $\rho(\lambda x, \lambda C) = |\lambda| \rho(x, C)$ для любых $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$;

(N7) $\rho(x + y, y + C) = \rho(x, C)$.

Если рассматривать $\varnothing$ как элемент из $S_X$, то

(N8) $\rho(x, \varnothing) = \infty$ и $\rho(x, C) < \infty$ для любых $x \in X$ и непустого $C \in S_X$, где $2_0^X$ — семейство всех канонических замкнутых подмножеств в $X$, а $2_\delta^X$ — семейство всех замкнутых $G_\delta$-подмножеств (т. е. счетных пересечений открытых множеств).

Пространство $(X, S_X) := X \times S_X$, на котором задана фиксированная $\kappa$-норма $\rho$, будем называть *$\kappa$-нормированным* и обозначать через $(X, S_X, \rho)$.

Пусть задано вполне регулярное топологическое пространство $X$. *Регулярной $\kappa$-метрикой* называется функция $\rho$ на $X \times 2_0^X$, удовлетворяющая условиям (N1)–(N4), (N5(b)) с непрерывностью вместо равномерной непрерывности в условии (N3). В работах [1, 2] это аксиомы (K1)–(K5) соответственно.

Из этого определения следует, что каждое нормированное пространство является $\kappa$-нормируемым, если положить $\rho(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|$. Условие $C := \mathrm{cl}\big(\bigcup_\alpha C_\alpha\big) \in S_X$ в аксиоме (N4) при $S_X = 2_0^X$ автоматически выполнено, так как $C = \mathrm{cl}\big(\bigcup_\alpha \mathrm{Int}(C_\alpha)\big)$.

**2. Лемма.** (1) *Если* $\left(X, 2_0^X\right)$ *является* $\kappa$*-метризуемым* (*или* $\kappa$*-нормируемым*), *то* $2_0^X \subset 2_\delta^X$.

(2) *Если* $(X, S_X)$ *является* $\kappa$*-метризуемым* (*или* $\kappa$*-нормируемым*), *то для любого* $C \in S_X$ *существует последовательность* $C_j \in 2_0^X$ *такая, что* $\mathrm{Int}(C_j) \supset C_{j+1}$ *для любого* $j \in \mathbb{N}$ *и* $\bigcap\limits_j C_j = \bigcap\limits_j \mathrm{Int}(C_j) = C$.

Доказательство. Пусть $C \in 2_0^X$ или $C \in S_X$. Тогда $C = \bigcap\limits_n V_n$ ввиду условия (N1) из определения 1, где $V_n := \{x \in X : \rho(x, C) < 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$. В силу условия (K3) или (N3) из определения 1 соответственно каждое $V_n$ открыто, следовательно, $C$ является $G_\delta$-подмножеством. Для $S_X \ni C$ можно взять $C_j = \mathrm{cl}(V_j) = \{x \in X : \rho(x, C) \leq 1/j\}$, значит, $V_j = \mathrm{Int}(C_j) =: \dot{C}_j$.

**3. Следствие.** *В обозначениях леммы 2 выполняется неравенство* $0 \leq \rho(x, C) - \rho(x, C_j) \leq 1/j$ *для любых* $x \in X$.

Доказательство. В силу условий (N2), (N4) из определения 1 имеем $0 \leq \rho(x, C) - \rho(x, C_j) \leq \bar{\rho}(C_j, C)$.

**4. Следствие.** $\rho(x, C) = \sup\limits_j \rho(x, C_j)$ *для любых* $x \in X$.

**5. Следствие.** *Для* $\kappa$*-нормированного пространства* $X$ *для любых* $C \in S_X$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует уравновешенная окрестность* $U \ni 0$ ($U$ *выпуклая уравновешенная в случае* ЛВП $X$) *такая, что* $0 \leq \rho(x, C) - \rho(x, \mathrm{cl}(C + U)) < \varepsilon$ *для любых* $x \in X$. *Обратно, последнее свойство для непрерывной* $\kappa$*-нормы без условия* (N3) *из определения* 1 *влечет ее равномерную непрерывность.*

Доказательство. В качестве базы $\mathscr{B}$ окрестностей нуля в $X$ можно выбрать уравновешенные окрестности $U$ (см. также теорему (5.7.1) и определение 5.7.1 в [5]). Если $\rho$ равномерно непрерывна, то для любого $j \in \mathbb{N}$ существует уравновешенная окрестность $U \ni 0$ ($U$ выпуклая уравновешенная в случае ЛВП $X$) такая, что $|\rho(x + y, C) - \rho(x, C)| < 1/j$ для любых $x \in X$ и $y \in U$, т. е. $\mathrm{cl}(C + U) \subset C_j$. Обратно, $\rho(x + y, \mathrm{cl}(C + U)) \leq \rho(x, C) + \rho(y, U)$, $\rho(x + y, C) \leq \rho(x + y, \mathrm{cl}(C + U)) + \varepsilon$, что при $y \in U = -U$ дает $|\rho(x + y, C) - \rho(x, C)| \leq \varepsilon$.

**6. Теорема.** *Пусть* $L$ *является замкнутым* $\mathbb{K}$*-линейным подпространством* $\kappa$*-нормируемого пространства* $X$. *Тогда фактор-пространство* $X/L$ $\kappa$*-нормируемо.*

Доказательство. Обозначим через $[x]$ классы смежности $x + L$ и положим $\rho_{X/L}([x], [C]) = \inf\limits_{z \in L} \rho_X(x + z, C)$, где $\rho_X$ — $\kappa$-норма на $(X, S_X)$. Для факторного отображения $\pi : X \to X/L$ множество $\pi^{-1}(U)$ открыто в $X$ тогда и только тогда, когда $U$ открыто в $X/L$ (см. предложение 2.4.3 из [13]). Поскольку $\pi^{-1}(\bigcap\limits_j U_j) = \bigcap\limits_j (\pi^{-1}(U_j))$ для любых подмножеств $U_j$ в $X/L$, то $\pi^{-1}([C]) \in S_X$ для любого $[C] \in S_{X/L}$, следовательно, определение отображения $\rho_{X/L}$ корректно, где $S_X = 2_0^X$ или $S_X = 2_\delta^X$ и соответственно для $X/L$. Тогда $\rho_{X/L}([x], [C]) = 0$ равносильно тому, что $x \in \mathrm{cl}(C + L)$, т. е. $[x] \in [C]$. Если $C \subset C' \in \pi^{-1}(S_{X/L})$, то $\rho_X(x + z, C) \geq \rho_X(x, C')$ для любых $z \in L$, значит, $\rho_{X/L}([x], [C]) \geq \rho_{X/L}([x], [C'])$. Для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ существует $z_x \in X$ такой, что $\rho_{X/L}([x], [C]) + \varepsilon/3 \geq \rho_X(x + z_x, C) \geq \rho_{X/L}([x], [C])$. Поскольку для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность нуля $V$, $X \supset V \ni 0$, такая, что $|\rho_X(x, C) - \rho_X(x + v, C)| < \varepsilon/3$ для любых $v \in V$ и $x \in X$, то $|\rho_{X/L}([x] + [v], [C]) - \rho_{X/L}([x], [C])| < \varepsilon$, тем самым $\rho_{X/L}([x], [C])$ равномерно непрерывна по $[x] \in X/L$ для любого фиксированного $[C] \in S_{X/L}$. Из равенства $\inf_{z\in L} \rho_X(x+z, C) = \inf_{y,z\in L} \rho_X(x+z, y+C)$ и регулярности $\rho_X$ следует, что

$$\inf_{z\in L} \rho_X(x+z, C) \le \inf_{z\in L} \rho_X(x+z, C') + \inf_{y\in L} \bar\rho_X(C', z+C)$$

(или max вместо суммы в неархимедовом случае) для любых $C, C' \in \pi^{-1}(S_X)$, поэтому $\rho_{X/L}$ тоже регулярна, так как

$$\inf_{y\in L} \sup_{b\in C'} \rho_X(b, C+y) = \sup_{b\in C'} \inf_{y\in L} \rho_X(b, C+y).$$

Далее,

$$\rho_{X/L}([x]+[y], [y]+[C]) = \inf_{z\in L} \rho_X(x+y+z, y+C) = \rho_{X/L}([x], [C])$$

и

$$\rho_{X/L}(\lambda[x], \lambda[C]) = \inf_{z\in L} \rho_X(\lambda x+z, \lambda C) = \inf_{z\in L} \rho(\lambda(x+z), \lambda C) = |\lambda| \rho_{X/L}([x], [C])$$

для любых $x, y \in X$, $0 \ne \lambda \in \mathbb{K}$, так как $L$ является $\mathbb{K}$-линейным подпространством. Аналогично проверяются остальные аксиомы.

**7.** Определение. Для $\kappa$-нормированного пространства $(X, S_X, \rho)$ зададим на $(S_X)^2$ функцию $D_X(A,B) := D(A,B) := \bar\rho(A,B) + \bar\rho(B,A)$ (или с max вместо суммы в неархимедовом случае).

**8. Лемма.** *Функция $D : (S_X)^2 \to \mathbb{R}$ является метрикой, удовлетворяющей дополнительным условиям:*

(4) $D(A\hat{+}B, C\hat{+}E) \le D(A,C) + D(B,E)$ (*или с* max *вместо суммы в неархимедовом случае);*

(5) $D(\lambda A, \lambda C) = |\lambda| D(A,C)$ *при* $0 \ne \lambda \in \mathbb{K}$, *где* $A\hat{+}B := \mathrm{cl}(A+B)$.

Доказательство. Пусть $A \ne B$. Тогда при $A \supset B$ и $x \in A \setminus B$ выполняется неравенство $\rho(x,B) > 0$, следовательно, $D(A,B) > 0$. В силу определения выполняется симметричность $D(A,B) = D(B,A)$. Ввиду регулярности $\kappa$-нормы имеется неравенство $\bar\rho(A,B) \le \bar\rho(A,C) + \bar\rho(C,B)$, так что $D(A,B) \le D(A,C) + D(C,B)$ (с max вместо суммы в неархимедовом случае). Далее,

$$\begin{aligned} D(A\hat{+}B, C\hat{+}E) &= \sup_{x\in A, y\in B} \rho(x+y, C\hat{+}E) + \sup_{x\in C, y\in E} \rho(x+y, A\hat{+}B) \\ &\le \sup_{x\in A} \rho(x,C) + \sup_{y\in B} \rho(y,E) + \sup_{x\in C} \rho(x,A) + \sup_{y\in E} \rho(y,B), \end{aligned}$$

т. е. выполняется (4). При $\lambda \ne 0$ имеется равенство

$$\sup_{\lambda x\in\lambda A} \rho(\lambda x, \lambda C) + \sup_{\lambda y\in\lambda C} \rho(\lambda y, \lambda A) = |\lambda| (\sup_{x\in A} \rho(x,C) + \sup_{y\in C} \rho(y,A)),$$

откуда вытекает (5).

**9. Теорема.** *Если $X$ полно, то метрическое пространство $\left(2^X_\delta, D\right)$ полно.*

Доказательство. Пусть $(C_i : i \in \mathbb{N})$ — последовательность Коши в $\left(2^X_0, D\right)$. Выберем из $(C_i : i)$ подпоследовательность, за которой сохраним прежнее обозначение, такую, что $D(C_i, C_j) \le 1/(\min(i,j))^2$.

Рассмотрим

$$C_i{}^n := \{x \in X : \rho(x, C_i) \le 1/n\}, \quad i,j,n \in \mathbb{N}, \quad A_{2,m} := \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i, i\ge j} (C_i + U_{i,j+m}),$$

где открытые окрестности $U_{i,j} \ni 0$ выбраны с помощью следствия 5 так, чтобы $C_i + U_{i,j} \subset C_i^{j^2}$, $i, j, m \in \mathbb{N}$. Очевидно, что

$$A_{2,n} \supset A_{2,m+n} \supset \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathrm{cl}_X \left( \bigcup_{i=j}^{\infty} (C_i + U_{i,j+n+m+1}) \right) \supset \mathrm{cl}_X(A_{2,n+m+1})$$

для любых $n, m \in \mathbb{N}$.

Поскольку $X$ вполне регулярно, для любых точки $x \in X$ и окрестности $U \ni x$ существует открытое $V \ni x$ такое, что $U \supset \mathrm{cl}_X(V) \supset V$. Тогда $\bigcap_m A_{2,m} \neq \varnothing$, так как для каждой направленности Коши $(x_\gamma : \gamma \in \alpha)$ ввиду полноты $X$ существует предельная точка в $X$. При этом $(x_\gamma : \gamma \in \alpha)$ может быть выбрана такой, чтобы для любого $m \in \mathbb{N}$ существовало $\eta \in \alpha$ с $x_\gamma \in A_{2,m}$ для любой $\gamma \geq \eta$, где $\alpha$ — предельный ординал. Следовательно, $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_{2,m} =: A_1 \in 2_\delta^X$ в силу леммы 2, так как $\mathrm{cl}_X(A_{2,m+1}) \subset A_{2,m}$, $\mathrm{cl}_X(A_1) \subset \bigcap_{m=2}^{\infty} \mathrm{cl}_X(A_{2,m}) \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{2,m} = A_1$.

С другой стороны, $D(C_i \hat{+} U_{i,n}, C_j \hat{+} U_{j,m}) \leq n^{-2} + m^{-2} + (\min(i,j))^{-2}$, т. е. $(C_{i,n} : i + n \in \mathbb{N})$ тоже последовательность Коши при $i + n \to \infty$, где $C_{i,n} := C_i \hat{+} U_{i,n}$ при $n > 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} =: \mathbb{N}_0$, $C_{i,0} := C_i$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда $\lim_i D(C_i, A_1) = 0$.

**10. Следствие.** *Пусть $f : \left(2_\delta^X, D\right) \to \left(2_\delta^X, D\right)$ — сжимающее отображение. Тогда существует единственная неподвижная точка $C \in 2_\delta^X$.*

**11. Следствие.** *Пусть $f : X \to X$ — отображение такое, что или*

(1) $\rho(f(x), f(C)) \leq a_1\rho(x, C) + a_2\rho(x, f(B)) + a_2\rho(f(y), C) + a_3\rho(f(x), B) + a_3\rho(y, f(C)) + a_4\rho(f(y), B) + a_4\rho(x, f(C)) + a_5\rho(f(x), C) + a_5\rho(y, f(B))$, *где* $a_1 + 2(a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \leq 1$ *для любых* $x \in B$, $y \in C$, $B, C \in 2_\delta^X$,

*или*

(2) $D(f(B), f(C)) < k \max(D(B, C);\ D(B, f(B));\ D(C, f(C));\ D(B, f(C));\ D(C, f(B)))$ *для любых* $B \neq C$, *где* $0 < k < 1/2$; *причем* $f\left(2_\delta^X\right) \subset 2_\delta^X$ *и существует* $Y \in 2_\delta^X$ *такое, что* $g(Y) = \inf_{C \in 2_\delta^X} g(C)$, *где* $g(C) := D(C, f(C))$.

*Тогда существует единственная неподвижная точка для отображения* $f : 2_\delta^X \to 2_\delta^X$.

Доказательство. Из условия (1) следует, что

$$\begin{aligned} D(f(B), f(C)) \leq a_1 D(B, C) + b_2 D(B, f(B)) \\ + b_3 D(C, f(C)) + b_4 D(B, f(C)) + b_5 D(C, f(B)), \end{aligned}$$

где $b_2 = b_3 = a_2 + a_3$, $b_4 = b_5 = a_4 + a_5$. В работе [6] доказаны два обобщения теоремы о существовании и единственности неподвижной точки отображения $T : X \to X$ для метрического пространства $X$ с метрикой $d$. В первой теореме на $T$ накладывались условия:

(a) $d(Tx, Ty) < a_1 d(x, y) + a_2 d(x, Tx) + a_3 d(y, Ty) + a_4 d(x, Ty) + a_5 d(y, Tx)$ для любых $x, y \in X$ с $x \neq y$,

(b) существует точка $u \in X$, для которой $f(u) = \inf\{f(x) : f(x) = d(x, Tx), x \in X\}$, где $a_i \geq 0$, $0 < \sum_{i=1}^{5} a_i \leq 1$.

Во второй теореме на $T$ накладывались вышеуказанное условие (b) и условие:

($a$) существует $0 < k < 1/2$ такое, что

$$d(Tx, Ty) < k \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

для любых $x, y \in X$ с $x \neq y$.

Из этих двух теорем и теоремы 9 вытекает утверждение следствия.

**12.** Замечание. Пусть имеется выпуклое уравновешенное подмножество $C \in 2^X_\delta$. Тогда $\bigcap_{0 \neq \lambda \in \mathbb{K}} \lambda C =: Z$ является замкнутым $\mathbb{K}$-линейным подпространством в $X$, причем $Z \subset C$. Это объясняется тем, что если $x \in C$ и $(\mathbb{K}x) \cap C$ ограничено в $X$, то для любой окрестности $U$ нуля в $X$ существует $r \in (0, \infty)$ такое, что $(\lambda(\mathbb{K}x) \cap C) \subset U$ для любых $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ с $|\lambda| < r$. Поэтому если $x \in Z$, то $\lambda x \in Z$ для любых $\lambda \in \mathbb{K}$. Из выпуклости $C$ следует, что $x + y \in Z$ для любых $x, y \in Z$. Из уравновешенности $C$ вытекает, что $Z = \bigcap_n \lambda_n C$ для любой последовательности $\lambda_n \in \mathbb{K}$, $\lambda_n \neq 0$, для которой $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Фактор-пространство $X/Z$ хаусдорфово вместе с $X$, и в силу леммы 2 существуют $C_j \in 2^X_0$ с $C_j \supset C$ и $C + Z = \bigcap_j (C_j + Z)$. Тогда $0 \in 2^{X/Z}_\delta$, причем $\{0\} = \bigcap_{n,j} \lambda_n (C_j + Z)$, где $0 \in X/Z$.

Если $C \in 2^X_\delta$ и $y \in C$, то $0 \in (C - y)$. Если дополнительно $0 \in C$, то согласно лемме 2 существует последовательность $C_j \supset C$, $C_j \supset C_{j+1}$ для любого $j \in \mathbb{N}$, $\bigcap_j C_j = C$, где $C_j \in 2^X_0$. Если пространство $X$ локально выпукло, то каждое $C_j$ содержит в себе уравновешенную выпуклую окрестность нуля $U_j$. Поэтому $\bigcap_n \lambda_n (\bigcap_j \operatorname{cl}(U_j)) = \bigcap_j (\bigcap_n \lambda_n \operatorname{cl}(U_j)) =: Y$ является замкнутым $\mathbb{K}$-линейным подпространством в $X$, $Y \in 2^X_\delta$, $Y \subset C$. Таким образом, если $X$ локально выпукло, то для любого $C \in 2^X_\delta$ существуют $y \in C$ и $\mathbb{K}$-линейное подпространство $Y \subset X$ такие, что $Y \subset (C - y)$ и $Y \in 2^X_\delta$. Тогда $\rho(x, C) \leq \rho(x + y, Y) < \infty$ для любых $x \in X$.

**13. Предложение.** *Пусть имеется семейство $\{(X_\alpha, 2^{X_\alpha}_\delta, \rho_\alpha) : \alpha \in A\}$ $\kappa$-нормированных пространств, где $X_\alpha$ —* ЛВП. *Тогда существует $\kappa$-нормированное пространство $(X, 2^X_\delta, \rho)$ такое, что каждое $(X_\alpha, 2^{X_\alpha}_\delta, \rho_\alpha)$ является фактор-пространством пространства $(X, 2^X_\delta, \rho)$, т. е. $X_\alpha$ — фактор-пространство* ТВП *$X$, а $\kappa$-норма на $X_\alpha$, порождаемая $\rho$ с помощью теоремы 6, эквивалентна $\rho_\alpha$.*

Доказательство. В силу предположения каждое пространство $X_\alpha$ является ЛВП. Сначала зададим $X$ алгебраически, а потом зададим на нем топологию ЛВП. В качестве $X$ возьмем подпространство алгебраического произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, точки $x$ которого удовлетворяют следующим условиям:

(a) $x = \{x_\alpha : x_\alpha \in X_\alpha, \alpha \in A\}$, $x_\alpha = \pi_\alpha(x)$, $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ — факторное отображение, индуцированное факторным отображением на произведении ЛВП $X_\alpha$;

(b) если $C = \{L_\alpha : L_\alpha \subset X_\alpha\} \cap X$ с $\mathbb{K}$-линейными подпространствами $L_\alpha$ в $X_\alpha$, $L_\alpha \in 2^{X_\alpha}_\delta$ для любых $\alpha \in A$, то $\sup_{\alpha \in A} \rho_\alpha(x_\alpha, L_\alpha) < \infty$.

Рассмотрим семейство $T_X$ подмножеств $C$ в $X$, удовлетворяющих условию

(c) $C = \bigcap_{i \in \Lambda} C^i$, $\Lambda \subset \mathbb{N}$, $C^i = \operatorname{cl}(\bigcup_{\beta \in \gamma} (\prod_{\alpha \in A} C^{i,\beta}_\alpha) \cap X)$ с $C^{i,\beta}_\alpha \in 2^{X_\alpha}_0$ для любых $\alpha \in A$ и $\beta \in \gamma$, а семейство $\{\alpha : C^{i,\beta}_\alpha \neq X_\alpha\}$ конечно или счетно для любых $i \in \mathbb{N}$ и $\beta \in \gamma$, где $\gamma$ — ординал.

Зададим $\rho(x, C)$ для $x \in X$ и $C \in T_X$ по формуле

(d) $\rho(x,C) = \inf\{\sup\limits_{\alpha}(x_\alpha, C'_\alpha) : T_X \ni ((\prod\limits_{\alpha\in A} C'_\alpha)\cap X) \subset C,\ C'_\alpha \in 2_\delta^{X_\alpha}$ при $\alpha \in A\}$.

В силу замечания 12, условия (b), аксиом (N2), (N6), (N7) и следствия 5 для всех $\rho_\alpha$ имеем неравенство $\rho(x,C) < \infty$ при $C_\alpha \neq \varnothing$ для любых $\alpha \in A$, где $C_\alpha = \pi_\alpha(C)$. Рассмотрим на $X$ слабейшую топологию $\tau$, относительно которой отображение $\rho(x,C)$ равномерно непрерывно по $x \in X$ для любого фиксированного $C \in T_X$.

Если $L = \bigcap\limits_n \lambda_n C$ для выпуклого уравновешенного $C \in T_X$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, $0 \neq \lambda_n \in \mathbb{K}$, то в силу замечания 12 $L$ и $L_\alpha := \pi_\alpha(L)$ являются замкнутыми $\mathbb{K}$-линейными подпространствами в $X$ и $X_\alpha$ соответственно. Тогда $\rho(x,L) = \sup\limits_\alpha \rho_\alpha(x_\alpha, L_\alpha)$ — норма на $X/L$, а $\rho_\alpha(x_\alpha, L_\alpha)$ — нормы на $X_\alpha/L_\alpha$ для всех $\alpha \in A$. С учетом условий (a)–(d) и определения топологии $\tau$ на $X$ семейство подмножеств $\bigcap\limits_{i\in\Lambda} \pi_{\alpha_i}^{-1}(\mathrm{Int}(C_{\alpha_i}))$ является базой $\mathscr{B}$ топологии $\tau$, где $C_\alpha \in 2_0^{X_\alpha}$ локально выпуклы для любых $\alpha \in A$, $\Lambda \subset \mathbb{N}$. Если $C \in T_X$, то в силу условий (c), (d) для любого $x \in C$ существует счетное семейство $\{\alpha_i : i \in \Lambda, \alpha_i \in A\}$ с $\Lambda \subset \mathbb{N}$ такое, что $x \in \bigcap\limits_{i\in\Lambda} \pi_{\alpha_i}^{-1}(C'_{\alpha_i}) \subset C$, где $C'_\alpha \in 2_\delta^{X_\alpha}$ для всех $\alpha \in A$. Поскольку $C^i \in 2_0^{X_\alpha}$, то $C \in 2_\delta^X$. Поэтому $2_0^X \subset T_X \subset 2_\delta^X$. Семейство $T_X$ замкнуто относительно счетных пересечений, следовательно, $T_X = 2_\delta^X$.

Покажем, что $\rho$ на $X \times 2_\delta^X$ удовлетворяет аксиомам (N1)–(N8).

(N1) Если $x \in C$, то $x_\alpha \in C_\alpha$ для любых $\alpha$, поэтому $\rho(x,C) = 0$. Обратно, если $\rho(x,C) = 0$, то в силу следствия 5 существуют $C'_\alpha$ такие, что $\rho_\alpha(x_\alpha, C'_\alpha) = 0$ для любого $\alpha$ и $x_\alpha \in C'_\alpha$ для любого $\alpha$, следовательно, $x \in C$, где $C'_\alpha$ такие же, как в формуле (d).

(N2) Для $C := (\prod\limits_{\alpha\in A} C_\alpha)\cap X \subset B := (\prod\limits_{\alpha\in A} B_\alpha)\cap X$ имеем $C_\alpha \subset B_\alpha$ для любых $\alpha \in A$, поэтому $\sup\limits_\alpha \rho_\alpha(x_\alpha, C_\alpha) \geq \sup\limits_\alpha \rho_\alpha(x_\alpha, B_\alpha)$.

(N3) выполнено в силу выбора топологии $\tau$ на $X$.

(N4) Для любой возрастающей трансфинитной последовательности $\{C^\gamma : \gamma \in \beta\} \subset 2_\delta^X$ с $\mathrm{cl}\{\bigcup\limits_\gamma C^\gamma\} \in 2_\delta^X$ существуют возрастающие трансфинитные последовательности $\{C_\alpha^\gamma : \gamma \in \beta\} \subset 2_\delta^{X_\alpha}$, где $\beta$ — это ординал, $\lim\limits_\gamma C_\alpha^\gamma = C_\alpha$ в $(2_\delta^{X_\alpha}, D_\alpha)$ для любого $\alpha \in A$, причем $\mathrm{cl}\{\bigcup\limits_\gamma C_\alpha^\gamma\} \in 2_\delta^{X_\alpha}$ (см. лемму 8). Из условия (d) вытекает (N4).

(N5) очевидно в силу $\mathbb{K}$-линейности отображений $\pi_\alpha$.

(N6) $\sup\limits_\alpha \rho_\alpha(\lambda x_\alpha, \lambda C'_\alpha) = |\lambda| \sup\limits_\alpha \rho(x_\alpha, C'_\alpha)$ при $\lambda \neq 0$ и далее в силу формулы (d).

(N7) $\sup\limits_\alpha \rho_\alpha(x_\alpha + y_\alpha, y_\alpha + C'_\alpha) = \sup\limits_\alpha \rho_\alpha(x_\alpha, C'_\alpha)$.

Из определения пространства $X$ следует, что существуют факторные отображения $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$. Из условий (a)–(d) и аксиомы (N7) имеем $\rho(z, \pi^{-1}(C_\alpha)) = \rho_\alpha(x_\alpha, C_\alpha)$ для любых $z \in \pi^{-1}(x_\alpha)$ и $C_\alpha \in 2_\delta^{X_\alpha}$.

**14. Теорема.** *Произведение $\prod\limits_\alpha X_\alpha =: X$ любого семейства $\kappa$-нормированных пространств $(X_\alpha, 2_0^{X_\alpha}, \rho_\alpha)$ является $\kappa$-нормируемым $\kappa$-нормой $\rho$ на $(X, 2_0^X)$.*

Доказательство. Произведение $X$ ТВП $X_\alpha$ представляет собой

ТВП. Если все $X_\alpha$ локально выпуклы, то в силу теоремы II.5.3 из [7] $X$ тоже локально выпукло. Пусть $\rho'_\alpha(x,C)=\rho(x,C)/[1+\rho(x,C)]$, а

$$\varepsilon_\alpha(x,A):=\{\sup(\rho'_\alpha(x,C):C\in S_{X_\alpha},A\cup C=X_\alpha\}$$

— емкость для $X_\alpha$, где $A\in 2^{X_\alpha}$, $x\in X_\alpha$, $2^X$ — семейство всех замкнутых подмножеств в $X$. В частности, $\varepsilon_\alpha$ определены для любых $x\in X_\alpha$ и $U\in\mathscr{B}_\alpha$, где $\mathscr{B}_\alpha$ — базы топологий в $X_\alpha$. Тогда выполнены следующие свойства:

(E1) $\varepsilon_\alpha(x,U)>0$ тогда и только тогда, когда $x\in U$;

(E2) $\{U\in\mathscr{B}_\alpha:\varepsilon_\alpha(x,U)>0\}$ является базой топологии в точке $x\in X_\alpha$;

(E3) $\varepsilon_\alpha(x,U)$ равномерно полунепрерывно снизу по $x$ для любого фиксированного $U$;

(E4) для любых двух отображений $U(t,y)$ и $x(t,y)$ фильтрующихся множеств $T_y=y+T_0\subset e^{X_\alpha}$ с ультрафильтрами $F_y=y+F_0$, $U:T_0\times X_\alpha\to\mathscr{B}_\alpha$ и $x:T_0\times X_\alpha\to X_\alpha$, если существует $y=\lim\limits_{F_y}x(t,y)=y+\lim\limits_{F_0}x(t,0)$ для любого $y\in X_\alpha$, то для любых $\beta>0$ и $y\in X_\alpha$ существует подмножество $U'_y\in\mathscr{B}_\alpha$ такое, что

$$U'_y\subset\varlimsup_{F_y}U(t,y):=\bigcap_{E\in F_y}\mathrm{cl}\Big(\bigcup_{t\in E}U(t,y)\Big)$$

с $\varepsilon_\alpha(y,U'_y)>\lim\limits_{F_y}\varepsilon_\alpha(x(t,y),U(t,y))-\beta$, где $e^{X_\alpha}$ — семейство всех подмножеств в $X_\alpha$;

(E5) (a) если $\varepsilon_\alpha(x,U)>a>0$, то существует такое $U(a)\in\mathscr{B}_\alpha$, что $\varepsilon_\alpha(x,U(a))\ge a$ и $\varepsilon_\alpha(y,U)\ge\varepsilon_\alpha(x,U)-a$ для всех $y\in U(a)$,

(b) $\varepsilon_\alpha(x+y,X_\alpha\setminus\mathrm{cl}(X_\alpha\setminus A_1+X_\alpha\setminus A_2))\le\varepsilon_\alpha(x,A_1)+\varepsilon_\alpha(y,A_2)$ (с max вместо суммы в правой части неравенства в неархимедовом случае);

(E6) $\varepsilon_\alpha(\lambda x,\lambda U)=|\lambda|\varepsilon_\alpha(x,U)/[1+(|\lambda|-1)\varepsilon_\alpha(x,U)]$ для любых $0\ne\lambda\in\mathbb{K}$;

(E7) $\varepsilon_\alpha(x,U)=\varepsilon_\alpha(x+z,U+z)$ для любых $x,z\in X_\alpha$ и $U\in\mathscr{B}_\alpha$;

(E8) $\varepsilon_\alpha(x,X_\alpha)=1$.

Свойства (E6)–(E8) следуют из аксиом (N6)–(N8). Каждое $\kappa$-нормированное пространство является $\kappa$-метрическим. Поэтому свойства (E1)–(E5) выполнены в силу аксиом (N1)–(N5) и вытекают из [1, § 3, теорема 15; 2, § 3, теорема 2], а также [1, § 3, лемма 1; 2, § 2, лемма 3], которые утверждают следующее.

**14.1. Лемма.** *Пусть $\{C_\alpha:\alpha\in A\}\subset 2_0^Y$, где $(Y,2_0^Y,\rho)$ — $\kappa$-метрическое пространство. Тогда для любого $\varepsilon>0$ и $x\in Y$ существуют $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in A$ такие, что $\rho\left(x,\bigcup\limits_{i=1}^n C_{\alpha_i}\right)<\rho\big(x,\mathrm{cl}\big(\bigcup\limits_{\alpha\in A}C_\alpha\big)\big)+\varepsilon$.*

**14.2. Предложение.** *Пусть $T_y$ — фильтрующиеся множества с ультрафильтрами $F_y$, причем $T_y=y+T_0\subset e^Y$ и $F_y=y+F_0$ для любых $y\in Y$; $U:T_0\times Y\to\tau(y,Y)$ и $x:T_0\times Y\to Y$ — два отображения, причем $y=\lim\limits_{F_y}x(t,y)=y+\lim\limits_{F_0}x(t,0)$, где $(Y,2_0^Y,\rho)$ — это $\kappa$-метрическое пространство с $\rho(y,C)\le 1$ для всех $(y,C)\in(Y,2_0^Y)$, $\tau(Y)$ — топология $Y$, $\tau(y,Y)$ — база окрестностей точки $y\in Y$, $Y$ также является* ТВП, *а $\rho(y,C)$ равномерно непрерывна по $y\in Y$ для любого фиксированного $C\in 2_0^Y$. Тогда $\varepsilon(y,\varlimsup\limits_{F_y}U(t,y))\ge\lim\limits_{F_y}\varepsilon(x(t,y),U(t,y))$ для любых $y\in Y$.*

Доказательство вытекает из соответствующего доказательства в [2], где надо положить $\varlimsup\limits_{F_y}\varepsilon(x(t,y),\,U(t,y))>a(y)$ для равномерно непрерывной функции $a(y)$ на $Y$. В итоге получим $\varepsilon(y,\mathrm{Int}(\varlimsup_{F_y}U(t,y)))\ge a(y)$ для любых $y\in Y$.

Из равномерной непрерывности $\rho(y, C)$ по $y \in Y$ для любого фиксированного $C \in 2_0^Y$ и произвольности функций $a(y)$ следует утверждение леммы 14.2.

Продолжение доказательства теоремы 14. Пусть $\mathscr{B}$ является семейством подмножеств вида $U = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$, где $U_i \in \mathscr{B}_{\alpha_i}$ для $i = 1, \ldots, n$, $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ — линейные проекторы. Тогда можно задать емкость для $X$ по формуле $\varepsilon(x, U) = \inf_{\alpha \in v(U)} \varepsilon_\alpha(x_\alpha, U_\alpha)/g(|v(U)|)$, где $|v| = \mathrm{card}(v)$, $v(U) = \{\alpha_i : U_i \neq X_{\alpha_i}\}$, $g(w) = w$ в случаях полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $g(w) = p^w$ с $p = |\mu| > 1$ при некотором $\mu \in \mathbb{K}$ для неархимедова поля $\mathbb{K}$. Для $\varepsilon(x, U)$ на $X \times B$ выполнены свойства (E1)–(E8) с опущенным индексом $\alpha$. В силу теоремы 2.3.11 из [13] произведение $T_i$-пространств всегда есть $T_i$-пространство при $i \leq 3,5$. Согласно теоремам 6.7.1 и 6.7.2 из [5] каждое ЛВП вкладывается в произведение нормированных пространств. Далее с соответствующими изменениями, учитывающими равномерную непрерывность, получим утверждение теоремы. При этом база $\mathscr{B}$ может быть порождена подсемейством $B_0$ элементарных открытых подмножеств $U = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$ с $U_i = \pi_{\alpha_i,\omega}^{-1}(P_{\alpha_i,\omega})$, где $X_\alpha = \text{pr-}\lim_{\omega} X_{\alpha,\omega}$ представлены как проективные пределы нормированных пространств $X_{\alpha,\omega}$, а $\pi_{\alpha,\omega} : X \to X_{\alpha,\omega}$ — соответствующие проекторы (являющиеся непрерывными линейными факторными эпиморфизмами), $\omega \in \beta_\alpha$ — ординалы, $P_{\alpha,\omega}$ — открытые шары в $X_{\alpha,\omega}$ относительно норм в них. Зададим $\rho'(x, C) = \sup\{\varepsilon(x, U) : U \in B \text{ и } U \cap C = \varnothing\}$. В силу свойств (E1)–(E7) функция $\rho'$ удовлетворяет условиям (N1), (N2), (N4), (N5), (N7). В силу (E3) для любого $\delta > 0$ существует окрестность нуля $U$ в $X$ такая, что $\rho'(x+y, C) \geq \rho'(x, C) - \delta$ для любого $y \in U$. Пусть $\rho'(y, C) < a(y)$ и существует $A_y \subset X$ такое, что $y \in \mathrm{cl}(A_y)$ и $\rho'(z, C) \geq a(y)$ для любых $z \in A_y$, где функция $a(y)$ удовлетворяет условию $\infty > \inf_{y \in X}(a(y) - \rho'(y, C)) = \delta > 0$. Тогда для любого $z \in A_y$ существует окрестность нуля $U_z$ в $X$ такая, что $\varepsilon(z, z + U_z) \geq a(y)$ и $(z + U_z) \cap C = \varnothing$. Пусть $F_y$ — ультрафильтр, мажорирующий фильтр, индуцируемый на $A_y$ фильтром окрестностей $y$. Тогда $\lim_{F_y} x(t, y) = y = y + \lim_{F_0} x(t, 0)$, $F_y = y + F_0$ для любых $y \in X$. В силу свойств (E4), (E7) для $\varepsilon$ и (N7) для $\rho'$ существуют подмножества $U_y \in \mathscr{B}$ такие, что $U_y \subset \overline{\lim}_{F_y} U(t, y)$ и $\varepsilon(y, U_y) \geq a(y)$ для любых $y \in X$. Но $U_y \cap C = \varnothing$, следовательно, $\rho'(y, C) \geq a(y)$ вопреки предположению. Таким образом, $\rho'(y, C)$ равномерно непрерывна по $y \in X$ для любого фиксированного $C \in 2_0^X$. Тогда емкость $\varepsilon$ порождает $\kappa$-метрику $\rho'$ с помощью следствий 3–5 на всем $X \times S_X$, причем $\rho(x, C) = \rho'(x, C)/[1 - \rho'(x, C)]$ является $\kappa$-нормой, так как из свойств (E6), (E8) следуют свойства (N6), (N8) из определения 1.

**15.** Определение. Пусть $L$ — $\mathbb{K}$-линейное пространство над нормированным полем $\mathbb{K}$, $\mathscr{F}$ — семейство $\mathbb{K}$-линейных функционалов $\phi$ на $L$, $\phi : L \to \mathbb{K}$, различающее точки. *$\mathscr{F}$-слабой топологией на $L$* называется топология, база открытых множеств которой образована следующими подмножествами: $\{x \in L : |\phi(x) - \phi(x_0)|_{\mathbb{K}} < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$, $x_0 \in L$, $\phi \in \mathscr{F}$.

**16. Следствие.** *$\mathbb{K}$-линейное пространство $L$ в $\mathscr{F}$-слабой топологии является $\kappa$-нормируемым.*

Доказательство. Пространство $L$ в выбранной топологии локально $\mathscr{K}$-выпукло, так как база окрестностей нуля в $L$ задается подмножествами $U = \left\{x \in L : \sum_{i=1}^{n} p_i(x) < \varepsilon\right\}$, где $\varepsilon > 0$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, $p_i(x) := |\phi_i(x)|$, $\phi_i \in \mathscr{F}$.

Семейство $\mathscr{F}$ различает замкнутые подмножества $C$ с не принадлежащими им точками $x \in L$, так как $\phi$ линейны, поэтому достаточно рассмотреть случай $x = 0$, а для любой $y \in C$ существует $\phi \in \mathscr{F}$ с $\phi(y) \neq 0$. Поскольку $\mathrm{coker}(\phi)$ дополняемо в $L$, то $0 \notin \phi(C)$ и $\phi(z) \notin \phi(z+C)$ для любых $z \in L$. Воспользуемся теоремой 2.3.20 из [13], согласно которой имеется гомеоморфное линейное вложение $L \hookrightarrow \prod_{\phi \in \mathscr{F}} \mathbb{K}_\phi =: X$, так как все $\phi \in \mathscr{F}$ линейны, где $\mathbb{K}_\phi = \mathbb{K}$ для всех $\phi$. Тогда на $X \times 2^X_\delta$ в силу теоремы 14 существует $\kappa$-норма $\rho_X$, которая порождает $\kappa$-норму на плотном подпространстве $L$ по формуле $\rho_L(x, C) := \rho_X(x, \mathrm{cl}(C))$, где $\mathrm{cl}(C) = \mathrm{cl}_X(C)$ — замыкание в $X$ подмножества $C \subset L$, $C \in 2^L_\delta$. При этом для любого $C_j \in 2^L_0$ с использованием базы топологии найдем $S_j \in 2^X_0$ такое, что $S_j \cap L = C_j$, следовательно, для любого $C \in 2^L_\delta$ существуют $C_j \in 2^L_0$ и $S_j \in 2^X_0$ такие, что $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} C_j = C$ и $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} S_j =: S \in 2^X_\delta$, $S \cap L = C$, т. е. $\mathrm{cl}(C) = S$.

**17. Предложение.** *Бесконечномерное над $\mathbb{K}$ пространство $X$ в сильнейшей локально выпуклой топологии не имеет равномерно непрерывной $\kappa$-нормы на $X \times 2^X_\delta$.*

Доказательство. Предположим, что $X$ имеет $\kappa$-норму $\rho$ на $X \times 2^X_\delta$. Существует подпространство $X_0$ в $X$ такое, что $X \ominus X_0$ тоже бесконечномерно над $\mathbb{K}$. В силу упражнения 6.107 из [5] каждое $\mathbb{K}$-линейное подпространство $M$ замкнуто в нем. Поскольку функционал Минковского $p_E(x) := \inf\{|a| : 0 \neq a \in \mathbb{K}, x \in aE\}$, определенный с помощью ограниченной уравновешенной выпуклой окрестности $E$ нуля дает непрерывную норму $\| * \|'$, то $M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [M + \dot{B}(X, 0, 1/n)]$ является $G_\delta$-подмножеством, так как $M + \dot{B}(X, 0, 1/n)$ открыты, где $\dot{B}(X, y, r) := \{x \in X : \|x - y\|' < r\}$. В силу этого можно ограничиться рассмотрением $X$ (или его подпространств) сепарабельного типа над $\mathbb{K}$, т. е. когда существует счетное семейство линейно независимых векторов $(e_i : i \in \mathbb{N})$ такое, что их конечные линейные комбинации над $\mathbb{K}$ плотны в $X$, т. е. $\mathrm{sp}_{\mathbb{K}}(e_i : i \in \mathbb{N})$ плотно в $X$. Если поле $\mathbb{K}$ не полно, то можно рассмотреть пополнения $\widetilde{X}$ и $\widetilde{\mathbb{K}}$, а затем взять локально компактное подполе в $\widetilde{\mathbb{K}}$, т. е. ограничиться случаем $\widetilde{X}$ над локально компактным подполем $\mathbf{L}$, $\widetilde{X}_{\mathbf{L}}$. Это объясняется тем, что существование равномерно непрерывной $\kappa$-нормы на $X$ влечет ее существование на $\widetilde{X}$, а значит, и на $\widetilde{X}_{\mathbf{L}}$. Действительно, для любой $C \in 2^X_\delta$ существует $C_1 \in 2^{\widetilde{X}}_\delta$ с $C_1 \cap X = C$, а $C_1 \cap \widetilde{X}_{\mathbf{L}} \in 2^{\widetilde{X}_{\mathbf{L}}}_\delta$, что вытекает из рассмотрения соответствующих счетных пересечений канонически замкнутых подмножеств. Пусть функция $\phi(x) := \rho(x, M_1)$ равномерно непрерывна на $X$ относительно $\| * \|_X$, где $\| * \|_X$ — одна из непрерывных норм на $X$. Выберем $X_0$ так, чтобы $X_0$, $X \ominus X_0$, $M \in 2^X_\delta$, где $M \neq X \ominus X_0$ и $M$ — это плотное относительно $\| * \|_X$ $\mathbb{K}$-линейное подпространство в $X \ominus X_0$. Рассмотрим $M_1 := M \cap \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$. Тогда $\phi^{-1}(0) = M_1$ в силу (N1) и в тоже время $\mathrm{cl}_X(M_1) = B := \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$ ввиду непрерывности $\phi$. Но $M_1 \neq B$, и получается противоречие. Остается показать существование такой нормы. Семейство всех замкнутых подмножеств $2^X$ в $X$ совпадает с $2^X_\delta$, так как доказательство сведено к случаю сепарабельного $X$. Возьмем $X_1 = X \oplus \mathbb{K}e$. Тогда $\kappa$-норма $\rho$, существуя на $X_1$, индуцирует требуемую норму на $X$ такую, что $\|x\|_X := \rho(x, \mathbb{K}e)$.

**18.1.** Определение. Подмножество $W \subset S_X$ называется *выпуклым*, если $aA \hat{+} bB \in W$ для любых $a, b \in \mathbb{K}$ с $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$, $a + b = 1$ и любых $A, B \in W$.

**18.2.** Определение. Пусть $B_0$ является уравновешенной окрестностью нуля в ТВП $X$. Помимо указанных в определении 1 $S_X$ рассмотрим их подсемейства $J_X$ ограниченных канонических замкнутых подмножеств (и ограниченных замкнутых $G_\delta$-подмножеств) $J_X = 2^X_{bo}$ (и $J_X = 2^X_{b\delta}$ соответственно). Подмножество $E$ в $S_X$ или $J_X$ назовем *уравновешенным*, если существует такое $B_0$, что $B_0 \in E$ и $aC \in E$ для любых $C \in E$, $a \in \mathbb{K}$, $0 < |a| \leq 1$.

**18.3.** Определение. Подмножество $V$ в $S_X$ называется *поглощающим*, если для любого $C \in J_X$ существует $r \in (0, +\infty)$ такое, что $aC \in V$ при $0 < |a| \leq r$. Подмножество $A \subset S_X$ *поглощает* $B \subset S_X$, если существует $r \in (0, +\infty)$ такое, что $aA \supset B$ при $|a| \geq r$, где $a \in \mathbb{K}$.

**18.4.** Определение. Подмножество $E \subset S_X$ назовем *диском*, если $aE \hat{+} bE \subset E$ для любых $0 \neq a$, $0 \neq b \in \mathbb{K}$ с $|a| + |b| \leq 1$, где $aE_1 \hat{+} bE_2 := \{aA \hat{+} bB : A \in E_1, B \in E_2\}$ для $E_1$ и $E_2 \subset S_X$, $aA \hat{+} bB := \mathrm{cl}_X\{ax + by : x \in A, y \in B\}$.

**18.5.** Определение. Подмножество $E \subset S_X$ называется *ограниченным*, если для любого уравновешенного подмножества $C_0 \in S_X$ и любой окрестности $U$ элемента $C_0$ в $(S_X, D)$ существует $r \in (0, +\infty)$ такое, что $C \in \xi U$ для всех $C \in E$ и $\xi \in \mathbb{K}$ с $|\xi| \geq r$.

**19. Предложение.** *Пусть задана последовательность* ЛВП $X_n$*, бесконечномерных над полем* $\mathbb{K}$*, такая, что* $X_n$ *являются собственными замкнутыми подпространствами в* $X_{n+1}$ *для любых* $n$*. Тогда их строгий индуктивный предел* $X = \text{str-ind}_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *не является* $\kappa$*-нормируемым и* $2^X_{bo} \setminus \{\varnothing\} = \varnothing$.

Доказательство. Предположим, что $(X, S_X)$ имеет $\kappa$-норму $\rho$ и соответствующую метрику $D$ на $S_X$. В случае полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ воспользуемся теоремой 12.1.3 из [5] и ее неархимедовым вариантом [5, § 12.111], согласно которым каждое $X_n$ является замкнутым топологическим подпространством в хаусдорфовом пространстве $X$.

Пусть $C_0$ такое же, как и в определении 18.5, и $V(\varepsilon, C_0) := \{A \in S_X : D(A, C_0) < \varepsilon\}$. Тогда из уравновешенности $C_0$ и аксиом (N2), (N6) имеем $D(\lambda, C_0) \leq |\lambda| D(A, C_0)$, следовательно, $V(\varepsilon, C_0)$ уравновешено. Если $A \in 2^X_{bo}$ и дополнительно $\varnothing \neq C_0 \in 2^X_{bo}$, $0 \in \mathrm{Int}(C_0)$, то в силу ограниченности $A$ существует $r \in (0, +\infty)$ с $\lambda A \subset C_0$ для любых $|\lambda| \leq r$, значит, $\xi A \subset V(\varepsilon, C_0)$ для любых $\xi \in \mathbb{K}$ с $0 < |\xi| < R$, где $R := \varepsilon / D(A, C_0)$. Тогда $V(\varepsilon, C_0)$ — поглощающее подмножество в $2^X_{bo}$. Для завершения доказательства сначала дадим две леммы.

**20. Лемма.** *Пусть* $M$ *— топологическое линейное подпространство в* ЛВП $X$*. Если* $U$ *является диском и окрестностью элемента* $C_0 \cap M =: B_0 \in 2^M_0$ *(см. § 18), то существует дисковая окрестность* $V \ni C_0$ *в* $2^X_0$ *такая, что* $U = V \cap 2^M_0$*. Если* $M$ *замкнуто в* $X$ *и* $C \notin U$*, то можно выбрать* $V$ *так, чтобы* $C \cap M \notin V$*.*

Доказательство. Для полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ воспользуемся теоремой 12.1.2 из [5] и ее неархимедовым вариантом из [5, § 12.111], которые утверждают, что если $M$ является топологическим векторным подпространством в ЛВП $X$, то для любой дисковой окрестности $U$ нуля в $M$ существует дисковая окрестность $V$ нуля в $X$ такая, что $U = V \cap M$; если $M$ замкнуто и $x \notin U$, то $V$ может быть выбрана так, что $x \notin V$. Из определений 18 и предыдущего обсуждения следует утверждение леммы 20.

**21. Лемма.** *Подмножество* $B \subset 2^X_0$ *ограничено тогда и только тогда, когда для любой последовательности* $(C_j : j) \subset B$ *и последовательности скаляров* $(t_j : j) \subset \mathbb{K}$ *с* $\lim_j t_j = 0$ *для любой* $U$ *из* § 18.5 *существует* $m \in \mathbb{N}$ *такое, что* $t_j C_j \in V$ *для любых* $j > m$*.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 7.1.3 из [5], которая утверждает, что если $B$ является подмножеством в ТВП $X$, то $B$ ограничено тогда и только тогда, когда для любой последовательности $(b_n)$ в $B$ и любой последовательности скаляров $(t_n)$, сходящейся к 0, последовательность $(t_n b_n)$ сходится к 0. При этом в неархимедовом случае можно взять $t_n = \zeta^n$ для $\zeta \in \mathbb{K}$ с $0 < |\zeta| < 1$ вместо $1/n$. Тогда из определений 18 получим утверждение леммы 21.

Продолжение доказательства предложения 19. Если задано $C_0$ в $X$, как в 18.5, то база выпуклых уравновешенных окрестностей $V(t_n, C_0)$ в $(S_X, D)$ счетна, где $\lim_n t_n = 0$, $|t_n| < 1$ для любого $n$. Поскольку $X_n \neq X$, в силу леммы 20 существуют $C_n \in V(t_n, C_0) \setminus X_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Согласно теореме 12.1.4(a) из [5] подмножество $B$ в $X$ ограничено тогда и только тогда, когда существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $B \subset X_k$ и $B$ ограничено в $X_k$. Поэтому если $C_0 \in 2^X_{bo}$, то $C_0$ не может быть ограничено в $X$, т. е. $\lambda C_0$ не ограничено для любого $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$. Таким образом, $2^X_{bo} \setminus \{\varnothing\} = \varnothing$.

С другой стороны, для $C_0$ из 18.5 имеем $\bigcap_n U(t_n, C_0) \supset \lambda C_0$ при $0 < |\lambda| < 1$, где $U(t, E) := \bigcup_{C \in V(t,E)} C$, поэтому существует такая неограниченная последовательность $(C_n : n)$. Это объясняется тем, что существует открытая окрестность $W$ в $(S_X, D)$ для $\lambda^2 C_0$ с $\bigcap_n V((t_n)^{k(n)}, C_0) \supset W \supset V(|\lambda|, \lambda^2 C_0) \ni \lambda^2 C_0$ и $0 < |\lambda| < 1$, где $1 < k(n) \in \mathbb{N}$, $t_n C_n \notin V((t_n)^{k(n)}, C_0)$, что возможно ввиду следствия 5, например, для поглощающих $C_0 \in 2^X_0$ с $\mathrm{Int}(C_0) \ni 0$, так как существует открытое $U \ni 0$ с $U \hat{+} \lambda^2 C_0 \subset \lambda C_0$ в силу непрерывности сложения в ЛВП $X$. Но $C_n \in V(t_j, C_0)$ при $n \geq j$ и $V(t_j, C_0)$ поглощает $C_1, \dots, C_{j-1}$, т. е. $V(t_j, C_0)$ поглощает $(C_i : i \in \mathbb{N})$. Последнее противоречит лемме 21, следовательно, $X$ не является $\kappa$-нормируемым.

**22.** Замечание. Пусть $X$ — ЛВП. Если $C_i \in S_X$, то $C_1 \hat{+} C_2 \in S_X$, так как $C_i = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_{i,n}$ в силу леммы 2 с открытыми $C_{i,n}$, причем $C_1 \hat{+} C_2 = \bigcap_{n,j} (C_{1,n} + C_{2,j})$. Очевидно, что $S_X = 2^X_0$ или $S_X = 2^X_\delta$ являются коммутативными полугруппами с нулевым по сложению элементом, равным пустому множеству $\varnothing$. На них задано отношение порядка по включению $C_i \leq F_i$, которое транзитивно, рефлексивно и симметрично, а также $C_1 \hat{+} C_2 \leq F_1 \hat{+} F_2$. При этом из $C_1 \hat{+} C_2 \leq F_1 \hat{+} C_2$ следует монотонное аннулирование (monotone cancellation) $C_1 \leq F_1$. Можно рассмотреть расширение семейства $S_X$ до $T_X := S_X \cup \{0\}$. Тогда, полагая $\rho(0, \{0\}) := 0$, получим $\rho(\lambda x, \lambda C) = |\lambda| \rho(x, C)$ для любых $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ и $C \in S_X$.

В силу теоремы 8.4.8 из [5] и ее неархимедова аналога в [5, § 8.203] (см. также [14, гл. 5]) имеем $X = (X \ominus M) \oplus M$ для любого конечномерного над локально компактным полем $\mathbb{K}$ подпространства $M$ и существует линейное непрерывное факторное отображение (проекция) $\pi : X \to \mathbb{K}e$, $\pi \circ \pi = \pi$. Если $0 \neq e \in X$ и $\mu$ — мера Хаара на $\mathbb{K}$ как аддитивной группе со значениями в $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$, то функционал $\phi(A) := \int_{A \cap \mathbb{K}e} \mu(dx) = \mu(A \cap \mathbb{K}e)$ непрерывен на $(S_X, D)$. Поскольку для любого $C_e \in S_{\mathbb{K}e}$ существует $C \in S_X$ такое, что $C = \pi^{-1}(C_e)$, $C \cap \mathbb{K}e = C_e$, то $\kappa$-норма $\rho$ индуцирует $\kappa$-нормы $\rho_e$ на $\mathbb{K}e$, $\rho_e(x, C_e) := \rho(x, C)$, $x \in \mathbb{K}e$, так как $2^X_0 \subset S_X$ и $\pi^{-1}(2^{\mathbb{K}e}_\delta) \subset 2^X_\delta$. Если $X$ задано над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то $\phi$ аддитивен на $T_X$, а для $X$ над неархимедовым полем $\mathbb{K}$ выполняется неравенство $\phi(A \hat{+} C) \leq \max(\phi(A), \phi(C))$ для любых $A, C \in T_X$, а также $\phi(\lambda C) = |\lambda|_{\mathbb{K}} \phi(C)$ для любых $\lambda \in \mathbb{K}$. Функционал $d(C) := \rho(0, C)$ субаддитивен, т. е. $d(A\hat{+}C) \leq d(A) + d(C)$ (с max вместо суммы в неархимедовом случае), а также $d(\lambda C) = |\lambda|_{\mathbb{K}} d(C)$ для любых $\lambda \in \mathbb{K}$. Семейство таких функционалов $d$, $\phi$ разделяет элементы в $T_X$. Тогда в соответствующих ситуациях применимы теоремы 2(iii) и 4 (кроме последней части) из [15].

**23.1.** Определение. Пусть заданы $\kappa$-нормированные ТВП $X$ и $Y$ с $\kappa$-нормами $\rho_X$ и $\rho_Y$ на $X \times S_X$ и $Y \times S'_Y$ соответственно, $S_Y \subset S'_Y \subset e^Y$, где $e^Y$ — семейство всех подмножеств $Y$ и (N1) для $\rho_Y$ выполнено лишь для замкнутых подмножеств $C \subset Y$ таких, что $C \in S'_Y$. *Графиком отображения* $f : X \to Y$ такого, что $f(S_X) \subset S'_Y$, называется подмножество $G(f) := \{(x, C, f(x), f(C)) : x \in X, C \in S_X\}$ в $X \times S_X \times Y \times S'_Y =: Z$. Отображение $f$ называется *замкнутым*, если $f|(X, \varnothing) : (X, \varnothing) \to (Y, \varnothing)$ $\mathbb{K}$-линейно и $G(f)$ замкнуто в $Z$ в топологии произведения, где $S_X$ и $S'_Y$, как и выше, являются метрическими пространствами с метриками $D_X$ и $D_Y$, а $X$ и $Y$ заданы над одним и тем же полем $\mathbb{K}$.

**23.2.** Определение. *Бочкой* в $X \times S_X$ называется замкнутый поглощающий диск.

**23.3.** Определение. Пространство $X \times S_X$ называется *бочечным*, если $X$ бочечно, а каждая бочка $V$ в $X \times S_X$ является окрестностью $(0, C_0)$ для некоторой бочки $C_0 \in 2^X_0$.

**23.4.** Определение. Отображение $f : (X \times S_X) \to (Y \times S'_Y)$ называется *почти непрерывным*, если $f : (X \times \{\varnothing\}) \to (Y \times \{\varnothing\})$ линейно и для любой окрестности $V \ni (0, B_0)$ в $(Y \times S'_Y) \cap f(X \times S_X)$ подмножество $\mathrm{cl}(f^{-1}(V))$ является окрестностью $(0, C_0)$ в $(X \times S_X)$ для $C_0 \in S^X$ такой, что $f((0, C_0)) = (0, B_0)$.

**24. Предложение.** *Пространство $X \times S_X$ бочечно тогда и только тогда, когда каждое отображение $f : X \times S_X \to Y \times S_Y$, линейное на $X \times \varnothing$, является почти непрерывным, где $X$ и $Y$ — это* ЛВП *над $\mathbb{K}$.*

Доказательство. Пусть $X \times S_X$ бочечно. В силу линейности $f$ имеем $f^{-1}(aA + bB) = f^{-1}(A) + f^{-1}(B)$ для любых $A, B \in S_Y$. Если $V$ является бочкой в $Y \times S_Y$, то $\mathrm{cl}(f^{-1}(V))$ — бочка в $X \times S_X$, так как $\mathrm{cl}(f^{-1}(C_0, \varnothing))$ — бочка в $X \times \varnothing$ для бочки $C_0$ в $Y \times \varnothing$, следовательно, $f$ почти непрерывно. Обратное утверждение вытекает из рассмотрения тождественного отображения на $X \times S_X$.

**25. Теорема.** *Пусть $(X, S_X, \rho_X)$ и $(Y, S'_Y, \rho_Y)$ — два $\kappa$-нормированных пространства над полем $\mathbb{K}$, причем $Y$ полно и метризуемо* (*см. п.* 23). *Тогда каждое замкнутое почти открытое линейное отображение $f : X \times S_X \to Y \times S_Y$ является непрерывным.*

Доказательство. Подпространство $X \times \{\varnothing\}$ замкнуто в $X \times S_X$, следовательно, $G(f) \cap Z$ замкнуто в $Z$, где $Z = X \times \{\varnothing\} \times Y \times \{\varnothing\}$. Теорема 14.3.4 из [5] утверждает, что отображение $f|(X \times \{\varnothing\})$ непрерывно. После этого рассмотрим ограничение $f|(\{0\} \times S_X)$. В силу аксиомы (N7) и метризуемости $Y$ можно ограничиться случаем $0 \in B_0$ для уравновешенных $B_0$ из $S_Y$ с $f^{-1}(B_0) \in S_X$ и взять базу канонических замкнутых уравновешенных окрестностей $V_i$ нуля в $Y$ и окрестностей $W_{i,n} := \{C \in S_Y : D_Y(B_0 \hat{+} V_i, C) \leq 2^{-n}\}$, где $V_{i+1} \hat{+} V_{i+1} \subset V_i$ для любых $i \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $W_{i+1,n} \hat{+} W_{i+1,n} \subset W_{i,n}$, $D_Y(B_0, B_0 \hat{+} V_i) < 2^{-i}$ (с помощью следствия 5). Тогда существуют открытые окрестности $U_{i,n} \subset \mathrm{cl}(f^{-1}(W_{i,n}))$ в $\{0\} \times S_X$. Ввиду непрерывности $f|(X \times \{\varnothing\})$ и леммы 2 выполняются включения $f^{-1}(\{0\} \times 2^Y_0) \subset \{0\} \times 2^X_0$ и $f^{-1}(\{0\} \times 2^Y_\delta) \subset \{0\} \times 2^X_\delta$, $f^{-1}(B_0 \hat{+} V_i) = f^{-1}(B_0) \hat{+} f^{-1}(V_i)$. Рассмотрим пополнение $\widetilde{X}$ пространства $X$. Тогда в силу непрерывности и линейности $f|(X \times \{\varnothing\})$ существует непрерывное линейное продолжение $\tilde{f}$ на $\widetilde{X} \times \{\varnothing\}$, причем $G(\tilde{f})$ замкнут в $\widetilde{X} \times \{\varnothing\} \times Y \times \{\varnothing\}$. Из равномерной непрерывности $\rho_Y(f(x), f(C))$ по $x \in X$ для любого фиксированного элемента $C \in S_X$, а также следствий 3, 4 и леммы 8 следует, что $f^{-1}(W_{i,n})$ замкнуты.

Согласно теореме 14.4.4(a) из [5] отображение $\tilde{f} : X \times \{\varnothing\} \to Y_1 \times \{\varnothing\}$ открыто, где $Y_1 \times \{\varnothing\} = \tilde{f}(X \times \{\varnothing\})$, так как $\widetilde{X}$, а с ним и его непрерывный образ $Y_1$ суть полные бэровские ЛВП. Следовательно, $\widetilde{X}/N$ и $Y_1$ изоморфны как ТВП, где $N \times \{\varnothing\} = \tilde{f}^{-1}(\{0\} \times \{\varnothing\})$ замкнуто в $X \times \{\varnothing\}$. Тогда $\tilde{f}^{-1}(W_{i,n})$ изоморфно $W_{i,n} \hat{+} N = \{E \hat{+} N : E \in W_{i,n}\}$ и $\tilde{f}^{-1}(W_{i,n}) \cap (X \times S_X) = f^{-1}(W_{i,n})$.

**26. Следствие.** *Пусть $f : X \times S_X \to Y \times S'_Y$ является замкнутым отображением и его ограничение на $X \times \varnothing$ линейно, где $(X \times S_X)$ и $(Y \times S'_Y)$ — это $\kappa$-нормированные* ТВП, *причем $Y$ полно и метризуемо.*

(a) *Если $X$ — бэровское* ТВП, *то $f$ непрерывно.*

(b) *Если $X$ и $Y$* — ЛВП, *а $X$ бочечно, то $f$ непрерывно.*

Доказательство. Утверждение следствия вытекает из предложения 24 и теоремы 25, а также теоремы 14.3.3 из [5], так как каждое линейное отображение из бэровского ТВП $X$ в ТВП $Y$ почти непрерывно.

**27. Теорема.** *Пусть $(X, S_X)$ и $(Y, S_Y)$ — $\kappa$-нормированные* ТВП, *$X$ полно и метризуемо, $f : X \times S_X \to Y \times S_Y$ — замкнутое отображение, линейное на $X \times \{\varnothing\}$, $f(X \times S_X) = (Y \times S_Y)$. Тогда $f$ является открытым отображением.*

Доказательство. Рассмотрим $f|(X \times \{\varnothing\})$. Теорема 14.4.1 из [5] утверждает, что каждое замкнутое почти открытое линейное отображение $A$ полного псевдометризуемого ТВП $X$ на ТВП $Y$ представляет собой открытое отображение. Из доказательства теоремы 25 следует, что такое ограничение отображения $f$ является открытым. Пусть $N = f^{-1}(\{0\} \times \{\varnothing\})$. Тогда $N$ замкнуто в $X \times \{\varnothing\}$ и имеется факторное отображение $\pi : X \times \{\varnothing\} \to (X \times \{\varnothing\})/N =: M$, которое индуцирует отображение $\dot{f} : M \times S_M \to Y \times S_Y$, причем $\pi^{-1}(S_M) = S_X$. Пространство $M$ полно и метризуемо, следовательно, $\dot{f}$ — замкнутое отображение, причем график $G(\dot{f}^{-1})$ замкнут. В силу теоремы 25 отображение $\dot{f}$ является открытым, а значит, и $f$ тоже открыто.

**28.** Определение. Пусть заданы равномерные $\kappa$-метрические пространства $(X, S_X)$ (и $(Y, S_Y)$) с равномерно непрерывными по $x \in X$ (и $y \in Y$) $\kappa$-метриками $\rho_X(x, C)$ (и $\rho_Y(y, C)$) для любого фиксированного $C \in S_X$ (и $C \in S_Y$ соответственно). Отображение $h : X \to Y$ называется *нерастягивающим*, если оно удовлетворяет условиям

(S1) $h$ равномерно непрерывно;

(S2) $h(S_X) \subset S_Y$;

(S3) $\rho_Y(h(x), h(C)) \le \rho_X(x, C)$ для любых $x \in X$ и $C \in S_X$.

В случае $\kappa$-нормированных пространств дополнительно потребуем от нерастягивающего $h$ выполнения еще одного условия:

(S4) $h$ линейно.

*Свободным* $\kappa$-нормированным пространством $(M, S_M)$ называется свободное ЛВП $M = M(X, \mathbb{K})$ с $\kappa$-нормой $\rho_M(x, A)$ такой, что для любого $\kappa$-нормированного ЛВП $F$ над полем $\mathbb{K}$ и нерастягивающего отображения $h : X \to F$ (т. е. $h$ удовлетворяет условиям (S1)–(S3)) существует нерастягивающее отображение $H : M \to F$, причем ограничение $H|w(X)$ равно $h \circ w^{-1}$, где $w : X \to M$ — вложение (см. также введение и п. 1), $\rho_X \le 1$, $\{\rho_X(x, C) : x \in X, C \in S_X\} \subset \widetilde{\Gamma}_{\mathbb{K}} := \{|b|_{\mathbb{K}} : b \in \mathbb{K}\}$, $\mathbb{K}$ — полное поле.

**29. Теорема.** *Пусть* $(X, S_X, \rho_X)$ *является* $\kappa$*-метрическим пространством, как в п.* 28. *Тогда для него существует свободное* $\kappa$*-нормированное пространство* $M$*, единственное с точностью до линейного топологического изоморфизма, сохраняющего* $\kappa$*-нормы.*

Доказательство. Пусть $M(X, \mathbb{K})$ — свободное ЛВП (см. введение), порожденное $X$. Рассмотрим семейство $\mathscr{B}$ замкнутых подмножеств в $M(X, \mathbb{K})$ таких, что каждое $A \in \mathscr{B}$ является объединением $A = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$ конечного числа множеств $A_j$, которые попарно не пересекаются и имеют вид $A_j = a_j + B_j$, где $B_j = \mathrm{cl}_M C_j$, $C_j = \sum_{l=1}^{k(j)} r_{j,l} J(D_{j,l})$. Пусть $r_{j,l} > 0$ для полей $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $r_{j,l} \in \mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ для неархимедовых полей $\mathbb{K}$, где множества $J(D_{j,l})$ абсолютно выпуклы, $D_{j,l} \in S_X$, $J(D_{j,l}) = \mathrm{cl}(\mathrm{ac}[w(D_{j,l})])$, $w$ — вложение $X$ в $M(X, \mathbb{K})$, $\mathrm{ac}(E) := \left\{x : x \in M(X, \mathbb{K}),\ x = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i,\ b_i \in \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^{n} |b_i| \leq 1,\ x_i \in E,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ обозначает абсолютно выпуклую оболочку множества $E$, $a_j \in M(X, \mathbb{K})$, $a_j = \sum_{l=1}^{n(j)} t_{j,l} b_{j,l}$, $t_{j,l} \in \mathbb{K}$, $b_{j,l} = w(z_{j,l})$, $z_{j,l} \in X$, $n(j) \in \mathbb{N}$. Отсюда вытекает, что каждое такое $A \in \mathscr{B}$ является замкнутым и локально выпуклым множеством (т. е. для любого $x \in A$ существует окрестность $U \ni x$ в $M$ такая, что $((U \cap A) - y)$ выпукло в $M$ для соответствующего $y \in A$), причем $B_j \ni 0$ для каждого $j = 1, \ldots, n$.

Теперь рассмотрим нерастягивающие функции $f$ относительно $\kappa$-метрики $\rho_X$, т. е. функции $f : M(X, \mathbb{K}) \times \mathscr{B} \to \mathbb{K}$, удовлетворяющие следующим условиям:

(A1) $|f(x, A)| \leq \rho_X(y, D)$ при $x = w(y)$, $A = J(D)$, $D \in S_X$, $y \in X$;

(A2) $|f(x, E)| \leq |f(x, C)|$ для любых $E \supset C$;

(A3) $f(x, A)$ равномерно непрерывна по $x \in M(X, \mathbb{K})$ при любом фиксированном $A$;

(A4) $|f((x, A) \dot{+} (z, E))| \leq |f(x, A)| + |f(z, S)|$, здесь $(x, A) \dot{+} (z, E) := (x + z, A \hat{+} E)$ для $A$, $E$ и $A \hat{+} E \in \mathscr{B}$, $x$ и $z \in M(X, \mathbb{K})$;

(A5) $|f(x, A)| \leq |f(x, E)| + \sup_{z \in E} |f(z, A)|$ (с max вместо суммы в правых частях неравенств (A4), (A5) в неархимедовом случае);

(A6) $|f(bx, bA)| = |b| \times |f(x, A)|$ для любых $b \in \mathbb{K}$;

(A7) $f(x, A - z) = f(x + z, A)$ для любых $x$ и $z \in M(X, \mathbb{K})$.

Из (A2) вытекает неравенство $|f(x_1 - x_2, J(E))| \leq p_E(y_1, y_2)$ для любых $x_i = w(y_i)$, $y_i \in X$, где $p_E(y_1, y_2) := |\rho_X(y_1, E) - \rho_X(y_2, E)|$. Семейство всех таких функций обозначим через $\mathscr{F}$ и по определению положим $\mathrm{ac}(\varnothing) = \varnothing$, $\mathrm{sp}_{\mathbb{K}}(\varnothing) = \varnothing$, где $\mathrm{sp}_{\mathbb{K}} E := \left\{x : x = \sum_{i=1}^{n} h_i x_i, x_i \in E, h_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Докажем, что семейство $\mathscr{F}$ непусто и для любого $x \in X$ существует $f \in \mathscr{F}$ такое, что $f(y, A) = \rho_X(x, E)$, где $y = w(x)$, $A = J(E)$, $E \in S_X$. Для этого можно задать

$$f(y, A) = f_E(y, A)$$
$$:= \max\left(0, \left\{\left|\sum_{i=1}^{n} q_i \rho_X(x_i, E) - \sum_{j,l} t_{j,l} \rho(z_{j,l}, E)\right| - \sum_{j,l} |r_{j,l}|_{\mathbb{K}} \bar{\rho}(D_{j,l}, E)\right\}\right), \quad (1)$$

где $y = \sum_{i=1}^{n} q_i y_i$, $y_i = w(x_i)$, $x_i \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Линейная функция

$$g(y) := \sum_i q_i \rho_X(x_i, E)$$

является линейным продолжением функции $g(y) := \rho_X(w^{-1}(y), E)$, которая равномерно непрерывна в силу определения топологии на $M$. Отсюда вытекают (A1), (A3). Поскольку $\rho_X(x, E) \le \rho_X(y, D) + \bar{\rho}_X(D, E)$, то выполняется (A5) (с max вместо суммы в неархимедовом случае). Для любого $J(D_{j,l})$ и $b \in \mathbb{K}^*$ выполняется равенство $bJ(D_{j,l}) = J(bD_{j,l})$ и из формулы (1) следует (A6). Условие (A4) вытекает из того, что $r_1 J(D_1) \hat{+} r_2 J(D_2) \subset (r_1 + r_2) J(\mathrm{cl}(D_1 \cup D_2))$, и неравенства $(|r_1| + |r_2|)\bar{\rho}_X(\mathrm{cl}(D_1 \cup D_2), E) \ge |r_1|\bar{\rho}_X(D_1, E) + |r_2|\bar{\rho}_X(D_2, E)$ (с max вместо суммы в правой части в неархимедовом случае), так как $\bar{\rho}(\mathrm{cl}(D_1 \cup D_2), E) \ge \bar{\rho}_X(D_i, E)$, где $|r_i| > 0$, $D_i \in S_X$. Условия (A2), (A7) следуют из формулы (1) и определения семейства $\mathscr{B}$.

После этого можно задать неотрицательную функцию на $M \times S_M$:

$$\eta(y, A) := \inf_{E \subset A, E \in \mathscr{B}} \beta(y, E), \tag{2}$$

где

$$\beta(y, E) := \sup_{f \in \mathscr{F}} |f(x, E)| \tag{3}$$

для любых $y \in M$ и $E \in \mathscr{B}$, $S_M = 2^M_0$ для $S_X = 2^X_0$, $S_M = 2^M_\delta$ для $S_X = 2^X_\delta$. Можно проверить, что $\beta$ удовлетворяет условиям (N1)–(N8) для $\mathscr{B}$ вместо $S_M$. Так, из (A2) следует (N2), из (A4), (A5) следует неравенство регулярности в (N5), (A6)$\Rightarrow$(N6), (A7)$\Rightarrow$(N7). Пусть $x \in A$. Тогда существует $j$ такое, что $x - a_j \in B_j$, $A - a_j \supset B_j$, (N2), (N7)$\Rightarrow$ $\beta(x, A) \le \beta(x - a_j, B_j)$. Вектор $z = x - a_j$ можно записать в виде $z = \sum_l r_{j,l} z_l$ с $z_l \in J(D_{j,l})$, $r_{j,l} \in \mathbb{K}$. В силу (A1), (A2), (A4), (A6) получим $\beta(x, A) = 0$, так как $\rho_X(x, D) = 0$ при $x \in D$, поэтому (A5)$\Rightarrow$(N5). Для любой возрастающей трансфинитной последовательности $A_\alpha \in \mathscr{B}$ с $\mathrm{cl}_M \bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathscr{B}$ из условий (3), (N2), (A2) следует условие (N4). Функция $|\rho_X(x_1, E) - \rho_X(x_2, E)| =: p_E(y_1 - y_2)$ равномерно непрерывна на $w(X)$, следовательно, является псевдометрикой и в силу определения равномерности на $M$ продолжается до преднормы $\bar{p}_E(z)$ на $M$, где $y_i = w(x_i)$. Пусть $E^1 \hat{+} E^2 \subset A^1 \cap A^2$ с $A^i$ и $E^i \in \mathscr{B}$ с $E^i = a^i + r^i J(D^i)$, $D^i \in S_X$, $r^i > 0$ в случае полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $r^i \in \mathbb{K}^*$ для неархимедовых полей, $a^i \in \mathrm{sp}_\mathbb{K}\, w(X)$. Тогда из (N5) следует неравенство

$$|\beta(y + s, A^1) - \beta(z + s, A^2)| \le \beta(y - z, E^1) + \beta(z - y, E^2). \tag{4}$$

В силу (A1)–(A7) и формулы (3) существуют преднормы $\bar{p}_{D^i}$ на $M$ такие, что $\beta(y, E^i) \le \bar{p}_{D^i}(y - a^i)$ на $\mathrm{sp}_\mathbb{K}\, w(X)$, следовательно, $\beta(y, A)$ имеет равномерно непрерывное продолжение по $y$ на $M$ для любого $A \in \mathscr{B}$, так как в силу (N7) достаточно взять $a^1 = a^2$.

В силу (A1), (A2), (A4), (A6) существует $E \in S_X$ такое, что выполняется неравенство $|f(y, A)| \le \sum_i |q_i| \rho_X(x_i, E) + \sum_{j,l} |t_{j,l}| \rho_X(z_{j,l}, E)$. При этом существует $f \in \mathscr{F}$ такая, что $|f(w(x), J(E))| = \rho_X(x, E)$ и в силу (A2) выполняется равенство $\beta(w(x), J(E)) = \rho_X(x, E)$, следовательно,

$$\eta(w(x), J(E)) = \rho_X(x, E). \tag{5}$$

ЛВП $M$ согласно определению является проективным пределом $M = \text{pr-}\lim\limits_{d\in\mathbf{P}} B(X_d, \mathbb{K})$ соответствующих свободных банаховых пространств $B(X_d, \mathbb{K})$, порожденных метрическими пространствами $X_d := X/R_d$, где $R_d$ — отношение эквивалентности на $X$ такое, что $xR_dy$ эквивалентно равенству $d(x, y) = 0$, $d \in \mathbf{P}$, $\mathbf{P}$ — семейство всех псевдометрик на $X$, задающих исходную равномерность, $X = \text{pr-}\lim\limits_{d\in\mathbf{P}} X_d$. Норма в $\mathrm{sp}_{\mathbb{K}} X_d$ задается формулой $\|y\| := \sup\limits_{g\in G} |g(y)|$, а затем рассматривается пополнение, дающее $B(X_d, \mathbb{K})$, где $G$ — семейство нерастягивающих функций $g : \mathrm{sp}_{\mathbb{K}} X_d \to \mathbb{K}$, т. е. линейных и удовлетворяющих условию $|g(v(x_1), v(x_2))| \le d(x_1, x_2)$ при любых $x_i \in X_d$ и $|g(z)| \le 1$ для отмеченной точки $z \in X_d$, $v : X_d \to \mathrm{sp}_{\mathbb{K}} X_d$ — вложение. Пусть $\pi_d : X \to X_d$ и $\bar{\pi}_d : M(X, \mathbb{K}) \to B(X_d, \mathbb{K})$ являются факторными отображениями, порожденными $R_d$, а $C_d \in 2^{X_d}_{\delta}$. Тогда $(\bar{\pi}_d)^{-1}(J(C_d)) = J((\pi_d)^{-1}(C_d)) \in 2^M_{\delta}$, так как $B(C_d, \mathbb{K})$ — банахово подпространство в $B(X_d, \mathbb{K})$ и $M((\bar{\pi}_d)^{-1}(C_d), \mathbb{K})$ — $G_\delta$-подмножество в $M(X, \mathbb{K})$. В самом деле, $B(C_d, \mathbb{K})$ полно по Чеху, $\bigcup\limits_n \lambda_n J(C_d) = B(C_d, \mathbb{K})$, когда $\lim\limits_n |\lambda_n| = \infty$, следовательно, $\mathrm{Int}_{B(C_d,\mathbb{K})}(J(C_d)) \ni 0$ в силу теоремы 3.9.3 из [13] и того, что вложение $v : X_d \to B(X_d, \mathbb{K})$ является изометричным (см. [9, 10]).

При рассмотрении $(\eta, S_M)$ вместо $(\beta, \mathscr{B})$ выполнение условий (N1), (N2), (N5), (N6)–(N8) очевидно. Тогда из условий (2), (4) и (N7) следует, что $|\eta(y, C) - \eta(z, C)| \le \bar{p}_{D^1}(y - z) + \bar{p}_{D^2}(z - y)$ для любых $C \in S_M$, $y$, $z \in M$, т. е. $\eta(y, C)$ — равномерно непрерывная функция по $y \in M$. Очевидно, что $\eta(y, A) \ge 0$, и если $y \in A$, то $\eta(y, A) = 0$ в силу (N2), (N7), (N8). Если $y \notin A$, то существует $E \in S_X$ и $f_E \in \mathscr{F}$ с $f_E(y, A) \ne 0$, поэтому $\eta(y, A) > 0$, так как $X$ и $M$ вполне регулярны и выполняется условие (A7). При этом достаточно рассмотреть $y + z \notin z + A$, $A' = z + A \ni 0$ и $y + z \notin E$. Таким образом, в качестве $\kappa$-нормы $\rho_M$ на $(M, S_M)$ можно взять $\eta$.

Свободное ЛВП $M$ единственно с точностью до линейного топологического изоморфизма, при этом каждый гомеоморфизм $h : (X, S_X) \to (Y, S_Y)$, сохраняющий $\kappa$-метрики, продолжается до линейного топологического изоморфизма $H : M(X, \mathbb{K}) \to M(Y, \mathbb{K})$. Из равенства $\rho_X(x, C) = \rho_Y(h(x), h(C))$ рассмотрением семейства $\mathscr{F}$ на $(M(X, \mathbb{K}), \mathscr{B})$ и $\mathscr{F} \circ h^{-1}$ на $(M(Y, \mathbb{K}), \mathscr{B}_Y)$ выводится равенство $\rho_{M(X,\mathbb{K})}(y, E) = \rho_{M(Y,\mathbb{K})}(H(y), H(E))$ на $(M(X, \mathbb{K}), S_M)$.

**30. Теорема.** *Для любого $\kappa$-нормируемого* ЛВП $X$ *над полным полем* $\mathbb{K}$ *существует замкнутое $\mathbb{K}$-линейное подпространство $N$ в свободном $\kappa$-нормированном пространстве $(M(X, \mathbb{K}), S_M)$ такое, что $X$ изоморфно $\kappa$-нормированному фактор-пространству $X = M(X, \mathbb{K})/N$.*

Доказательство. В силу теоремы 6 фактор-пространство является $\kappa$-нормированным, а свободное $\kappa$-нормированное пространство $(M, S_M)$ существует ввиду теоремы 29, причем $\rho_M(w(x), J(C)) = \rho_X(x, C)$ для любых $x \in X$, $C \in S_X$. Если $I : X \to X$ — тождественное отображение, то оно продолжается до нерастягивающего $I_M : M \to X$ относительно соответствующих $\kappa$-метрик (см. п. 29). При этом $I_M$ — открытое отображение. В силу предложения 2.4.3 из [13] $I_M$ является факторным отображением, где $N = \ker(I_M)$.

Из [16] и теоремы 29 можно легко вывести следующий результат.

**31. Теорема.** *Класс объектов $\mathscr{U}$, состоящий из $\kappa$-метрических пространств $X \in \mathscr{U}$, и семейство морфизмов $\{\mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(X, Y) : X, Y \in \mathscr{U}\}$, где в качестве морфизмов берутся нерастягивающие отображения (см. п. 28), образуют категорию $\mathscr{M}$. Класс объектов $\mathscr{B}$, состоящий из $\kappa$-нормированных пространств $(X, S_X)$*

*над полным полем $\mathbb{K}$, и семейство морфизмов $\{\mathrm{Hom}_{\mathscr{N}}(X, Y) : X, Y \in \mathscr{B}\}$, где в качестве морфизмов берутся нерастягивающие отображения, образуют категорию $\mathscr{N}$ (ее полной подкатегорией $\mathscr{N}_f$ является категория, состоящая из класса $\mathscr{B}_f$ свободных $\kappa$-нормированных пространств с аналогичными морфизмами). Более того, существует унивалентный полный ковариантный функтор из категории $\mathscr{M}$ в категорию $\mathscr{N}_f$.*

## ЛИТЕРАТУРА


**1.** *Щепин Е. В.* Топология предельных пространств несчетных обратных спектров // Успехи мат. наук. 1976. Т. 31, № 5. С. 191–226.

**2.** *Щепин Е. В.* О $\kappa$-метризуемых пространствах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1979. Т. 43, № 2. С. 442–477.

**3.** *Людковский С. В.* Топологические группы и их $\kappa$-метрики // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 1. С. 173–174.

**4.** *Attouch H., Lucchetti R., Wets R. J.-B.* The topology of the $\rho$-Hausdorff distance // Ann. Mat. Pura Appl. 1991. V. 160. P. 303–320.

**5.** *Narici L., Beckenstein E.* Topological vector spaces. New York: Marcel-Dekker Inc., 1985.

**6.** *Telci M., Tas K.* Some fixed point theorems on an arbitrary metric space // Math. Balkanica (N. S.) 1992. V. 6, N 3. P. 251–255.

**7.** *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.

**8.** *Wlodarczyk K.* Existence and uniqueness of fixed points of compact maps in bounded domains of real and complex Banach spaces // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. 1993. V. 41. P. 103–107.

**9.** *Людковский С. В.* Свободные локально выпуклые пространства и их изоморфизмы // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 6. С. 207–208.

**10.** *Людковский С. В.* Неархимедовы свободные банаховы пространства // Фунд. прикл. мат. 1995. Т. 1. С. 979–987.

**11.** *Пестов В. Г.* Свободные банаховы пространства и представления топологических групп // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20, № 1. С. 81–82.

**12.** *Райков Д. А.* Свободные локально выпуклые пространства // Мат. сб. 1964. Т. 63, № 4. С. 582–590.

**13.** *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.

**14.** *Rooij A. C. M. van.* Non-Archimedean functional analysis. New York: Marcel Dekker inc., 1978.

**15.** *Topsoe F.* The naive approach to the Hahn — Banach theorem // Comment. Math. 1978. V. 21. P. 315–330.

**16.** *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов. М.: Мир, 1972.


*Статья поступила 27 ноября 1997 г.*

*г. Москва*