Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2000. Том 41, № 1

УДК 517.54

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИСКАЖЕНИЕМ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Н. С. Даирбеков

Аннотация: Доказано, что отображения с ограниченным искажением (квазирегулярные отображения) на группе Гейзенберга являются открытыми и дискретными, обладают свойствами $\mathscr{N}$ и $\mathscr{N}^{-1}$ и для них верна формула замены переменных в интеграле Лебега. Установлен аналог теоремы Лиувилля для отображений с искажением 1. Библиогр. 8.

1. Предварительные сведения

В настоящей работе мы продолжаем изучение отображений с ограниченным искажением (квазирегулярных отображений) на группе Гейзенберга, введенных в [1]. В частности, мы доказываем, что отображения с ограниченным искажением являются открытыми, дискретными и сохраняют ориентацию. Среди других результатов отметим выполнение свойств $\mathscr{N}$ и $\mathscr{N}^{-1}$ для отображений с ограниченным искажением, формулу замены переменных в интеграле Лебега и аналог теоремы Лиувилля об отображениях с искажением 1.

Группа Гейзенберга $\mathbb{H}$ является простейшей неабелевой стратифицированной нильпотентной группой (группой Карно). В нашей модели элементами группы $\mathbb{H}$ являются точки $q = (x, y, t) \in \mathbb{R}^3$, а умножение задается по правилу

$$(x, y, t)(x', y', t') = (x + x', y + y', t + t' + 2x'y - 2xy').$$

Элементы $p = (x, y, t) \in \mathbb{H}$ снабжены *однородной нормой*

$$|p| = ((x^2 + y^2)^2 + t^2)^{1/4}. \tag{1.1}$$

Однородная норма (1.1) порождает *однородную метрику* на $\mathbb{H}$ по формуле

$$\rho(p, q) = |p^{-1}q|.$$

Шар $\{\, p \in \mathbb{H} \mid |p^{-1}q| < R \,\}$ в однородной метрике с центром $q \in \mathbb{H}$ и радиусом $R > 0$ обозначается через $B_R(q)$.

Мы обозначаем через δ_r, $r > 0$, *однородное растяжение* на $\mathbb{H}$:

$$\delta_r(x, y, t) = (rx, ry, r^2 t), \quad (x, y, t) \in \mathbb{H}.$$

Результат растяжения часто записывается следующим образом:

$$\delta_r(q) = rq, \quad \delta_{1/r}(q) = q/r.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–01092, 96–01–01769).

Напомним, что δ_r является гомоморфизмом группы Ли $\mathbb{H}$, причем для однородной нормы (1.1) имеем $|\delta_r(q)| = r|q|$.

Мера Лебега на $\mathbb{R}^3$ является биинвариантной мерой Хаара на $\mathbb{H}$. Мера множества $A \subset \mathbb{H}$ относительно этой меры обозначается через $|A|$. Пространство функций, суммируемых в степени s, $1 \le s < \infty$, на A, обозначается через $L^s(A)$ и снабжено нормой

$$\|u\|_{s,A} = \Bigg(\int\limits_A |u(q)|^s \, dq \Bigg)^{1/s}.$$

Пространство функций, локально суммируемых в степени s на A, обозначается через $L^s_{\mathrm{loc}}(A)$.

Базис левоинвариантных векторных полей на $\mathbb{H}$ состоит из векторов

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial t}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} - 2x\frac{\partial}{\partial t}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t},$$

между которыми имеется единственное нетривиальное коммутационное соотношение $[X, Y] = -4T$.

Дифференциальные формы

$$dx, \quad dy, \quad \tau = 2x\,dy - 2y\,dx + dt$$

задают базис кокасательного расслоения $T'\mathbb{H}$, двойственный базису X, Y, T над каждой точкой $q = (x, y, t) \in \mathbb{H}$.

Горизонтальное касательное пространство HT ($= HT\mathbb{H}$) группы $\mathbb{H}$ натянуто на X, Y, и слои HT снабжены скалярным произведением, в котором векторы $X(q)$ и $Y(q)$ составляют ортонормированный базис над каждой точкой $q \in \mathbb{H}$. Вектор V является горизонтальным тогда и только тогда, когда $\tau(V) = 0$.

Горизонтальное соболевское пространство $HW^{1,s}(U)$ ($HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$), где U — открытое множество в $\mathbb{H}$ и $1 \le s < \infty$, определяется следующим образом: функция $u : U \to \mathbb{R}$ принадлежит пространству $HW^{1,s}(U)$ ($HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$), если $u \in L^s(U)$ и слабые производные Xu, Yu принадлежат $L^s(U)$ ($u, Xu, Yu \in L^s_{\mathrm{loc}}(U)$).

Горизонтальный градиент функции $u \in HW^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U)$ определен почти всюду в U и равен

$$\nabla u(q) = (Xu(q), Yu(q)).$$

Будем говорить, что отображение $f : U \to \mathbb{H}$, $f = (f_1, f_2, f_3)$, *принадлежит классу* $HW^{1,s}(U)$ ($HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$), если каждая компонента f_i, $i = 1, 2, 3$, отображения f принадлежит $HW^{1,s}(U)$ ($HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$). Для такого отображения f почти всюду в U определены векторы

$$Xf(q) = \begin{pmatrix} Xf_1(q) \\ Xf_2(q) \\ Xf_3(q) \end{pmatrix}, \quad Yf(q) = \begin{pmatrix} Yf_1(q) \\ Yf_2(q) \\ Yf_3(q) \end{pmatrix}.$$

Векторы $Xf(q)$ и $Yf(q)$ рассматриваются как касательные векторы над точкой $f(q)$: $Xf(q), Yf(q) \in T_{f(q)}\mathbb{H}$.

1.1. Определение. Пусть $f : U \to \mathbb{H}$ — отображение класса $HW^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U)$ открытого множества $U \subset \mathbb{H}$. Мы называем f (*слабо*) *контактным*, если $Xf(q), Yf(q) \in HT_{f(q)}$ для почти всех точек $q \in U$.

Отображение $f : U \to \mathbb{H}$ класса $HW^{1,1}_{\text{loc}}(U)$ является контактным тогда и только тогда, когда

$$\tau(Xf(q)) = 0, \quad \tau(Yf(q)) = 0$$

для почти всех $q \in U$. Эти равенства в развернутом виде выглядят следующим образом:

$$2f_1(q)Xf_2(q) - 2f_2(q)Xf_1(q) + Xf_3(q) = 0,$$
$$2f_1(q)Yf_2(q) - 2f_2(q)Yf_1(q) + Yf_3(q) = 0.$$

Для контактного отображения f почти всюду в U определен (*формальный*) *горизонтальный дифференциал* $Hf_*(q) : HT_q \to HT_{f(q)}$, причем

$$Hf_*(q)X = Xf(q) \in HT_{f(q)}, \quad Hf_*(q)Y = Yf(q) \in HT_{f(q)}.$$

Матрица формального горизонтального дифференциала имеет вид

$$Hf_* = \begin{pmatrix} Xf_1 & Yf_1 \\ Xf_2 & Yf_2 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель называется *горизонтальным якобианом* отображения f и обозначается через $HJ(q, f)$. Отображение $Hf_*(q)$, определенное на горизонтальном подпространстве, единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебры Ли группы $\mathbb{H}$. Этот гомоморфизм называется *формальным $\mathscr{P}$-дифференциалом* отображения f и имеет матрицу вида

$$f_*(q) = \begin{pmatrix} Hf_*(q) & 0 \\ 0 & HJ(q, f) \end{pmatrix}.$$

Якобиан $J(q, f)$ контактного отображения f — это определитель матрицы $f_*(q)$. Очевидно, что $J(q, f) = (HJ(q, f))^2$.

Следующее определение введено в [1] и является основным в настоящей работе.

1.2. Определение. Отображение $f : U \to \mathbb{H}$ открытого множества $U \subset \mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$ называется *отображением с ограниченным искажением* (*квазирегулярным отображением*), если

(a) f непрерывно,
(b) $f \in HW^{1,4}_{\text{loc}}(U)$,
(c) f — контактное отображение,
(d) существует постоянная $K < \infty$ такая, что неравенство

$$\|Hf_*(q)\|^4 \le KJ(q, f) \tag{1.2}$$

выполняется почти всюду в U. Здесь

$$\|Hf_*(q)\| = \max_{\xi \in HT_q, |\xi|=1} |Hf_*(q)\xi|$$

— операторная норма линейного отображения $Hf_*(q)$.

Наименьшая постоянная K в неравенстве (1.2) называется *коэффициентом искажения* отображения f и обозначается через $K(f)$. Если $K(f) \le K$, то f называется *отображением с искажением* K или K-*квазирегулярным отображением.*

2. Субэллиптические уравнения, ассоциированные с отображениями с ограниченным искажением

Одним из главных моментов при изучении отображений с ограниченным искажением евклидовых пространств является свойство морфизма решений ассоциированных квазилинейных эллиптических уравнений, открытое Ю. Г. Решетняком, который также продемонстрировал фундаментальное значение свойства морфизма в теории отображений с ограниченным искажением (см. [2]). Соответствующий результат для отображений с ограниченным искажением на группе Гейзенберга установлен в [1].

Пусть $f : U \to \mathbb{H}$ — отображение с ограниченным искажением. Определим в U матричную функцию $\theta = \theta_f$, полагая

$$\theta(q) = J(q,f)^{1/2}(Hf_*(q))^{-1}(Hf_*(q))^{-1^T},$$

если $J(q,f) \neq 0$ (заметим, что в этом случае матрица $Hf_*(q)$ невырожденная), и $\theta(q) = \mathrm{Id}$ (тождественная матрица), если $J(q,f) = 0$. Также обозначим через $\theta(q)$ соответствующее линейное отображение горизонтального касательного пространства HT_q в себя.

Определим *ассоциированное ядро* $\mathscr{A}(q,\xi) = \mathscr{A}_f(q,\xi)$, полагая

$$\mathscr{A}(q,\xi) = \langle \theta(q)\xi, \xi \rangle \theta(q)\xi.$$

Нетрудно проверить, что $\mathscr{A}(q,\xi)$ удовлетворяет всем условиям, налагаемым на ядро в [3].

Функция $u : U \to \mathbb{R}$ класса $HW^{1,4}_{\mathrm{loc}}(U)$ называется *слабым решением* уравнения

$$\operatorname{div} \mathscr{A}(q, \nabla u) = 0,$$

если

$$\int\limits_U \mathscr{A}(q, \nabla u(q)) \cdot \nabla \varphi(q) = 0$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(U)$.

Следующее утверждение из [1] устанавливает свойство морфизма решений ассоциированных субэллиптических уравнений для отображений с ограниченным искажением.

2.1. Предложение. *Пусть $f : U \to V$ — отображение с ограниченным искажением открытого множества $U \subset \mathbb{H}$ в открытое множество $V \subset \mathbb{H}$. Предположим, что $w : V \to \mathbb{R}$ — C^2-гладкое решение уравнения*

$$\operatorname{div}(|\nabla w(q)|^2 \nabla w(q)) = 0. \tag{2.1}$$

Тогда функция $w_f = w \circ f$ есть слабое решение уравнения

$$\operatorname{div} \mathscr{A}_f(q, \nabla w_f(q)) = 0. \tag{2.2}$$

Координатные функции и функция $\ln|q|$ являются частными решениями уравнения (2.1). Из этого факта, предложения 2.1 и свойств решений уравнения (2.2) получаем следующие утверждение (см. [3]).

2.2. Следствие (монотонность). *Каждая компонента отображения с ограниченным искажением монотонна.*

2.3. Следствие (положительность якобиана). *Пусть $f : U \to \mathbb{H}$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением области $U \subset \mathbb{H}$. Тогда $J(p, f) > 0$ для почти всех $p \in U$.*

2.4. Следствие (разрывность прообразов точек). *Если $f : U \to \mathbb{H}$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением области $U \subset \mathbb{H}$, то прообраз $f^{-1}(q)$ каждой точки $q \in \mathbb{H}$ вполне несвязен.*

2.5. Следствие (неравенство Каччиопполи). *Пусть $f : U \to \mathbb{H}$ — отображение с искажением K. Тогда каждая компонента f_i отображения f, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяет неравенству*

$$\int\limits_U \varphi^4(q)|\nabla f_i(q)|^4\, dq \le C \int\limits_U |f_i(q)|^4 |\nabla\varphi(q)|^4\, dq$$

для любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(U)$, причем постоянная C зависит только от K.

2.6. Следствие (обратное неравенство Гёльдера). *Для каждого $K \ge 1$ существует $\varepsilon(K) > 0$ такое, что каждое отображение $f : U \to \mathbb{H}$ с искажением K принадлежит классу $HW^{1,4+\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(U)$. Кроме того, выполнено обратное неравенство Гёльдера*

$$\biggl(\frac{1}{|B_R|}\int\limits_{B_R} \|Hf_*(q)\|^{4+\varepsilon}\, dq\biggr)^{1/(4+\varepsilon)} \le C\biggl(\frac{1}{|B_{2R}|}\int\limits_{B_{2R}} \|Hf_*(q)\|^{4}\, dq\biggr)^{1/4}$$

для каждого шара $B_{2R} \subset U$, причем $C = C(K) > 0$.

2.7. Следствие (локальная непрерывность по Гёльдеру). *Предположим, что $f : U \to \mathbb{H}$ — отображение с искажением K и $\int\limits_U \|Hf_*(q)\|^4\, dq = M < \infty$. Тогда отображение f удовлетворяет внутри U условию Гёльдера с показателем $\alpha = \alpha(K) > 0$. При этом если V содержится строго в U, то для произвольных $x, y \in V$*

$$\rho(f(p), f(q)) \le C\rho(p, q)^\alpha,$$

где постоянная C зависит только от взаимного расположения U и V и постоянной M.

3. $\mathscr{P}$-дифференцируемость отображений с ограниченным искажением

Следующее определение восходит к П. Пансю.

3.1. Определение. Отображение $f : U \to \mathbb{H}$ (U — область в $\mathbb{H}$) называется *$\mathscr{P}$-дифференцируемым* в точке $p \in U$, если при $\varepsilon \to 0$

$$\{(f(p))^{-1} f(p(cq))\}/c \to h(q) \tag{3.1}$$

равномерно по $q \in B_1(0)$ для некоторого гомоморфизма $h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, сохраняющего горизонтальное пространство HT.

$\mathscr{P}$-дифференциал отображения f в точке p определяется как гомоморфизм алгебры Гейзенберга, соответствующий гомоморфизму h группы Гейзенберга.

3.2. Теорема. *Если $f : U \to \mathbb{H}$ — непрерывное контактное отображение класса $HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$ с $s > 4$, то f $\mathscr{P}$-дифференцируемо почти всюду в U и его $\mathscr{P}$-дифференциал совпадает с формальным $\mathscr{P}$-дифференциалом.*

Доказательство. Пусть $f = (f_1, f_2, f_3)$. Тогда для почти всех $p \in U$ формальный $\mathscr{P}$-дифференциал f задается матрицей

$$f_*(p) = \begin{pmatrix} Xf_1(p) & Yf_1(p) & 0 \\ Xf_2(p) & Yf_2(p) & 0 \\ 0 & 0 & HJ(p,f) \end{pmatrix}.$$

Обозначим $q = (q_1, q_2, q_3)$. Тогда (3.1) эквивалентно выполнению следующих трех соотношений:

$$\frac{f_1(p(cq)) - f_1(p) - cXf_1(p)q_1 - cYf_1(p)q_2}{c} \to 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{f_2(p(cq)) - f_2(p) - cXf_2(p)q_1 - cYf_2(p)q_2}{c} \to 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{f_3(p(cq) - f_3(p) - 2f_1(p(cq))f_2(p) + 2f_2(p(cq))f_1(p) - c^2HJ(p,f)q_3}{c^2} \to 0 \tag{3.4}$$

при $c \to 0$ равномерно по $q \in B_1(0)$.

Для доказательства этих соотношений мы используем следующее утверждение (см., например, [3, лемма 6.10]).

3.3. Предложение. *Пусть $s > 4$. Тогда существует постоянная C такая, что для любого непрерывного отображения $u : B_2(0) \to \mathbb{R}$ класса $HW^{1,s}(B_2(0))$ и любой точки $q \in B_1(0)$ выполняется неравенство*

$$|u(q) - u(0)| \le C\|\nabla u\|_{s,B_2(0)}.$$

С помощью предложения 3.3 доказательство соотношений (3.2) и (3.3) проводится стандартным способом. Для доказательства (3.2) положим

$$u(q) = f_1(p(cq)) - f_1(p) - cXf_1(p)q_1 - cYf_1(p)q_2.$$

Функция u определена на $B_2(0)$ для достаточно малых c и $u(0) = 0$. По предложению 3.3 для $q \in B_1(0)$

$$|u(q)| \le C\|\nabla u\|_{s,B_2(0)}.$$

Для $\xi \in B_2(0)$ имеем

$$Xu(\xi) = c\big(Xf_1(p(c\xi)) - Xf_1(p)\big), \quad Yu(\xi) = c\big(Yf_1(p(c\xi)) - Yf_1(p)\big).$$

Значит,

$$\frac{|u(q)|}{c} \le C\big(\|Xf_1(p(c\cdot)) - Xf_1(p)\|_{s,B_2(0)} + \|Yf_1(p(c\cdot)) - Yf_1(p)\|_{s,B_2(0)}\big).$$

По теореме Лебега мы имеем

$$\|Xf_1(p(c\cdot)) - Xf_1(p)\|_{s,B_2(0)} \to 0,$$
$$\|Yf_1(p(c\cdot)) - Yf_1(p)\|_{s,B_2(0)} \to 0$$

при $c \to 0$ для почти всех $p \in U$. Таким образом, для почти всех $p \in U$

$$\frac{|u(q)|}{c} \to 0$$

при $c \to 0$ равномерно по $q \in B_1(0)$, что завершает доказательство соотношения (3.2). Доказательство соотношения (3.3) полностью аналогично.

Чтобы доказать (3.4), положим

$$u(q) = f_3(p(cq)) - f_3(p) - 2f_1(p(cq))f_2(p) + 2f_2(p(cq))f_1(p) - c^2 HJ(p,f)q_3.$$

Для достаточно малых c отображение u определено на шаре $B_4(0)$ и по предложению 3.3 для $q \in B_1(0)$

$$|u(q)| \le C\|\nabla u\|_{s,B_2(0)}. \tag{3.5}$$

Для $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ имеем $(X\xi_3)(\xi) = 2\xi_2$. Следовательно, для $\xi \in B_2(0)$

$$\begin{aligned} Xu(\xi) &= cXf_3(p(c\xi)) - 2cf_2(p)Xf_1(p(c\xi)) + 2cf_1(p)Xf_2(p(c\xi)) - 2c^2HJ(p,f)\xi_2 \\ &= c\big(Xf_3(p(c\xi)) - 2f_2(p(c\xi))Xf_1(p(c\xi)) + 2f_1(p(c\xi))Xf_2(p(c\xi)) \\ &\quad + 2f_2(p(c\xi))Xf_1(p(c\xi)) - 2f_1(p(c\xi))Xf_2(p(c\xi)) \\ &\quad - 2f_2(p)Xf_1(p(c\xi)) + 2f_1(p)Xf_2(p(c\xi)) - 2cHJ(p,f)\xi_2\big) \\ &= c\big(\tau(Xf)(p(c\xi)) + 2Xf_1(p(c\xi))[f_2(p(c\xi)) - f_2(p)] \\ &\quad - 2Xf_2(p(c\xi))[f_1(p(c\xi)) - f_1(p)] - 2cHJ(p,f)\xi_2\big) \\ &= c\big(\tau(Xf)(p(c\xi)) + 2[Xf_1(p(c\xi)) - Xf_1(p)][f_2(p(c\xi)) - f_2(p)] \\ &\quad - 2[Xf_2(p(c\xi)) - Xf_2(p)][f_1(p(c\xi)) - f_1(p)] \\ &\quad + 2Xf_1(p)[f_2(p(c\xi)) - f_2(p)] - 2Xf_2(p)[f_1(p(c\xi)) - f_1(p)] - 2cHJ(p,f)\xi_2\big). \end{aligned}$$

Так как отображение f контактно, $\tau(Xf)(p(c\xi)) = 0$ для почти всех $\xi \in B_2(0)$. Полагая для $\xi \in B_2(0)$

$$v(\xi) = Xf_1(p)[f_2(p(c\xi)) - f_2(p)] - Xf_2(p)[f_1(p(c\xi)) - f_1(p)] - cHJ(p,f)\xi_2,$$

получаем

$$\begin{aligned} |Xu(\xi)| \le 2c\big(&|Xf_1(p(c\xi)) - Xf_1(p)||f_2(p(c\xi)) - f_2(p)| \\ &+ |Xf_2(p(c\xi)) - Xf_2(p)||f_1(p(c\xi)) - f_1(p)| + |v(\xi)|\big). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Применяя предложение 3.3 к функциям $f_1(p(c\cdot)) - f_1(p)$ и $f_2(p(c\cdot)) - f_2(p)$, для $\xi \in B_2(0)$ выводим

$$\begin{aligned} |f_1(p(c\xi)) - f_1(p)| &\le C\|c\nabla f_1(p(c\cdot))\|_{s,B_4(0)} = Cc\|\nabla f_1(p(c\cdot))\|_{s,B_4(0)}, \\ |f_2(p(c\xi)) - f_2(p)| &\le C\|c\nabla f_2(p(c\cdot))\|_{s,B_4(0)} = Cc\|\nabla f_2(p(c\cdot))\|_{s,B_4(0)}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Применяя предложение 3.3 к функции v, для $\xi \in B_2(0)$ получаем

$$|v(\xi)| \le C\|\nabla v\|_{s,B_4(0)}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} Xv(\xi) &= Xf_1(p)cXf_2(p(c\xi)) - Xf_2(p)cXf_1(p(c\xi)) \\ &= c\big(Xf_1(p)[Xf_2(p(c\xi)) - Xf_2(p)] - Xf_2(p)[Xf_1(p(c\xi)) - Xf_1(p)]\big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Yv(\xi) &= Xf_1(p)cYf_2(p(c\xi)) - Xf_2(p)cYf_1(p(c\xi)) - cHJ(p,f) \\ &= c\big(Xf_1(p)Yf_2(p(c\xi)) - Xf_2(p)Yf_1(p(c\xi)) - Xf_1(p)Yf_2(p) + Xf_2(p)Yf_1(p)\big) \\ &= c\big(Xf_1(p)[Yf_2(p(c\xi)) - Yf_2(p)] - Xf_2(p)[Yf_1(p(c\xi)) - Yf_1(p)]\big). \end{aligned}$$

Значит, для $\xi \in B_2(0)$

$$|v(\xi)| \leq Cc\big(|Xf_1(p)|\|Xf_2(p(c\cdot)) - Xf_2(p)\|_{s,B_4(0)} + |Xf_2(p)|\|Xf_1(p(c\cdot)) - Xf_1(p)\|_{s,B_4(0)} + |Xf_1(p)|\|Yf_2(p(c\cdot)) - Yf_2(p)\|_{s,B_4(0)} + |Xf_2(p)|\|Yf_1(p(c\cdot)) - Yf_1(p)\|_{s,B_4(0)}\big). \quad (3.8)$$

Используя соотношения (3.7) и (3.8) в (3.6), для $\xi \in B_2(0)$ мы выводим неравенство

$$|Xu(\xi)| \leq Cc^2\big(|Xf_1(p(c\xi)) - Xf_1(p)|\|\nabla f_2(p(c\cdot))\|_{s,B_4(0)} + |Xf_2(p(c\xi)) - Xf_2(p)|\|\nabla f_1(p(c\cdot))\|_{s,B_4(0)} + |Xf_1(p)|\|Xf_2(p(c\cdot)) - Xf_2(p)\|_{s,B_4(0)} + |Xf_2(p)|\|Xf_1(p(c\cdot)) - Xf_1(p)\|_{s,B_4(0)} + |Xf_1(p)|\|Yf_2(p(c\cdot)) - Yf_2(p)\|_{s,B_4(0)} + |Xf_2(p)|\|Yf_1(p(c\cdot)) - Yf_1(p)\|_{s,B_4(0)}\big).$$

Значит,

$$\|Xu\|_{s,B_2(0)} \leq Cc^2\big(\|Xf_1(p(c\cdot)) - Xf_1(p)\|_{s,B_2(0)}\|\nabla f_2(p(c\cdot))\|_{s,B_4(0)} + \|Xf_2(p(c\cdot)) - Xf_2(p)\|_{s,B_2(0)}\|\nabla f_1(p(c\cdot))\|_{s,B_4(0)} + |Xf_1(p)|\|Xf_2(p(c\cdot)) - Xf_2(p)\|_{s,B_4(0)} + |Xf_2(p)|\|Xf_1(p(c\cdot)) - Xf_1(p)\|_{s,B_4(0)} + |Xf_1(p)|\|Yf_2(p(c\cdot)) - Yf_2(p)\|_{s,B_4(0)} + |Xf_2(p)|\|Yf_1(p(c\cdot)) - Yf_1(p)\|_{s,B_4(0)}\big).$$

По теореме Лебега для $i = 1, 2$ имеем

$$\|Xf_i(p(c\cdot)) - Xf_i(p)\|_{s,B_4(0)} \to 0, \quad \|Yf_i(p(c\cdot)) - Yf_i(p)\|_{s,B_4(0)} \to 0,$$

$$\|\nabla f_i(p(c\cdot))\|_{s,B_4(0)} \to C|\nabla f_i(p)|$$

при $c \to 0$ для почти всех $p \in U$. Следовательно,

$$\frac{\|Xu\|_{s,B_2(0)}}{c^2} \to 0 \quad (3.9)$$

при $c \to 0$ для почти всех $p \in U$.

Пользуясь аналогичными рассуждениями, получаем

$$\frac{\|Yu\|_{s,B_2(0)}}{c^2} \to 0. \quad (3.10)$$

В силу (3.5), (3.9) и (3.10) заключаем, что

$$\frac{|u(q)|}{c^2} \to 0$$

при $c \to 0$ равномерно по $q \in B_1(0)$. Это завершает доказательство соотношения (3.4) и вместе с ним теоремы.

Из теоремы 3.2 и следствия 2.6 вытекает следующая теорема о $\mathscr{P}$-дифференцируемости отображений с ограниченным искажением.

3.4. Теорема. *Отображение с ограниченным искажением $\mathscr{P}$-дифференцируемо почти всюду в области определения, и его $\mathscr{P}$-дифференциал совпадает с формальным $\mathscr{P}$-дифференциалом.*

4. $\mathscr{N}$- и $\mathscr{N}^{-1}$-свойства. Замена переменных в интеграле Лебега

Напомним, что отображение обладает *$\mathscr{N}$-свойством*, если образ любого множества меры нуль есть множество меры нуль. Отображение обладает *$\mathscr{N}^{-1}$-свойством*, если прообраз любого множества меры нуль есть множество меры нуль.

Из результатов работы [4] вытекает следующее утверждение.

4.1. Предложение. *Пусть $f : U \to \mathbb{H}$ — непрерывное контактное отображение класса $HW^{1,4}_{\mathrm{loc}}(U)$ открытого множества $U \subset \mathbb{H}$, причем компоненты отображения f монотонны. Тогда f обладает $\mathscr{N}$-свойством.*

Если $A \subset \mathbb{H}$ и $f : A \to \mathbb{H}$, то мы обозначаем через $N_f(q, A)$ *кратность* отображения f в точке $q \in \mathbb{H}$, определенную по формуле

$$N_f(q, A) = \mathrm{card}(f^{-1}(q) \cap A).$$

Множество $G \subset \mathbb{H}$ называется *компактной областью* [2], если G компактно, внутренность G связна и G является замыканием своей внутренности. Если $G \subset \mathbb{H}$ — компактная область и $f : G \to \mathbb{H}$ — непрерывное отображение, то для каждой точки $q \in \mathbb{H} \setminus f(\partial G)$ определена *степень* $\mu(q, f, G)$ отображения f в точке q (см. [2]).

Следующее утверждение вытекает из результатов работы [5].

4.2. Предложение (замена переменных в интеграле Лебега). *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{H}$ и $f : U \to \mathbb{H}$ — непрерывное контактное отображение класса $HW^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U)$, имеющее локально суммируемый якобиан $J(p, f)$, обладающее $\mathscr{N}$-свойством и $\mathscr{P}$-дифференцируемое почти всюду в U. Тогда верны следующие утверждения:*

(a) *если $A \subset U$ — измеримое множество и $u : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ — измеримая неотрицательная функция, то функции $(u \circ f)(p)|J(p, f)|$ и $u(q)N_f(q, A)$ измеримы и*

$$\int\limits_A (u \circ f)(p)|J(p, f)|\, dp = \int\limits_{\mathbb{H}} u(q)N_f(q, A)\, dq; \tag{4.1}$$

(b) *если $G \subset U$ — компактная область такая, что $|\partial G| = 0$, и $u : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ — измеримая функция такая, что функция $u(\cdot)\mu(\cdot, f, G)$ интегрируема, то функция $(u \circ f)(\cdot)J(\cdot, f)$ интегрируема на G и выполнено равенство*

$$\int\limits_G (u \circ f)(p)J(p, f)\, dp = \int\limits_{\mathbb{H}} u(q)\mu(q, f, G)\, dq. \tag{4.2}$$

4.3. Теорема. *Если $f : U \to \mathbb{H}$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением области $U \subset \mathbb{H}$, то отображение f обладает $\mathscr{N}$- и $\mathscr{N}^{-1}$-свойствами и для него верны утверждения* (a) *и* (b) *предложения* 4.2.

Доказательство. Пусть U — область в $\mathbb{H}$ и $f : U \to \mathbb{H}$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением. Отображение f непрерывно, принадлежит классу $HW^{1,4}_{\mathrm{loc}}(U)$ и контактно по определению отображений с ограниченным искажением. Так как в силу следствия 2.2 каждая компонента отображения f монотонна, предложение 4.1 влечет выполнение условия $\mathscr{N}$ для f. По теореме 3.4 отображение f $\mathscr{P}$-дифференцируемо почти всюду в U. Значит,

f удовлетворяет условию предложения 4.2, и для него верны утверждения (a) и (b) этого предложения. По следствию 2.3 $J(p, f) > 0$ для почти всех $p \in U$. Из этого факта и (4.1) стандартным образом вытекает наличие $\mathscr{N}^{-1}$-свойства у отображения f.

Теорема доказана.

5. Сохранение ориентации, открытость и дискретность отображений с ограниченным искажением

Напомним, что непрерывное отображение $f : U \to \mathbb{H}$ открытого множества $U \subset \mathbb{H}$ *сохраняет ориентацию*, если $\mu(q, f, G) > 0$ для всякой компактной области $G \subset U$ и каждой точки $q \in f(G) \setminus f(\partial G)$ (см., например, [2]).

5.1. Лемма. *Если $f : U \to \mathbb{H}$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением области $U \subset \mathbb{H}$, то f сохраняет ориентацию.*

Доказательство. Пусть $G \subset U$ — компактная область. Предположим сначала, что $|\partial G| = 0$. Пусть $q_0 \in f(G) \setminus f(\partial G)$. Возьмем ограниченное открытое множество V, содержащее q_0 и лежащее в одной компоненте связности множества $\mathbb{H} \setminus f(\partial G)$. Тогда $\mu(q, f, G) = \mu(q_0, f, G)$ для всех $q \in V$. Применим формулу (4.2), взяв в качестве u характеристическую функцию множества V. Получим

$$\int\limits_{G \cap f^{-1}(V)} J(p, f)\, dp = \mu(q_0, f, G)|V|.$$

В силу следствия 2.3 интеграл в левой части этого неравенства строго больше нуля. Значит, $\mu(q_0, f, G) > 0$.

Пусть теперь $G \subset U$ — произвольная компактная область, и пусть $q_0 \in f(G) \setminus f(\partial G)$. Множество $G \cap f^{-1}(q_0)$ компактно и не пересекается с ∂G. Тогда найдется компактная область $\widetilde{G}$, лежащая во внутренности G и такая, что $G \cap f^{-1}(q_0)$ лежит во внутренности $\widetilde{G}$, причем $|\partial \widetilde{G}| = 0$. Тогда $q_0 \in f(\widetilde{G}) \setminus f(\partial \widetilde{G})$ и $\mu(q_0, f, G) = \mu(q_0, f, \widetilde{G})$. Ввиду доказанного выше имеем $\mu(q_0, f, \widetilde{G}) > 0$, что завершает доказательство леммы.

Следствие 2.4 и лемма 5.1 известным образом (см. [2]) влекут следующее утверждение.

5.2. Теорема. *Если $f : U \to \mathbb{H}$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением области $U \subset \mathbb{H}$, то f дискретно и открыто.*

6. Теорема Лиувилля

Для отображений с ограниченным искажением областей евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с $n \geq 3$ теорема Лиувилля доказана Ю. Г. Решетняком и утверждает (см. [2]), что отображение с искажением 1 области пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, либо постоянно, либо является сужением на эту область некоторого мёбиусова преобразования.

Для квазиконформных отображений на группе Гейзенберга соответствующий аналог теоремы Лиувилля доказан Кораньи и Рейманом в [6] для C^4-гладких отображений. Без условий гладкости теорема Лиувилля доказана в [7].

Заменой мёбиусова преобразования на группе Гейзенберга является действие элементов группы $SU(1, 2)$. Группа $SU(1, 2)$ действует естественным образом как группа конформных преобразований компактификации группы Гейзенберга. Это действие описано в [6, 8]. Теорема Лиувилля утверждает, что

1-квазиконформное отображение области на группе Гейзенберга есть сужение на эту область естественного действия некоторого элемента группы $SU(1,2)$.

Как следует из замечания 2 работы [1], 1-квазиконформные отображения — это в точности гомеоморфизмы, которые являются отображениями с искажением 1.

6.1. Теорема. *Пусть $f : U \to \mathbb{H}$ — отображение с искажением* 1 *области $U \subset \mathbb{H}$. Тогда f либо постоянно, либо является сужением на U действия элемента группы $SU(1,2)$.*

Доказательство. Утверждение теоремы выводится стандартными рассуждениями из соответствующего утверждения для 1-квазиконформных отображений и того факта, что f открыто и дискретно.

Допустим, что f непостоянно. Обозначим через B_f множество точек ветвления отображения f. Множество B_f относительно замкнуто в U, и f является гомеоморфизмом в достаточно малой окрестности произвольной точки из $U \setminus B_f$. Следовательно, для каждой точки p из $U \setminus B_f$ найдется шар $B(p)$ с центром в этой точке такой, что сужение f на шар $B(p)$ совпадает с сужением на $B(p)$ действия некоторого элемента группы $SU(1,2)$. Заметим, что для пересекающихся шаров мы можем взять один и тот же элемент группы $SU(1,2)$. Так как f непрерывно, открыто и дискретно, из теоремы Чернавского (см., например, [2, теорема 6.7]) следует, что топологическая размерность множества B_f не превосходит 1. Следовательно, множество $U \setminus B_f$ связно. Отсюда вытекает, что мы можем взять один и тот же элемент группы $SU(1,2)$ сразу для всех шаров $B(p)$. Следовательно, сужение f на $U \setminus B_f$ совпадает с сужением на B_f действия некоторого элемента группы $SU(1,2)$. По непрерывности f совпадает с сужением действия этого элемента группы $SU(1,2)$ на U.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Даирбеков Н. С.* Свойство морфизма для отображений с ограниченным искажением на группе Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 810–822.
2. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
3. *Heinonen J., Holopainen I.* Quasiregular maps on Carnot groups // J. Geom. Anal. 1997. V. 7, N 1. P. 109–148.
4. *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.
5. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Аппроксимативно дифференцируемые преобразования и замена переменных на нильпотентных группах // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 1. С. 70–89.
6. *Korányi A., Reimann H. M.* Quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Invent. Math. 1985. V. 80. P. 309–338.
7. *Capogna L.* Regularity of quasi-linear equations in the Heisenberg group // Comm. Pure Appl. Math. 1997. V. 50. P. 867–889.
8. *Korányi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111. P. 1–87.

Статья поступила 12 октября 1998 г.

г. Новосибирск