Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 512.542.4

БОЛЬШИЕ НОРМАЛЬНЫЕ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Е. П. Вдовин

Аннотация: Доказано, что если конечная разрешимая группа G содержит нильпотентную подгруппу индекса n, то индекс ее подгруппы Фиттинга не превосходит n^5. В качестве следствия получено, что если в конечной группе G есть нильпотентная подгруппа индекса n, то G содержит нормальную нильпотентную подгруппу индекса не более чем n^c для некоторой абсолютной константы c. Библиогр. 9.

Введение. Пусть Ψ — некоторое свойство группы, наследуемое всеми ее подгруппами (например, абелевость, нильпотентность, разрешимость и т. д.). Тогда естественным образом возникает вопрос: насколько мала в произвольной конечной группе G нормальная Ψ-подгруппа? Сформулируем более точно

Вопрос. *Если конечная группа G содержит Ψ-подгруппу индекса n, то верно ли, что G содержит нормальную Ψ-подгруппу, индекс которой ограничен некоторой функцией $f(n)$?*

Понятно, что для любого свойства Ψ, которое наследуется всеми подгруппами, в качестве функции $f(n)$ достаточно взять функцию $n!$. В работе [1] Бабаи, Гудман и Пыбер исследовали приведенный выше вопрос в том случае, когда свойство Ψ — это цикличность или разрешимость. В частности, по модулю классификации конечных простых групп они доказали, что если конечная группа G содержит разрешимую подгруппу индекса n, то она содержит нормальную разрешимую подгруппу индекса не более чем n^c для некоторой абсолютной константы c [1, теорема 2.13]. Там же ими сформулирован вопрос, верно ли аналогичное утверждение в том случае, когда свойство Ψ — абелевость или нильпотентность?

В настоящей работе дается положительный ответ на этот вопрос в том случае, когда свойство Ψ — нильпотентность. Понятно, что теорема о существовании большой нормальной разрешимой подгруппы в произвольной конечной группе сводит решение аналогичной проблемы для нильпотентных групп к нахождению большой нормальной нильпотентной подгруппы в произвольной конечной разрешимой группе. Поэтому на протяжении всей статьи мы будем рассматривать разрешимые группы и лишь в конце в качестве следствия докажем теорему для произвольной конечной группы.

Изучению вопроса о существовании в разрешимой конечной группе большой нормальной подгруппы посвящено значительное количество работ. Первыми, по-видимому, были две работы Бернсайда [2, 3], в которых он доказал разрешимость группы порядка $p^\alpha q^\beta$ (p и q — простые числа) и существование в

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00550), ФЦП «Интеграция» (код проекта 274) и Международной Соросовской программы образования в области точных наук (грант s99–56).

такой группе (за небольшими исключениями) нормальной p-подгруппы порядка, большего чем $p^\alpha q^{-\beta}$. Намного позднее В. С. Монахов [4] заметил пробел в доказательстве Бернсайда, исправил его и уточнил формулировку, дав точное описание всех возможных исключений. Там же теорема Бернсайда была обобщена на случай разрешимой группы, порядок которой имеет вид $p^\alpha m$, $p^\alpha > m$ и н.о.д.(p^α, m)=1.

С этой точки зрения основная теорема данной статьи (формулировку см. ниже) является максимально возможным обобщением в данном направлении.

Обозначения и определения, используемые в данной статье, можно найти в [5]. Если G — группа, то запись $H \leq G$ означает, что H является подгруппой группы G, $H \trianglelefteq G$ — что H является нормальной подгруппой группы G. Через $|G : H|$ обозначается индекс подгруппы H в группе G. Если подгруппа H нормальна в G, то через G/H обозначается фактор-группа группы G по H. Через $G = A \ltimes B$ обозначается полупрямое произведение групп A и B с нормальной подгруппой B. Если M — подмножество группы G, то через $\langle M \rangle$ обозначается подгруппа, порожденная множеством M, $|M|$ — мощность множества M (или порядок элемента, если вместо множества стоит один элемент). Через $C_G(M)$ обозначается централизатор множества M в группе G, $C_G(G) = \zeta(G)$ — центр группы G. Сопряжение элемента x с помощью элемента y в группе G записывается следующим образом: $x^y = y^{-1}xy$. Подгруппа Фиттинга группы G обозначается через $F(G)$, подгруппа Фраттини группы G — через $\Phi(G)$. Если x, y — два элемента группы G, то $[x, y] = x^{-1}x^y$ — коммутатор элементов x и y, $[G, G] = G'$ — коммутант группы G. Период группы G обозначается через $\exp(G)$.

Для конечной группы G через $O_p(G)$ обозначим наибольшую нормальную p-подгруппу группы G, через $i_p(G)$ — такое минимальное число k, что пересечение k силовских p-подгрупп группы G равно $O_p(G)$.

Через $GL(V)$ обозначим группу всех невырожденных преобразований векторного пространства V, через $GL(n, q)$ — группу всех невырожденных матриц над конечным полем F_q порядка q. Подгруппа G группы $GL(n, q)$ называется *полупростой*, если ее порядок взаимно прост с $q = p^\alpha$, и *унипотентной*, если ее порядок является степенью p.

Если φ — гомоморфизм группы G, g — элемент группы G, то G^φ, g^φ — образы группы G и элемента g относительно гомоморфизма φ соответственно, $\mathrm{Aut}(G)$ означает группу всех автоморфизмов группы G.

Основная теорема. *Пусть G — нетривиальная конечная разрешимая группа, содержащая нильпотентную подгруппу индекса n. Тогда $|G : F(G)| < n^5$.*

1. Известные результаты.

Лемма 1 [5, теорема 5.3.3]. *Пусть G — группа порядка p^m, и пусть $|G : \Phi(G)| = p^r$. Тогда порядок $C_{\mathrm{Aut}(G)}(G/\Phi(G))$ делит $p^{(m-r)r}$.*

Следствие. *Пусть G — конечная p-группа. Тогда если порядок ее автоморфизма α не делится на p и α действует тривиально на $G/\Phi(G)$, то α централизует G.*

Доказательство. Пусть α — нетривиальный автоморфизм, порядок которого не делится на p. Тогда в силу леммы 1 он не лежит в $C_{\mathrm{Aut}(G)}(G/\Phi(G))$.

Лемма 2 [5, теорема 5.3.2]. *Пусть G — конечная p-группа. Тогда $\Phi(G) = [G, G]G^p$.*

Следствие. *Если G — конечная p-группа, то $G/\Phi(G)$ — элементарная абелева группа.*

Доказательство. Поскольку $[G,G] \leq \Phi(G)$, группа $G/\Phi(G)$ абелева. Кроме того, любой элемент g из G в степени p лежит в $\Phi(G)$.

Лемма 3 [5, теорема 5.2.4]. *Пусть G — конечная группа. Тогда следующие свойства эквивалентны:*
(i) *группа G нильпотентна;*
(ii) *группа G является прямым произведением своих силовских подгрупп.*

Следствие. *Пусть G — конечная группа и B — ее нормальная p-подгруппа. Пусть в группе G есть элемент α, порядок которого не делится на p и который не централизует B. Тогда группа G ненильпотентна.*

Доказательство. Группа $\langle \alpha, B\rangle$ не представима в виде прямого произведения своих силовских подгрупп, значит, она не является нильпотентной. Следовательно, вся группа G не является нильпотентной.

Лемма 4 [5, теорема 5.4.4]. *Пусть G — разрешимая группа с подгруппой Фиттинга F. Тогда $C_G(F) = \zeta(F)$.*

Лемма 5 [6, теорема 1.6]. *Если G — нильпотентная подгруппа группы $GL(V)$ порядка, взаимно простого с характеристикой поля, над которым определено конечное векторное пространство V, то $|G| \leq |V|^{\beta}/2$, где $\beta = \log 32/\log 9$.*

Лемма 6 [7]. *Для любой конечной разрешимой группы G выполнено неравенство $i_p(G) \leq 3$.*

Следствие. *Пусть P — силовская p-подгруппа конечной нетривиальной разрешимой группы G, и пусть $O_p(G) = \{e\}$. Тогда $|G:P|^2 > |P|$.*

Доказательство. В силу леммы 6 существуют такие три силовские p-подгруппы P_1, P_2, P_3, что $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \{e\}$. Поскольку группа G не является p-группой, справедливо неравенство $|G| > \frac{|P_1|\cdot|P_2|}{|P_1 \cap P_2|}$. Далее, поскольку $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \{e\}$, то $|P_1 \cap P_2| \cdot |P_3| < |G|$. Таким образом,

$$|G| > \frac{|P_1| \cdot |P_2|}{|P_1 \cap P_2|} > \frac{|P_1| \cdot |P_2 \cdot |P_3| \cdot |P_1 \cap P_2|}{|G| \cdot |P_1 \cap P_2|} = \frac{|P_1|^3}{|G|}.$$

Значит, $|G|^2 > |P_1|^3$, и в силу теоремы Лагранжа [5, теорема 1.3.6] $|G:P_1|^2 > |P_1|$.

Замечание. В [8] доказано, что утверждение леммы 6 справедливо для всех конечных групп. Однако доказательство этого факта в общем случае существенно использует классификацию конечных простых групп.

2. Доказательство основной теоремы. В этом пункте будет доказана основная теорема, сформулированная во введении.

Пусть H — нильпотентная подгруппа группы G, для которой $|G:H| = n$. Рассмотрим $N = F(G)$. В силу леммы 3 $N = P_1 \times \ldots \times P_k$, где P_i — силовские p_i-подгруппы группы N.

Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : G \to G/\Phi(N) = \overline{G}$ и будем в дальнейшем образы элементов и множеств относительно этого гомоморфизма обозначать той же буквой, что и сами элементы и множества, добавляя сверху черту.

Из теоремы Лагранжа следует, что $|\overline{G}:\overline{N}| = |G:N|$ и $|\overline{G}:\overline{H}| \leq |G:H|$, поэтому для доказательства основной теоремы достаточно показать, что $|\overline{G}:\overline{N}| < |\overline{G}:\overline{H}|^5$.

В силу следствия из леммы 2 группу $\overline{N}$ можно представить в виде $\overline{N} = \overline{P_1} \times \ldots \times \overline{P_k}$, где $|\overline{P_i}| = p_i^{n_i}$ и $\exp(\overline{P_i}) = p_i$, т. е. в виде прямого произведения элементарных абелевых групп. Таким образом, каждое из $\overline{P_i}$ можно рассматривать как векторное пространство размерности n_i над полем F_{p_i}. Поскольку $N \trianglelefteq G$, можно рассмотреть гомоморфизмы $\varphi_i : G \to GL(n_i, p_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Эти гомоморфизмы индуцируют гомоморфизмы $\varphi_i : \overline{G} \to GL(n_i, p_i)$ и $\varphi_i : G/N \to GL(n_i, p_i)$, которые для упрощения записи обозначены теми же буквами. Пусть N_1 — подгруппа группы N, инвариантная относительно сопряжения некоторым элементом x из группы G. Элемент x действует *унипотентно на* N_1, если для всех i образ элемента x относительно гомоморфизма φ_i действует унипотентно на $\overline{N_1} \cap \overline{P_i}$. Если в качестве группы N_1 взята вся группа N, то будем говорить, что элемент x действует *унипотентно*. Аналогично определяется понятие унипотентного действия на подгруппе $\overline{N_1}$ для элементов $\bar{x} \in \overline{G}$ и $x \in G/N$. Подгруппа U группы G действует унипотентно на подгруппе N_1 группы N, если каждый ее элемент действует унипотентно на этой подгруппе (при этом, конечно, считается, что N_1 инвариантна относительно сопряжения группой U). В том случае, когда N_1 совпадает с N, будем говорить, что группа U действует унипотентно. Как и для элементов, определяется унипотентное действие для подгрупп из групп $\overline{G}$ и G/N.

В обозначениях, введенных выше, справедлива следующая

Лемма 7. *Пусть U — нормальная подгруппа группы G, которая действует унипотентно. Тогда $U \leq N$, следовательно, $\overline{U} \leq \overline{N}$, а в G/N нет нетривиальных нормальных подгрупп, действующих унипотентно.*

Доказательство. Можно считать, что $N \leq U$, так как в противном случае группа NU нормальна в G и действует унипотентно.

Предположим, что $U \neq N$ и V/N — минимальная характеристическая подгруппа в U/N. Тогда $V \trianglelefteq G$ и V/N — p-группа. Пусть P — силовская p-подгруппа в группе V. Тогда $V = P \cdot \prod\limits_{p_i \neq p} P_i$. Поскольку V действует унипотентно, ее образ относительно всех φ_i при $p_i \neq p$ равен единице, поэтому $\overline{P}$ централизует все $\overline{P_i}$ при $p_i \neq p$. В силу следствия из леммы 1, группа P централизует все P_i при $p_i \neq p$, т. е. она представима в виде прямого произведения своих силовских подгрупп, значит, по лемме 3 нильпотентна. Тем самым получена нормальная нильпотентная подгруппа группы G, не лежащая в N, что противоречит определению N. Лемма доказана.

Отметим в качестве простого следствия, что $C_{\overline{G}}(\overline{N}) = \zeta(\overline{N}) = \overline{N}$. Более того, $\overline{N} = F(\overline{G})$. Действительно, $\overline{N}$ — нормальная абелева подгруппа. Поскольку $F(\overline{G})$ нильпотентна, в силу следствия из леммы 3 на $\overline{N}$ она действует унипотентно, значит, она лежит в $\overline{N}$. Поэтому можно считать $G = \overline{G}$ и $F(G)$ — произведение элементарных абелевых групп. Таким образом, для упрощения обозначений в дальнейшем черта будет опускаться. Это следствие на самом деле утверждает, что справедлива

Лемма 8. *Если G — конечная разрешимая группа, то $F(G/\Phi(F(G))) = F(G)/\Phi(F(G))$.*

Лемма 9. *Пусть H — нильпотентная подгруппа группы G, N_1 — инвариантная относительно сопряжения группой H подгруппа группы N и H действует на N_1 не унипотентно. Тогда группа $\langle H, N_1 \rangle$ ненильпотентна.*

Доказательство. В самом деле, предположим, что группа $\langle H, N_1 \rangle$ нильпотентна. Тогда N_1 — ее нормальная подгруппа, которая является прямым произведением элементарных абелевых групп. Следовательно, группа $\langle H, N_1\rangle$ действует на N_1 унипотентно (в силу следствия из леммы 3), и, значит, группа H действует на N_1 унипотентно, что противоречит условию. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть H_1 — подмножество всех элементов группы H, которые действуют унипотентно. Тогда H_1 — нормальная подгруппа группы H. Действительно, замкнутость относительно взятия обратного и сопряжения очевидны, поэтому достаточно проверить замкнутость относительно умножения. Пусть $x, y \in H_1$ — произвольные два элемента. Тогда $|x^{\varphi_i}| = p_i^m$, $|y^{\varphi_i}| = p_i^l$ для любого $i = 1, \dots, k$. Поскольку H^{φ_i} — нильпотентная группа, она представима в виде прямого произведения своих силовских подгрупп. В частности, произведение любых двух p_i-элементов вновь p_i-элемент, т. е. $|(xy)^{\varphi_i}| = p_i^n$, следовательно, для всех i элемент xy действует унипотентно, значит, лежит в H_1.

Так как подгруппа $H \cap N$ инвариантна относительно сопряжения группой H, из леммы 9 следует, что группа H действует на $H \cap N$ унипотентно. Поскольку группа N элементарная абелева, можно рассмотреть фактор-группу $N/(N \cap H) = Q_1 \times \ldots \times Q_k$, где $|Q_i| = p_i^{m_i}$ и $\exp(Q_i) = p_i$. Так как $N \cap H$ инвариантна относительно сопряжения группой H, можно рассмотреть индуцированные гомоморфизмы $\phi_i : H \to GL(m_i, p_i) = GL(Q_i)$. Поскольку для всех i группа H^{ϕ_i} нильпотентна, она представима в виде $T_i \times U_i$ — прямого произведения ее полупростой и унипотентной частей соответственно. В силу леммы 5 $|T_i| < |Q_i|^\beta$. Покажем, что $|H/H_1| \leq \prod\limits_i |T_i|$ и, следовательно,

$$|H/H_1| \leq |N/(N \cap H)|^\beta. \tag{1}$$

Пусть x, y — два элемента из группы H, образы которых в группе H/H_1 различны. Тогда существует такое $i \in \{1, \dots, k\}$, что $x^{\phi_i} U_i \neq y^{\phi_i} U_i$, ибо в противном случае элемент xy^{-1} действует унипотентно на $N/(N \cap H)$. Поскольку этот элемент также действует унипотентно на $N \cap H$, он действует унипотентно на всей группе N, значит, лежит в H_1 и, следовательно, образы элементов x и y в группе H/H_1 совпадают, что противоречит выбору этих элементов. Для завершения доказательства неравенства (1) нужна следующая простая лемма.

Лемма 10. *Пусть A — конечное множество и существуют отображения $\psi_i : A \to A_i$ $(i = 1, \dots, n)$ такие, что для любых двух различных элементов a и b из A существует такое i, для которого $a^{\psi_i} \neq b^{\psi_i}$. Тогда $|A| \leq |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n|$.*

Доказательство. В силу условий леммы можно построить инъективное вложение множества A в декартово произведение множеств $A_1 \times \ldots \times A_n$, заданное правилом: $a \to (a^{\psi_1}, \dots, a^{\psi_n})$. Отсюда следует, что $|A| \leq |A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_N|$, лемма доказана.

Для завершения доказательства неравенства (1) заметим, что существуют отображения элементов группы H/H_1 в смежные классы групп H^{ϕ_i} по подгруппам U_i, которые удовлетворяют условиям леммы. Следовательно, $|H/H_1| \leq \prod\limits_i |H^{\phi_i} : U_i| = \prod\limits_i |T_i|$ неравенство (1) доказано.

Покажем теперь, что справедливо неравенство

$$|G/N : H_1N/N|^2 > |H_1N/N| = |H_1/(H \cap N)|. \tag{2}$$

Для этого рассмотрим группы $C_i = C_G(\prod\limits_{j \neq i} P_j)/N$. Поскольку $C_G(N) = N$, имеем $C_i \cap \langle C_j | j \neq i\rangle = \{e\}$. Далее, ясно, что каждая группа C_i нормальна в G/N, поэтому можно рассмотреть подгруппу $C = C_1 \times \ldots \times C_k$ группы G/N. Поскольку группа H_1 действует унипотентно (и сама она нильпотентна), фактор-группа $H_1N/N \cong H_1/(H \cap N)$ (понятно, что $H \cap N = H_1 \cap N$) представима в виде прямого произведения своих силовских p_i-подгрупп $H_1N/N = H_{p_1} \times \ldots \times H_{p_k}$. Из доказательства леммы 7 следует, что $H_{p_i} \leq C_i$.

Далее, поскольку $C_i \trianglelefteq G/N$, в C_i нет нетривиальных нормальных p_i-подгрупп. В противном случае наибольшая такая подгруппа автоморфно допустима и, следовательно, является нетривиальной нормальной подгруппой группы G/N, действующей унипотентно, что противоречит лемме 7. Таким образом, из следствия леммы 6 вытекает, что $|C_i : H_{p_i}|^2 > |H_{p_i}|$. Объединяя эти неравенства по всем i, получим, что

$$|G/N : H_1N/N|^2 \geq |C : H_1N/N|^2 > |H_1N/N| = |H_1/(H \cap N)|,$$

неравенство (2) доказано.

Для завершения доказательства основной теоремы нам потребуются еще два равенства, которые получаются простым применением теоремы Лагранжа:

$$|G : H| = |G : HN| \cdot |HN : H| \stackrel{1}{=} |G/N : HN/N| \cdot |N/(N \cap H)|. \tag{3}$$

Здесь для равенства 1 используется тот факт, что любой элемент из HN представим в виде $n \cdot h$, где $n \in N$, $h \in H$. Таким образом, любой смежный класс по H можно записать как nH для некоторого $n \in N$, и совпадение смежных классов n_1H и n_2H означает, что $n_2^{-1}n_1 \in H \cap N$, следовательно, $|NH : H| = |N : (N \cap H)| = |N/(N \cap H)|$ (группа N абелева). Далее,

$$\begin{aligned}|G/N : H_1N/N| &= |G/N : HN/N| \cdot |HN/H_1N| \\ &\stackrel{2}{=} |G/N : NH/N| \cdot |H/H_1| = |G/N : H_1N/N|.\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь для доказательства равенства 2 используем, что $H \cap N = H_1 \cap N$, поэтому $|HN/H_1N| = |HN/N : H_1N/N| = |H/(H \cap N)|/|H_1/(H_1 \cap N)| = |H|/|H_1| = |H/H_1|$.

Теперь можно получить окончательную оценку:

$$\begin{aligned}|G : N| &= |G/N : HN/N| \cdot |HN/N : H_1N/N| \cdot |H_1N/N| \\ &= |G/N : HN/N| \cdot |H/H_1| \cdot |H_1N/N| \\ &\stackrel{3}{<} |G/N : HN/N| \cdot |N/(N \cap H)|^{\beta} \cdot |G/N : H_1N/N|^2 \\ &\stackrel{4}{=} |G/N : HN/N| \cdot |N/(N \cap H)|^{\beta} \cdot |G/N : HN/N|^2 \cdot |H/H_1|^2 \\ &\stackrel{5}{<} |G/N : HN/N|^3 \cdot |N/(N \cap H)|^{\beta} \cdot |N/(N \cap H)|^{2\beta} \\ &\stackrel{6}{\leq} |G/N : HN/N|^3 \cdot |N/(N \cap H)|^{3\beta} < |G : H|^5.\end{aligned}$$

Здесь неравенство 3 получаем применением ко второму и третьему множителям неравенств (1) и (2) соответственно. Равенство 4 выводим после того, как к последнему множителю применяем равенство (4). Неравенство 5 вновь следует из неравенства (1). Наконец, неравенство 6 вытекает из равенства (3) и того, что $|G/N : HN/N| \geq 1$. Последнее неравенство следует из того, что $3 < 3\beta < 5$. Теорема доказана.

3. Следствие. В качестве следствия из основной теоремы получается решение вопроса, сформулированного в начале статьи, в общем случае.

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, которая содержит нормальную нильпотентную подгруппу индекса n. Тогда она содержит нормальную нильпотентную подгруппу индекса не более чем n^c для некоторой абсолютной константы c.*

Доказательство. В силу [1, теорема 2.13] группа G содержит нормальную разрешимую подгруппу R индекса не более, чем n^{c_1} для некоторой абсолютной константы c_1. Пусть H — нильпотентная подгруппа индекса n, о которой говорится в условии теоремы. Тогда $R \cap H$ — нильпотентная подгруппа индекса не более, чем n в R. В силу основной теоремы, $|R : F(R)| < n^5$. Поскольку подгруппа Фиттинга является характеристической, она нормальна в G и $|G : F(R)| < n^{c_1+5}$. Теорема доказана.

Замечание. Основная теорема доказана без использования классификации конечных простых групп. Доказательство теоремы 2.13 в [1] существенно использует теорему о классификации конечных простых групп. Используя доказательство теоремы 2.13, приведенное в [1], можно получить оценку константы c_1 (из доказательства теоремы 1):

$$c_1 \leq \frac{\beta + 1}{1 - \alpha} + \frac{2}{(1 - \alpha)\log_2 60}.$$

Здесь константы α и β определяются следующим образом:

$\alpha < 1$ — абсолютная константа такая, что для любой конечной неабелевой простой группы G и для любой ее нильпотентной подгруппы N справедливо неравенство $|N| \leq |G|^\alpha$;

β — абсолютная константа такая, что для любой конечной неабелевой простой группы G справедливо неравенство $|\operatorname{Out}(G)| \leq |G|^\beta$.

В работе [9] доказано, что в качестве α можно взять $\frac{1}{2}$, в качестве β также можно взять $\frac{1}{2}$. Таким образом, константа c, указанная в теореме 1, не превосходит 9.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Виктору Даниловичу Мазурову за полезные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Babai L., Goodman A. J., Pyber L.* Groups without faithful transitive permutation representations of small degree // J. Algebra. 1997. V. 195. P. 1–29.
2. *Burnside W.* On groups of order $p^\alpha q^\beta$ // Proc. London Math. Soc. 1904. V. 2. P. 388–392.
3. *Burnside W.* On groups of order $p^\alpha q^\beta$ (Second paper) // Proc. London Math. Soc. 1905. V. 2. P. 432–437.
4. *Монахов В. С.* Инвариантные подгруппы бипримарных групп // Мат. заметки. 1975. Т. 18. С. 877–887.
5. *Robinson D. J. S.* A Course in the Theory of Groups. New York: Springer-Verl., 1996.
6. *Wolf T. R.* Solvable and nilpotent subgroups of $GL_n(q^m)$ // Canad. J. Math. 1982. V. 34. P. 1097–1111.
7. *Passman D. S.* Groups with normal solvable Hall p-subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 123. P. 99–111.
8. *Зенков В. И.* Пересечение нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2. С. 1–91.
9. *Вдовин Е. П.* Большие нильпотентные подгруппы конечных простых групп // Алгебра и логика (в печати).

Статья поступила 18 декабря 1998 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
vdovin@math.nsc.ru