Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 518.61

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С СОПРЯЖЕННО–ФАКТОРИЗОВАННОЙ СТРУКТУРОЙ

А. Н. Коновалов

Аннотация: Для эллиптических операторных уравнений в конечномерных евклидовых пространствах предложен и обоснован новый класс экономичных итерационных методов нахождения нормального обобщенного решения. Основная идея заключается в переходе от эллиптического оператора краевой задачи к его энергетическому расширению, которое имеет сопряженно-факторизованную структуру. Этот переход позволяет свести исходную операторную задачу к системе сопряженных операторных уравнений. Для сопряженной системы удается построить сходящиеся экономичные классы итерационных методов, которые не выводят из подпространств разрешимости. Именно этим подпространствам принадлежат нормальные решения сопряженных задач. Библиогр. 25.

§ 1. Постановка задачи

Пусть в конечномерном евклидовом пространстве H^* ищется решение линейного операторного уравнения

$$Au = f, \quad u \in H^*, \quad f \in H^*, \tag{1.1}$$

с вырожденным оператором A. Как известно [1], пространство H^* может быть представлено в виде прямой суммы ортогональных подпространств

$$H^* = \operatorname{im} A \oplus \ker A^* = \operatorname{im} A^* \oplus \ker A. \tag{1.2}$$

Представлениям (1.2) соответствуют ортогональные разложения

$$\begin{gathered} f = f_1 + f_2, \;\; f_1 \in \operatorname{im} A, \;\; f_2 \in \ker A^*, \;\; (f_1, f_2) = 0; \\ u = u_1 + u_2, \;\; u_1 \in \operatorname{im} A^*, \;\; u_2 \in \ker A, \;\; (u_1, u_2) = 0. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Известно также [1], что ортогональность f ядру оператора A^* является необходимым и достаточным условием разрешимости (совместности) операторного уравнения (1.1). Для совместной задачи (1.1) $f \in \operatorname{im} A$ и в (1.3) $f_2 = 0$. Если же $f_2 \neq 0$, то задачу (1.1) называют *несовместной*, решения такой задачи в обычном смысле не существует.

Обобщенным решением задачи (1.1) называют элемент $\bar{u} \in H^*$, который доставляет минимум функционалу метода наименьших квадратов, т. е.

$$\bar{u}: \;\; J(u) = \|Au - f\|^2 \longrightarrow \min, \quad u \in H^*. \tag{1.4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00508) и программы Министерства образования России «Университеты России — фундаментальные исследования» (код проекта 15).

Для $\bar{u}$ из (1.4)

$$A\bar{u} = f_1, \ \ f_1 \in \operatorname{im} A \longleftrightarrow (f, \varphi) = 0 \ \ \forall \varphi : A^* \varphi = 0, \tag{1.5}$$

и решение задачи (1.4) (или эквивалентной совместной задачи (1.5)) определяется с точностью до произвольного элемента $u_2 \in \ker A$. Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — ортонормированный базис $\ker A^*$, $k = \dim(\ker A^*)$, то в (1.5)

$$f_1 = f - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi_i, \quad \alpha_i = (f, \varphi_i). \tag{1.6}$$

Обобщенное решение из (1.4), норма которого минимальна, называют *нормальным.* Такое решение единственно и принадлежит $\operatorname{im} A^*$. В отличие от (1.5) для нормального обобщенного решения $\bar{u}^*$ задачи (1.4) имеем

$$A\bar{u}^* = f_1, \ \ \bar{u}^* \in \operatorname{im} A^* \longleftrightarrow (u, \psi) = 0 \ \ \forall \psi : A\psi = 0. \tag{1.7}$$

Поэтому нормальным обобщенным решением задачи (1.1) является элемент u_1 из (1.3), который может быть получен ортогональным проектированием $\bar{u}$ в $\operatorname{im} A^*$. Если $\psi_1, \ldots, \psi_k$ — ортонормированный базис $\ker A$, то такое проектирование можно осуществить следующим образом (ср. с (1.6)):

$$\bar{u}^* = \bar{u} - \sum_{i=1}^{k} \beta_i \psi_i, \quad \beta_i = (\bar{u}, \psi_i).$$

Итак, в задаче (1.1) речь может идти о нахождении либо обобщенного решения (1.5), либо нормального решения (1.7). С алгоритмической точки зрения, безотносительно конкретных реализаций в обоих случаях следует найти ортогональную проекцию f в $\operatorname{im} A$, а затем, если это необходимо, ортогональную проекцию $\bar{u}$ в $\operatorname{im} A^*$. Оба этих этапа в той или иной мере могут быть основаны на разложениях (1.3).

В задаче (1.1) речь может идти также о нахождении D-обобщенного либо D-нормального решения. Пусть $D = D^* > 0$ — линейный ограниченный в H^* оператор. Тогда D порождает в H^* D-норму: $\|u\|_D^2 = (Du, u)$, $u \in H^*$, и при определении обобщенного решения задачи (1.1) в (1.4) можно вместо $J(u)$ взять $J(u, D) = \|Au - f\|_D^2$ — обобщенный функционал метода наименьших квадратов. Итак, для D-обобщенного решения задачи (1.1) имеем

$$\bar{u}(D) : J(u, D) \longrightarrow \min, \quad u \in H^*. \tag{1.8}$$

Элемент $\bar{u}(D)$ из (1.8) с минимальной D-нормой определяет D-нормальное обобщенное решение задачи (1.1).

Нормальное $\bar{u}^* \in \operatorname{im} A^*$ и D-нормальное $\bar{u}^*(D) \in \operatorname{im} A^*$ решения задачи (1.1), вообще говоря, не совпадают. Поясним сказанное. Переход от (1.4) к (1.8) можно формально связать с переходом

$$Au = f \to D^{\frac{1}{2}} A u = D^{\frac{1}{2}} f \to D^{\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}} (D^{\frac{1}{2}} u) = \bar{f} \to \bar{A} v = \bar{f}, \tag{1.9}$$

и оператор $\bar{A} = D^{\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}$ подобен A. Тогда

$$J(u, D) \equiv \|Au - f\|_D^2 = \|\bar{A} v - \bar{f}\|^2 = J(v),$$

а для $\bar{u}(D)$ из (1.8) формально имеем $\bar{v} = D^{\frac{1}{2}} \bar{u}(D)$, где

$$\bar{v} : J(v) = \|\bar{A} v - \bar{f}\|^2 \longrightarrow \min, \ \ v \in H^*. \tag{1.10}$$

Но множество D-обобщенных решений $\bar{u}(D)$ из (1.8) не обязано совпадать с множеством обобщенных (в обычном смысле) решений $\bar{v}$ из (1.10), т. е. задачи (1.8) и (1.10) в общем случае не являются эквивалентными. Термин «эквивалентность» в том же смысле используется и для операторных уравнений. Тогда, если в (1.1) $f_2 = 0$, то задачи

$$Au = f, \quad D^{\frac{1}{2}} Au = D^{\frac{1}{2}} f \tag{1.11}$$

в переходе (1.9) эквивалентны. В несовместном случае для эквивалентности задач из (1.11) необходимым и достаточным является условие $D \ker A^* \subseteq \ker A^*$.

Классическим эквивалентным переходом (1.11) для несовместной задачи (1.1) является так называемая трансформация Гаусса

$$Au = f \longrightarrow A^*Au = A^*f. \tag{1.12}$$

Преобразованная в (1.12) задача всегда эквивалентна исходной (1.1) и совместна при любых $f \in H^*$. Обобщенные нормальные решения задач из (1.12) совпадают. Практическое использование трансформации Гаусса (1.12) в вычислительных процессах обычно лимитируется прежде всего слишком большим по сравнению с (1.1) числом обусловленности преобразованной задачи в ортогональном дополнении к $\ker A$. Но именно этому подпространству принадлежит нормальное обобщенное решение исходной задачи (1.1).

В дальнейшем для достаточно важного в приложениях класса задач (1.1) (эллиптических задач) мы рассмотрим итерационные методы нахождения обобщенного (1.5) или нормального (1.7) решений. Эти методы основаны на трансформациях Гаусса для некоторых вспомогательных сопряженных задач. Однако обусловленность задач, для которых непосредственно используются итерационные методы, та же, что и обусловленность исходной задачи (1.1) в $\operatorname{im} A^*$.

Предварительно, следуя [2], рассмотрим в самых общих чертах те проблемы, которые возникают при использовании двухслойных итерационных методов при нахождении обобщенного или нормального решений задачи (1.1).

Зададим в H^* линейный невырожденный оператор $B : H^* \to H^*$. Экономичные неявные ($B \neq E^*$, $E^*v = v, v \in H^*$) двухслойные итерационные методы для задачи (1.1) будем записывать в каноническом виде [2]:

$$B\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau_{m+1}} + Au^m = f, \quad f \in H^*,\ u^0 \in H^*. \tag{1.13}$$

Если $\ker A = 0$, то задача (1.1) однозначно разрешима при любой правой части $f \in H^*$ и разработана достаточно общая теория [2–5] итерационных методов решения задачи (1.1), в том числе и методов типа (1.13). Эта теория связана с вопросами сходимости, оптимизации, а также с принципами построения экономичных B при минимально возможном задании априорной информации относительно A и B.

Итак, пусть $\ker A \neq 0$. Воспользуемся ортогональными разложениями (1.3). Тогда

$$B\frac{u_1^{m+1} - u_1^m}{\tau_{m+1}} + B\frac{u_2^{m+1} - u_2^m}{\tau_{m+1}} + Au_1^m = f_1 + f_2, \quad u^0 = u_1^0 + u_2^0. \tag{1.14}$$

Как и в [2], предположим, что

$$B \ker A \subseteq \ker A^*, \quad B \operatorname{im} A^* \subseteq \operatorname{im} A. \tag{1.15}$$

Из (1.14), (1.15) следует, что задача (1.13) распадается на две независимые задачи

$$B\frac{u_1^{m+1}-u_1^m}{\tau_{m+1}}+Au_1^m=f_1,\quad u_1^0\in\operatorname{im}A^*,\tag{1.16}$$

$$B\frac{u_2^{m+1}-u_2^m}{\tau_{m+1}}=f_2,\quad u_2^0\in\ker A.\tag{1.17}$$

Случай 1. Исходная задача (1.1) совместна: $f_2=0$. Положим $u^0=A^*v$, $v\in H^*$. Тогда $u^0\in\operatorname{im}A^*$ и $u_2^0=0$. Из (1.17) получаем $u_2^m=0$ для $m=1,2,\dots$, и все сводится к (1.16). В качестве почти очевидного следствия из (1.15) имеем

$$B^{-1}\ker A^*\subseteq\ker A,\quad B^{-1}\operatorname{im}A\subseteq\operatorname{im}A^*.\tag{1.18}$$

Условия (1.15), (1.18) позволяют утверждать, что из сходимости (1.16) следует сходимость (1.13) к нормальному обобщенному решению (1.7) задачи (1.1).

При исследовании сходимости и оптимальности (1.16) оператор шага $S_m=(E^*-\tau_mB^{-1}A)$ и разрешающий оператор $T_{m,0}=S_m\dots S_1$ можно изучать не в H^*, а в $\operatorname{im}A^*$. В этом подпространстве оператор A является невырожденным, что позволяет в полной мере использовать нужные результаты общей теории для невырожденного случая.

С другой стороны, использование «стандартных» экономичных операторов B в (1.13) лимитируется теперь не только условиями, обеспечивающими сходимость, но и условиями (1.15). Сама по себе проверка этих дополнительных условий для каждого конкретного B становится не очень простой проблемой. Выбор B в (1.13) можно подчинить легко проверяемым, достаточным для выполнения (1.15) условиям, например, $AB=BA$. Но подобного рода условиям заведомо не удовлетворяют многие весьма эффективные в невырожденном случае итерационные методы типа (1.13) с экономичными операторами B.

Случай 2. Исходная задача (1.1) несовместна, т. е. $f_2\neq0$. Снова полагаем $u^0=A^*v$, $v\in H^*$, что дает $u_2^0=0$. Тогда из (1.17) следует, что

$$u_2^{m+1}=\left(\sum_{i=1}^{m+1}\tau_i\right)B^{-1}f_2.\tag{1.19}$$

Если теперь положить [2, 6, 7]

$$\tau_{m+1}=-\sum_{i=1}^{m}\tau_i,\tag{1.20}$$

то из (1.19) вытекает равенство $u_2^{m+1}=0$. Поэтому для сходящегося итерационного метода (1.16) условие (1.20) позволяет задать проекцию u^{m+1} из (1.13) в подпространство $\operatorname{im}A^*$. Проблемы с выбором B здесь те же, что и в совместном случае. В этой связи отметим, что в [6] при исследовании (1.13) для несовместной задачи (1.1) используются явно не сформулированные предположения (1.15). Поэтому можно согласиться с [8, с. 6], где результаты [6] для несовместной задачи охарактеризованы как анонсированные. Возникающие дополнительные проблемы при $f_2\neq0$ могут быть связаны также и с оценкой нормы разрешающего оператора $T_{m+1,0}$ в $\operatorname{im}A^*$. Наличие такой оценки определяет «стоимость алгоритма» проектирования u^{m+1} в $\operatorname{im}A^*$ посредством (1.20) [2, 7].

И, наконец, отметим, что в [7–11] для задачи (1.1) с вырожденным оператором A изучались итерационные методы (1.13), основанные на фактическом нахождении разложений (1.3). По существу, в этих методах указан способ построения проекторов из H^* в $\operatorname{im} A$, $\operatorname{im} A^*$. Как совершенно справедливо отмечено в [8, с. 10], «эти методы не свободны от недостатков, прежде всего в части точности построения используемых ортогональных разложений». Для только что упомянутых методов именно эти вопросы являются принципиальными [11, с. 24] и нуждаются в дальнейшем изучении.

§ 2. Сопряженно-факторизованная задача (1.1)

Наряду с конечномерным евклидовым пространством $H^*(u)$, $u \in H^*$, введем в рассмотрение конечномерное евклидово пространство $H(\xi)$, $\xi \in H$. Зададим линейный ограниченный оператор $R : H^* \to H$. Сопряженный к R оператор $R^* : H \to H^*$ определяется обычным образом

$$(\xi, Ru)_H = (R^*\xi, u)_{H^*}, \quad u \in H^*,\ \xi \in H. \tag{2.1}$$

С помощью R, R^* можно задать сопряженно-факторизованные операторы $A : H^* \to H^*$, $P : H \to H$, где

$$A = R^*R = A^* \geq 0, \quad P = RR^* = P^* \geq 0. \tag{2.2}$$

С операторами A и P связаны следующие разложения H^* и H в прямую сумму ортогональных подпространств:

$$\begin{aligned} H^* &= \operatorname{im}(R^*R) \oplus \ker(R^*R) = \operatorname{im} R^* \oplus \ker R = H_1^* \oplus H_2^* \\ H &= \operatorname{im}(RR^*) \oplus \ker(RR^*) = \operatorname{im} R \oplus \ker R^* = H_1 \oplus H_2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Оператор A является положительно определенным в подпространстве $H_1^* = \operatorname{im} R^*$, оператор P — в подпространстве $H_1 = \operatorname{im} R$. Ненулевые собственные значения $\lambda_1^2, \dots, \lambda_s^2$ операторов A и P совпадают, а нулевые отличаются лишь кратностью. Действие операторов R, R^* можно описать в терминах сингулярных базисов

$$R\varphi_i = \begin{cases} \lambda_i \psi_i, & i \leq s, \\ 0, & \dim H^* \geq i > s, \end{cases} \qquad R^*\psi_i = \begin{cases} \lambda_i \varphi_i, & i \leq s, \\ 0, & \dim H \geq i > s. \end{cases} \tag{2.4}$$

Ортогональным разложениям (2.3) поставим в соответствие ортогональные разложения элементов u, $f \in H^*$, $\xi \in H$:

$$u = u_1 + u_2, \quad f = f_1 + f_2, \quad \xi = \xi_1 + \xi_2, \tag{2.5}$$

и рассмотрим задачу о решении операторного уравнения

$$Au \equiv R^*Ru = f, \quad u \in H^*,\ f \in H^*. \tag{2.6}$$

Основным для дальнейшего является случай, когда в (2.6) $A \geq 0$. Этот случай реализуется, например, когда в (2.4) $\dim H^* > \dim H$. В (2.6) можно искать либо обобщенное решение $\bar{u}$:

$$R^*R\bar{u} = f, \quad f \in H_1^* \longleftrightarrow f = f_1, \tag{2.7}$$

либо нормальное обобщенное решение $\bar{u}^*$:

$$R^*R\bar{u}^* = f, \quad f \in H_1^*, \quad \bar{u}^* \in H_1^* \longleftrightarrow \bar{u}^* = \bar{u}_1. \tag{2.8}$$

Вместо задачи (2.6) рассмотрим более общую задачу

$$R^*\xi = f,\ \ f \in H^*,\ \ Ru = \xi,\ \ \xi \in H \longleftrightarrow \begin{pmatrix} R^* & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ \xi \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Переход от операторного уравнения (2.6) к системе операторных уравнений (2.9) имеет принципиальный характер. Теперь следует определить пару элементов $u \in H^*$, $\xi \in H$, которые в том или ином смысле являются решениями операторных уравнений из (2.9). В принципе, в (2.9) речь может идти

— о нахождении при заданном f обобщенного либо нормального решения задачи
$$R^*\xi = f, \quad f \in H^*; \tag{2.10}$$

— о нахождении при заданном ξ обобщенного либо нормального решения задачи
$$Ru = \xi, \quad \xi \in H. \tag{2.11}$$

Задача (2.9) фиксирует естественный порядок определения пары элементов $\xi \in H$, $u \in H^* :\ \ \xi \to u$, в то время как в (2.6) реализуется порядок $u \to \xi$.

Лемма 1 [1]. *Задачи $R^*\xi = f$ и $RR^*\xi = Rf$ эквивалентны для любых $f \in H^*$. Нормальные решения этих задач $\bar{\xi}^*$ совпадают и $\bar{\xi}^* \in H_1$.*

Лемма 2 [1]. *Задачи $Ru = \xi$ и $R^*Ru = R^*\xi$ эквивалентны для любых $\xi \in H$. Нормальные решения этих задач $\bar{u}^*$ совпадают и $\bar{u}^* \in H_1^*$.*

Лемма 3. *Если $\bar{\xi}^*$ — нормальное решение задачи (2.10), то $R^*\bar{\xi}^*$ задает ортогональную проекцию f в H_1^*.*

Леммы 1–3 устанавливают связь задачи (2.9) с (2.8) и задают алгоритм решения задачи (2.8) $\xi \to u$:

$$RR^*\xi = Rf, \quad \xi \in H_1,\ f \in H^*, \tag{2.12}$$

затем

$$R^*Ru = R^*\xi, \quad \xi \in H_1,\ u \in H_1^*. \tag{2.13}$$

Очевидно, что обусловленность задач (2.6), (2.8), (2.13) в H_1^* одна и та же и совпадает с обусловленностью задачи (2.12) в H_1. В этом, собственно, и заключается смысл перехода от (2.6) к (2.9): трансформация Гаусса для вспомогательной задачи (2.11) приводит к (2.8).

Пусть $Q : H \to H^*$ — линейный ограниченный оператор. Для задачи (2.12) рассмотрим двухслойный итерационный метод

$$C\frac{\xi^{m+1} - \xi^m}{\tau_{m+1}} + RR^*\xi^m = Rf, \quad v \in H^*, \quad \xi^0 = Rv, \tag{2.14}$$

$$C = \alpha E + \omega RQ, \quad E\xi = \xi,\ \ \alpha > 0,\ \ \omega \geq 0,\ \ C : H \to H. \tag{2.15}$$

Лемма 4. *Итерационный метод (2.14), (2.15) не выводит из H_1, т. е. $\xi^m \in H_1$ для $m = 0, 1, \ldots$.*

Доказательство практически очевидно. Пусть ψ — произвольный элемент из H_2, т. е. $R^*\psi = 0$. Тогда

$$(\psi, C(\xi^{m+1} - \xi^m)) = \alpha(\psi, \xi^{m+1} - \xi^m)$$

и поэтому

$$(\psi, \xi^{m+1}) = (\psi, \xi^m) = \cdots = (\psi, \xi^0) = (\psi, Rv) = (R^*\psi, v) = 0.$$

Следствие 1. *Если итерационный метод* (2.14), (2.15) *является сходящимся, то предельный элемент совпадает с нормальным решением* $\bar{\xi}^*$ *задачи* (2.12).

Пусть $M : H^* \to H$ — линейный ограниченный оператор. Для задачи (2.13) рассмотрим двухслойный итерационный метод

$$B\frac{u^{k+1}-u^k}{\tau_{k+1}} + R^*Ru^k = R^*\xi^{m+1}, \quad u^0 = R^*\xi^{m+1}, \tag{2.16}$$

$$B = \alpha E^* + \omega R^* M, \;\; E^*u = u, \;\; \alpha > 0, \;\; \omega \geq 0, \;\; B: \;\; H^* \to H^*. \tag{2.17}$$

Лемма 5. *Итерационный метод* (2.16), (2.17) *не выводит из* H_1^*, *т. е.* $u^k \in H_1^*$ *для* $k = 0, 1, \dots$.

Пусть итерационный метод (2.16), (2.17) сходится. Тогда предельный элемент $\bar{u}^m \in H_1^*$ не зависит от u^0, но зависит от $R^*\xi^m$, ибо $R^*R\bar{u}^m = R^*\xi^m$. В силу леммы 2 последнее соотношение эквивалентно равенству $R\bar{u}^m = \xi^m$. Поэтому для сходящихся итерационных методов (2.14), (2.15) и (2.16), (2.17) $\bar{\xi}^m \to \bar{\xi}^*$, $\bar{u}^m \to \bar{u}^*$. Очевидно, что при этом $R\bar{u}^* = \bar{\xi}^*$.

Утверждение леммы 5 остается справедливым, если в (2.16) $u^0 = R^*\eta$, $\eta \in H$. Действительно, по определению $\varphi \in H_2^*$, если $R\varphi = 0$. Но тогда $(\varphi, u^0) = (\varphi, R^*\eta) = (R\varphi, \eta) = 0$. Сделанный в (2.16) выбор u^0 объясняется стремлением в случае сходящегося итерационного метода (2.14), (2.15) получить в (2.16) «достаточно хорошее» начальное приближение $u^0 = R^*\xi^{m+1}$ к нормальному обобщенному решению $\bar{u}^*$ задачи (2.13). В точности те же соображения о «хорошем начальном приближении» при выборе ξ^0 в (2.14) немедленно приводят к циклическому варианту (2.14), (2.16):

$$\xi^0 = Rv \to (2.14) \to u^0 = R^*\xi^{m+1} \to (2.16) \to \xi^0 = Ru^{k+1} \to (2.14) \to \dots. \tag{2.18}$$

Если $m \geq 2$, $k \geq 2$, то указанное в (2.18) согласование начальных данных ξ^0, u^0 не приводит к увеличению вычислительных затрат в (2.14), (2.16).

Замечание 1. Циклический алгоритм (2.18) основан на применении трансформации Гаусса к системе (2.9):

$$\begin{pmatrix} R^* & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ \xi \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R^* & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ \xi \end{pmatrix},$$

что и приводит к методу раздельного определения ξ, u (2.12), (2.13):

$$RR^*\xi = Rf \longrightarrow R^*Ru = R^*\xi. \tag{2.19}$$

Если же исходить из системы (2.9), записанной в виде

$$R^*\xi = f, \quad Ru = \xi \longleftrightarrow \begin{pmatrix} R^* & 0 \\ -E & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

то трансформация Гаусса для (2.20) дает соотношения

$$RR^*\xi + (\xi - Ru) = Rf, \quad R^*Ru = R^*\xi. \tag{2.21}$$

Задачи (2.19) и (2.21) формально различаются и совпадают при $\xi = Ru$, что, в свою очередь, эквивалентно второму соотношению из (2.19), (2.21). Такое различие между (2.19) и (2.21), вообще говоря, должно приводить к формально отличным от (2.14)–(2.18) итерационным методам определения ξ^m, u^k. В этой связи рассмотрим следующую достаточно очевидную модификацию (2.14), (2.16), которую будем называть согласованной. А именно, $m = 0$:

$$C\frac{\xi^1 - \xi^0}{\tau_1} + RR^*\xi^0 + (\xi^0 - Ru^0) = Rf, \quad \xi^0 = Rv, \tag{2.22}$$

$$B\frac{u^1 - u^0}{\tau_1} + R^*Ru^0 = R\xi^1, \quad u^0 = v. \tag{2.23}$$

Согласование начальных данных в (2.22) и (2.23) приводит к тому, что $\xi^0 = Ru^0$ и поэтому (2.22) совпадает с (2.14). Для $m \geq 1$ положим

$$C\frac{\xi^{m+1} - \xi^m}{\tau_{m+1}} + RR^*\xi^m + (\xi^m - Ru^m) = Rf, \quad \xi^m = Ru^m, \tag{2.24}$$

$$B\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau_{m+1}} + R^*Ru^m = R^*\xi^{m+1}, \quad u^m = R^*\xi^{m+1}. \tag{2.25}$$

Пересчет начальных данных в (2.24) опять приводит к тому, что (2.24) совпадает с (2.14). Очевидно, что для предельных элементов $\bar{\xi}^*$, $\bar{u}^*$ сходящегося согласованного итерационного метода (2.22)–(2.25) соотношения (2.19) и (2.21) совпадают. Поэтому при согласованном способе задания начальных данных можно не различать (2.14) и (2.24). Все же приведем один из возможных итерационных методов определения $\bar{\xi}^*$, $\bar{u}^*$, основанный на (2.21):

$$C\frac{\xi^{m+1} - \xi^m}{\tau_{m+1}} + RR^*\xi^m + (\xi^{m+1} - Ru^k) = Rf, \quad \xi^0 = Rv, \tag{2.26}$$

$$B\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau_{k+1}} + R^*Ru^k = R^*\xi^{m+1}, \quad u^0 = R^*\xi^{m+1}. \tag{2.27}$$

Реализация (2.26), (2.27) возможна и в циклическом варианте:

$$\xi^0 = Rv \to (2.26) \to u^0 = R^*\xi^{m+1} \to (2.27) \to \xi^0 = Ru^{k+1} \to (2.26)\ldots. \tag{2.28}$$

Какому из вариантов (2.18) или (2.28) следует отдать предпочтение? На этот вопрос можно ответить только после получения достаточно точных оценок скорости сходимости для (2.18) и (2.28).

Последовательность ξ^m из (2.14), (2.15) в предлагаемом методе определения нормального обобщенного решения $\bar{u}^*$ задачи (2.6) такова, что $\xi^m \in H_1$. Это условие гарантирует существование элемента $u^m \in H^*$ такого, что $Ru^m = \xi^m$. Поэтому (2.14) можно переписать так:

$$CR\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau_{m+1}} + RR^*Ru^m = Rf, \quad u^0 = v. \tag{2.29}$$

Оператор $\widetilde{B} : H^* \to H^*$ определим с помощью оператора C из (2.15) следующим образом:

$$CR = R\widetilde{B}. \tag{2.30}$$

Из (2.29), (2.30) вытекает, что

$$R\left[\widetilde{B}\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau_{m+1}} + R^*Ru^m - f\right] = 0, \quad u^0 = v. \tag{2.31}$$

Если либо $\ker R = 0$, либо

$$\left(\widetilde{B}\frac{u^{m+1}-u^m}{\tau_{m+1}} + R^*Ru^m - f\right) \in H_1^*, \tag{2.32}$$

то вместо (2.31) будем иметь

$$\widetilde{B}\frac{u^{m+1}-u^m}{\tau_{m+1}} + R^*Ru^m = f, \quad u^0 = v. \tag{2.33}$$

Анализ задачи (2.33), приведенный в § 1, позволяет сделать вывод, что независимо от выбора $\widetilde{B}$ условие (2.32) может выполняться только для $f \in H_1^*$.

Это приводит к совместной задаче (2.6). Последовательность ξ^m итерационного метода (2.14), (2.15) порождает некоторую задаваемую пока неявно последовательность u^m такую, что $Ru^m = \xi^m$. Приведем экономичный способ построения этой последовательности. Рассмотрим итерационный метод

$$\begin{gathered}\frac{\xi^{m+1}-\xi^m}{\tau_{m+1}} + Rw^{m+1} = 0, \quad \widetilde{B}w^{m+1} = r^m, \\ r^m = R^*\xi^m - f,\ \ \xi^0 = Rv, \quad v \in H^*,\ \ f \in H_1^*.\end{gathered} \tag{2.34}$$

Лемма 6. *Итерационный метод* (2.34) *не выводит из* H_1 *для любого невырожденного* $\widetilde{B} : H^* \to H^*$ *и* $f \in H^*$.

Лемма 7. *Если* $f \in H_1^*$, *то для любого невырожденного* $\widetilde{B} : H^* \to H^*$ *задачи*

$$RR^*\xi = Rf, \quad R\widetilde{B}^{-1}R^*\xi = R\widetilde{B}^{-1}f \tag{2.35}$$

эквивалентны.

Доказательство очевидно, поскольку все сводится к эквивалентности задач $R^*\xi = f$ и $\widetilde{B}^{-1}R^*\xi = \widetilde{B}^{-1}f$ (ср. с (1.11)).

Допустим, что итерационный метод (2.24) сходится. Тогда в силу лемм 6, 7 предельным элементом является $\bar{\xi}^* \in H_1$ — нормальное обобщенное решение задачи (2.10). Поэтому найдется хотя бы один элемент $\bar{u} \in H^*$ такой, что

$$R\bar{u} = \bar{\xi}^*. \tag{2.36}$$

Теорема 1. *Для* $\bar{u}$ *из* (2.36) *справедливо представление*

$$\bar{u} = v - \sum_{j=1}^{\infty}\tau_j\widetilde{B}^{-1}(R^*\xi^j - f), \tag{2.37}$$

где v, τ_j, ξ^j *определены в* (2.34).

Доказательство. Определим последовательность u^m следующим образом (ср. с (2.34)):

$$\frac{u^{m+1}-u^m}{\tau_{m+1}} + w^{m+1} = 0, \quad u^0 = v. \tag{2.38}$$

Из (2.34), (2.38) следует, что если $Ru^m = \xi^m$, то и $Ru^{m+1} = \xi^{m+1}$. Действительно,

$$Ru^{m+1} - Ru^m = -\tau_{m+1}Rw^{m+1} = \xi^{m+1} - \xi^m,$$

и остается принять во внимание согласованный способ задания начальных данных в (2.34) и (2.38). Кроме того,

$$u^m = v - \sum_{j=1}^{m}\tau_j\widetilde{B}^{-1}(R^*\xi^j - f) = v - \sum_{j=1}^{m}\tau_j\widetilde{B}^{-1}(R^*Ru^j - f), \tag{2.39}$$

и справедливость (2.37) устанавливается предельным переходом в (2.39).

Следствие 2. *Для совместной задачи* (2.6) *сходящийся в* H_1 *итерационный процесс* (2.34): $\xi^m \to \bar{\xi}^*$ *порождает сходящийся в* H^* *итерационный процесс* (2.38): $u^m \to \bar{u}$. *При этом*

$$R^*\bar{\xi}^* = f_1, \quad R^*R\bar{u} = f_1. \tag{2.40}$$

Подведем итог сказанному. Сходящиеся итерационные методы (2.14), (2.16) определяют алгоритм нахождения нормального обобщенного решения $\bar{u}^*$ несовместной задачи (2.6). При этом на каждой итерации следует обратить: в H_1 — оператор C из (2.15), в H_1^* — оператор B из (2.17). Оценка точности определения $\bar{u}^*$ связана с оценками скорости сходимости итерационных процессов (2.14) в H_1 и (2.16) в H_1^*. Получение таких оценок требует отдельного исследования, поскольку это связано с конкретным выбором оператора Q в (2.15) и оператора M в (2.17) для конкретной задачи (2.6). Говоря о конкретной задаче (2.6), мы имеем в виду, что в (2.6) следует указать область определения и область значений для операторов R и R^*. Отметим, что если в (2.15), (2.17) $\alpha = 1$, $\omega = 0$, то мы имеем дело с явными итерационными методами (2.14), (2.15). При этом в (2.14) $A = A^* > 0$, а в (2.16) $P = P^* > 0$. Поэтому как в (2.14), так и в (2.16) при $\alpha = 1$, $\omega = 0$ можно использовать явные безусловно сходящиеся итерационные методы вариационного типа: метод скорейшего спуска, метод минимальных невязок, метод сопряженных градиентов и т. п. При наличии априорной информации о границах спектра (для A и P эти границы совпадают) в (2.14) и в (2.16) можно использовать также явный чебышевский процесс с одним и тем же устойчивым набором итерационных параметров τ_j. Нужные оценки скорости сходимости для только что перечисленных методов можно найти в [2–5].

Задачу (2.6) можно рассматривать как дискретный (сеточный) аналог непрерывной краевой задачи для сильно эллиптических систем второго порядка, имеющих дивергентную форму [12]:

$$(Tu)(x) \equiv -\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} a_\alpha(x, w(x)) = f(x), \;\; L : u \to w = \operatorname{grad} u. \tag{2.41}$$

При соответствующем функционально-аналитическом описании [13, гл. II] краевую задачу для эллиптической системы (2.41) можно свести к задаче о решении операторного уравнения

$$Su \equiv L^*KLu = f(x), \quad K : y \to \{a_1(x, y), \ldots, a_n(x, y)\}. \tag{2.42}$$

В (2.42) S является [13, с. 55] «энергетическим расширением» эллиптического оператора T. Именно задача (2.42) допускает эквивалентное вариационное описание:

$$u : \;\; J(v) \longrightarrow \min, \quad J(v) = (Sv, v) - 2(v, f).$$

В этой связи в [14] оператор S называется оператором «вариационного типа».

Принципиальным при дискретизации задачи (2.42), т. е. при переходе от (2.42) к (2.6), является то обстоятельство, что сеточная аппроксимация R оператора $L(R \sim L)$ и сеточная аппроксимация R^* оператора $L^*(R^* \sim L^*)$ не произвольны, а удовлетворяют соотношению (2.1)

$$(\xi, Ru)_H = (R^*\xi, u)_{H^*} \quad u \in H^*, \; \xi \in H.$$

Это соотношение следует понимать так: конкретный выбор аппроксимации $R \sim L$ *однозначно* определяет аппроксимацию $R^* \sim L^*$ (и наоборот!). Поэтому дискретная задача (2.6) сохраняет сопряженно-факторизованную структуру исходной непрерывной задачи (2.42). Для излагаемых в этом параграфе алгоритмов именно эта структура позволяет в достаточно прозрачной форме реализовать основные идеи метода ортогональных проекций [15, 16].

Формально вместо (2.6) мы должны были бы рассмотреть задачу $R^* K_h R u = f$, где K_h — некоторая аппроксимация оператора K. Если считать, что $K_h = K_h^* > 0$, $K_h : H^* \to H^*$, то, определив операторы $\widetilde{R} : H^* \to H$, $\widetilde{R}^* : H \to H^*$ следующим образом:

$$\widetilde{R} = K_h^{\frac{1}{2}} R, \quad \widetilde{R}^* = \bigl(K_h^{\frac{1}{2}} R\bigr)^* = R^* K_h^{\frac{1}{2}},$$

мы приходим к эквивалентной задаче $\widetilde{R}^* \widetilde{R} u = f$ и все сводится только к смене обозначений в (2.6).

Операторная задача (2.42) не связана именно с эллиптическим оператором второго порядка из (2.41). К (2.42) приводится также и краевая задача для системы эллиптических уравнений:

$$(Tu)(x) = \sum_{|\alpha| \le l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, w(x)) = f(x), \;\; L : u \to w = \{D^\alpha u\}. \tag{2.43}$$

В излагаемых в этом параграфе алгоритмах различие между (2.41) и (2.43) несущественно. Важно, что разные краевые задачи могут быть представлены в виде (2.42). Однако часть результатов следующего параграфа справедлива, если S в (2.42) является энергетическим расширением оператора T из (2.41). Поэтому в дальнейшем ограничимся именно этим случаем.

§ 3. Экономичные неявные итерационные методы решения задачи (2.6)

В общем случае выбор Q в (2.15) и M в (2.5) лимитируется условиями сходимости итерационных процессов (2.14)–(2.17) и существованием экономичных методов обращения операторов C и B. Поэтому любой выбор Q и M всегда является компромиссом между сходимостью методов (2.14)–(2.17) и экономичностью вычислительных реализаций. В этой связи укажем на достаточно общий принцип построения экономичных операторов C и B [3, 17, 18]. Зададимся аддитивными разложениями операторов P и A: $P = \sum P_\alpha, A = \sum A_\alpha$. Тогда «экономичные» операторы C и B выбираются в классе факторизованных:

$$C = \prod_\alpha (E + \omega P_\alpha) = \prod_\alpha C_\alpha, \quad B = \prod_\alpha (E^* + \omega A_\alpha) = \prod_\alpha B_\alpha. \tag{3.1}$$

Теперь обращение C и B сводится к последовательному обращению «более простых» операторов C_α, B_α. Применительно к рассматриваемым здесь методам определения $\bar{u}^*$ операторы C и B должны удовлетворять условиям

$$C : H_1 \to H_1, \quad B : H_1^* \to H_1^*. \tag{3.2}$$

Для итерационных методов (2.14), (2.16) факторизованные операторы (3.1), (3.2) существуют. В самом деле, аддитивному разложению оператора $R = \sum R_\alpha$

соответствует аддитивное разложение сопряженного оператора $R^* = \sum R^*_\alpha$. Поэтому

$$
\begin{aligned}
P = RR^* = R\sum R^*_\alpha = \sum RR^*_\alpha = \sum P_\alpha,\\
A = R^*R = R^*\sum R_\alpha = \sum R^*R_\alpha = \sum A_\alpha
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

и можно положить

$$
C = \prod(E + \omega RR^*_\alpha) = C_1C_2\dots C_n,\ \ B = \prod(E^* + \omega R^*R_\alpha) = B_1B_2\dots B_n. \tag{3.4}
$$

Очевидно, что C и B из (3.4) удовлетворяют условиям (3.2).

Как это следует из (2.29)–(2.33), особую роль в задаче (2.6) играют операторы $\widetilde{B}$ и C, связанные соотношением (2.30). Пусть «экономичный» факторизованный оператор $C:\ \ H_1 \to H_1$ определен с помощью (3.4). Тогда оператор $\widetilde{B}$, удовлетворяющий условию (2.30) $CR = R\widetilde{B}$, выписывается в явном виде:

$$
CR = R\widetilde{B},\quad \widetilde{B} = \prod\bigl(E^* + \omega R^*_\alpha R\bigr). \tag{3.5}
$$

Так как

$$
\sum A_\alpha = R^*\Bigl(\sum R_\alpha\Bigr) = R^*R = \Bigl(\sum R^*_\alpha\Bigr)R = \sum \widetilde{A}_\alpha,
$$

в отличие от B из (3.4) факторизованный оператор $\widetilde{B}$ из (3.5) соответствует аддитивному разложению $A = \widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2$. Отметим также, что

$$
\widetilde{B}^* = B_nB_{n-1}\dots B_1 : H^*_1 \to H^*_1. \tag{3.6}
$$

С другой стороны, «экономичный» факторизованный оператор B из (3.4) порождает факторизованный оператор $\widetilde{C}$ такой, что

$$
R^*\widetilde{C} = BR^*,\quad \widetilde{C} = \prod(E + \omega R_\alpha R^*). \tag{3.7}
$$

При этом

$$
\widetilde{C}^* = C_nC_{n-1}\dots C_1 : H_1 \to H_1. \tag{3.8}
$$

Для совместной задачи (2.6) соотношения (3.4)–(3.8) позволяют существенно упростить алгоритм (2.14)–(2.17) нахождения $\bar{\xi}^*$, $\bar{u}^*$. Действительно, пусть $f \in H^*_1$. Тогда задача (2.10) $R^*\xi = f$ разрешима. Зададим итерационный процесс для определения ξ^m следующим образом:

$$
\frac{\xi^{m+1} - \xi^m}{\tau_{m+1}} + RD^{-1}(R^*\xi^m - f) = 0,\quad \xi^0 \in H_1, \tag{3.9}
$$

с невырожденным оператором $D : H^* \to H^*$. Тогда (3.9) не выводит из H_1. Поэтому задача (2.11) $Ru^m = \xi^m$ разрешима. Зададим итерационный процесс для определения u^m в соответствии с (2.38):

$$
\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau_{m+1}} + D^{-1}(R^*\xi^m - f) = 0,\quad u^0 \in H^*_1. \tag{3.10}
$$

Если $D :\ \ H^*_1 \to H^*_1$, то для совместной задачи (2.6) итерационный процесс (3.10) не выводит из H^*_1. С другой стороны, если в (3.9), (3.10) $\xi^0 = Ru^0$, то в силу теоремы 1 $Ru^m = \xi^m$. Поэтому справедлива

Теорема 2. *Если в* (3.9)

$$\xi^0 = Ru^0, \quad D : H_1^* \to H_1^*, \tag{3.11}$$

то сходящийся ($u^m \to \bar{u}^*$) *в* H_1^* *итерационный процесс* (3.10) *порождает сходящийся* ($\xi^m \to \bar{\xi}^*$) *в* H_1 *итерационный процесс* (3.9). *При этом*

$$(\bar{u}^*, f)_{H^*} = (\bar{\xi}^*, \bar{\xi}^*)_H.$$

Замечание 2. В связи с (3.11) отметим, что в качестве D в (3.9), (3.10) можно взять факторизованный оператор B из (3.4), либо факторизованный оператор $\widetilde{B}^*$ из (3.6) либо, наконец, оператор B из (2.17). Что касается u^0, ξ^0, то в (3.9), (3.10) достаточно положить $u^0 = R^*\eta$, $\xi^0 = RR^*\eta$, $\eta \in H$.

Возможность применения алгоритма (3.9), (3.10) для несовместной задачи (2.6) лимитируется леммой 7. Именно отказ от использования этой леммы при построении вычислительных алгоритмов нахождения $\bar{\xi}^*$, $\bar{u}^*$ приводит к (2.18), (3.2) или к (2.28), (3.2). В (3.9), (3.10) на каждой итерации требуется обратить только *один* оператор D в H_1^*, что для сходящегося метода (3.10) позволяет определить $\bar{\xi}^*$, $\bar{u}^*$. В (2.18), (3.2) или в (2.28), (3.2) на каждой итерации следует обратить *два* оператора: C в H_1 и B в H_1^*, что в случае сходящихся методов (2.14), (2.16) приводит к $\bar{\xi}^*$, $\bar{u}^*$. Такова с точки зрения вычислительных затрат дополнительная плата за несовместность задачи (2.6).

Если, наконец, задача (2.6) однозначно разрешима, то $\ker R = 0$. В этом случае в (3.11) существенным является только способ согласования начальных данных u^0, ξ^0. Теперь достаточно положить $u^0 = v$, $\xi^0 = Rv$, $v \in H^*$. Тогда (3.9), (3.10) определяют в H, H^* эквивалентные в силу $Ru^m = \xi^m$ итерационные процессы:

$$R^*Ru^m - f = r^m = R^*\xi^m - f, \tag{3.12}$$

$$Dw^{m+1} = r^m, \tag{3.13}$$

$$u^{m+1} = u^m - \tau_{m+1}w^{m+1}, \quad \xi^{m+1} = \xi^m - \tau_{m+1}Rw^{m+1}. \tag{3.14}$$

Итерационный процесс (3.12)–(3.14) позволяет для задачи (2.9) $R^*\xi = f$, $Ru = \xi$ осуществить либо реализацию $u \to \xi$, либо реализацию $\xi \to u$. В первом случае вместо второй формулы в (3.14) можно сразу использовать $\xi^{m+1} = Ru^{m+1}$. Во втором случае первая из формул (3.14) эквивалентна (ср. с (2.37)) соотношению $u^{m+1} = R^{-1}\xi^{m+1}$. Отметим, что именно вычислительный алгоритм (3.12)–(3.14) использовался в [19–22] как основа при изучении экономичных сеточных методов в конкретных стационарных и нестационарных задачах механики сплошной среды.

Все предыдущие рассмотрения проводились в предположении, что тот или иной итерационный процесс является сходящимся. В этой связи рассмотрим в самых общих чертах вопрос о сходимости неявного двухслойного стационарного итерационного метода

$$B\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau} + R^*Ru^m = f, \quad u^0 = v \in H^*. \tag{3.15}$$

Как мы видели, само построение экономичного факторизованного оператора B в (3.15) существенно связано с различными аддитивными разложениями оператора $A = R^*R = A^* \geq 0$. В самом общем случае

$$\begin{gathered} A = \Big(\sum_\alpha R_\alpha^*\Big)\Big(\sum_\alpha R_\alpha\Big) = M + D + N, \\ M = \sum_{\alpha>\beta} R_\alpha^* R_\beta, \quad D = \sum_{\alpha=\beta} R_\alpha^* R_\beta, \quad N = \sum_{\alpha<\beta} R_\alpha^* R_\beta. \end{gathered} \tag{3.16}$$

Замечание 3. Следует отметить, что элементы $v \in H^*$, $\eta \in H$ в общем случае являются тензорными функциями векторного аргумента $x = (x_1, \dots, x_\alpha, \dots, x_n)$, где n — число пространственных переменных. Если иметь в виду конкретные приложения, то можно ограничиться случаем $1 \le \alpha$, $\beta \le 2$ (двумерная задача) или случаем $1 \le \alpha$, $\beta \le 3$ (трехмерная задача).

Нетрудно видеть, что по определению

$$D = D^* \ge 0, \quad M^* = N. \tag{3.17}$$

Поэтому аддитивное разложение оператора D:

$$D = D_1 + D_2, \quad D_1^* = D_2 \tag{3.18}$$

порождает аддитивное разложение оператора R^*R:

$$R^*R = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_1 = M + D_1, \quad \Lambda_2 = D_2 + N, \quad \Lambda_1^* = \Lambda_2. \tag{3.19}$$

Если теперь положить в (3.15)

$$B = (E^* + \omega\Lambda_1)(E^* + \omega\Lambda_2), \tag{3.20}$$

то мы приходим к операторной форме попеременно треугольного метода [2–5, 23]. Поскольку

$$B = E^* + \omega(\Lambda_1 + \Lambda_2) + \omega^2\Lambda_1\Lambda_2,$$

из $A = R^*R = A^* \ge 0$ следует, что $B = B^* > 0$. Очевидно также, что при $\omega \ge 0,5\tau$ выполняется необходимое и достаточное условие сходимости итерационного метода (3.15)–(3.20) в H^* [2]:

$$B \ge 0,5\tau R^*R. \tag{3.21}$$

В качестве следствия получаем, что для совместной задачи (2.6) использование B из (3.20) в качестве D в (3.12)–(3.14) дает возможность определить $\bar{u}$, $\bar{\xi}^*$.

Представление A в виде (3.19) связано с возможностью представления D в виде (3.18). Но D есть сумма одномерных операторов $R_\alpha^* R_\alpha$. Каждый такой оператор допускает [2] разложение (3.18). Поэтому для совместной задачи (2.6) в (3.12)–(3.14) можно использовать также факторизованный оператор

$$\widetilde{D} = (E^* + \omega D_1)(E^* + \omega D_2). \tag{3.22}$$

Как и в [24], можно показать, что итерационный метод (3.15), (3.22) сходится. Используя [24, 25], можно получить оценки скорости сходимости для (3.15), (3.20) и (3.15), (3.22). Пусть, наконец, в (3.15) B задается факторизованным оператором из (3.4). Пусть в (2.6) элемент $u \in H^*$ является скалярной функцией векторного аргумента $x = (x_1, x_2)$. Как доказано в [21], существуют такие аппроксимации операторов $\operatorname{div} \sim R^*$ и $-\operatorname{grad} \sim R$, что $R^*R_\alpha = R_\alpha^* R$. Это означает, что

$$B = (E^* + \omega A_1)(E^* + \omega A_2), \quad A_\alpha = A_\alpha^*. \tag{3.23}$$

Но $B : H_1^* \to H_1^*$ и в этом подпространстве $A > \delta E^*$. Поэтому если $A_1 \ge \delta_1 E^*$, $A_2 \ge \delta_2 E^*$ и $\delta_1 + \delta_2 > 0$, то итерационный метод (3.15), (3.23) при $\omega = 0,5\tau$ является сходящимся [2]. Это дает возможность применить B из (3.23) в (3.12)–(3.14) для определения $\bar{u}^*$, $\bar{\xi}^*$ в случае совместной задачи (2.6). В силу $R^*R_\alpha = R_\alpha^* R$ имеем также

$$\begin{aligned} RB = R(E^* + 0,5\tau R^*R_1)(E^* + 0,5\tau R^*R_2) \\ = R(E^* + 0,5\tau R_1^*R)(E^* + 0,5\tau R_2^*R) \\ = (E + 0,5\tau RR_1^*)(E + 0,5\tau RR_2^*)R = CR, \end{aligned}$$

где $C : H_1 \to H_1$ совпадает с C из (3.4). Отсюда вытекает сходимость алгоритма (2.18), (3.4) или (2.28), (3.4) нахождения $\bar{\xi}^*$, $\bar{u}^*$ для несовместной задачи (2.6).

Пользуюсь случаем выразить признательность сотрудникам кафедры вычислительной математики НГУ Ю. М. Лаевскому, А. М. Мацокину и С. Б. Сорокину за конструктивные обсуждения затронутых здесь вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
2. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
4. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
5. *Марчук Г. И., Кузнецов Ю. А.* Итерационные методы и квадратичные функционалы. Новосибирск: Наука, 1972.
6. *Молчанов И. Н., Яковлев М. Ф.* Итерационные процессы решения одного класса несовместных систем линейных алгебраических уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, № 3. С. 547–558.
7. *Кузнецов Ю. А., Лебедев В. И.* Чебышевские итерационные методы решения несовместных систем // Изв. вузов. Математика. 1983. № 7. С. 59–68.
8. *Кузнецов Ю. А.* Итерационные методы в подпространствах. М.: Отдел вычисл. математики АН СССР, 1984.
9. *Кузнецов Ю. А., Марчук Г. И.* Итерационные методы решения систем линейных уравнений с особенными матрицами // Acta Universitatis Carolinae. Math. et Phys. Praha, 1974. P. 87–95.
10. *Кузнецов Ю. А.* Итерационные методы решения несовместных систем линейных уравнений // Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1975. С. 199–207.
11. *Кузнецов Ю. А., Мацокин А. М.* Итерационные методы для вычисления обобщенных нормальных решений // Вычислительные методы линейной алгебры. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1977. С. 15–30.
12. *Вишик М. И.* Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющих дивергентную форму // Тр. Моск. мат. о-ва. 1963. Т. 12. С. 125–184.
13. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
14. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
15. *Вишик М. И.* Метод ортогональных проекций для самосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1947. Т. 56, № 2. С. 115–118.
16. *Лебедев В. И.* Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. I // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1964. Т. 4, № 3. С. 449–465.
17. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
18. *Марчук Г. И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
19. *Коновалов А. Н.* Численные методы в статических задачах теории упругости // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 3. С. 573–589.
20. *Коновалов А. Н.* Численные методы в динамических задачах теории упругости // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 551–569.
21. *Коновалов А. Н.* Сопряженно-факторизованные модели в задачах математической физики // Сиб. журн. вычисл. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 25–57.
22. *Коновалов А. Н.* Динамическая задача теории упругости в постановке «скорости-напряжения» // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 2. С. 238–248.
23. *Самарский А. А.* Об одном алгоритме численного решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1964. Т. 4, № 3. С. 580–584.
24. *Коновалов А. Н.* Диагональные регуляризаторы в задачах теории упругости // Докл. АН РАН. 1995. Т. 340, № 4. С. 470–472.
25. *Коновалов А. Н.* Итерационные методы в задачах теории упругости // Докл. АН РАН. 1995. Т. 340, № 5. С. 589–591.

Статья поступила 26 ноября 1999 г.

г. Новосибирск
Новосибирский гос. университет, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
`kan@sscc.ru`