Сибирский математический журнал
Июль—август, 2000. Том 41, № 4

УДК 517.958

О ЗАДАЧЕ ПЕРЕХОДА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ МАРАНГОНИ В СЛОЙ ПРАНДТЛЯ

В. В. Кузнецов

Аннотация: Получены условия существования обобщенного и классического решений у задачи для пограничного слоя несжимаемой жидкости вблизи точки трехфазного контакта при переходе пограничного слоя Марангони в слой Прандтля. Исследованы свойства обобщенных и классических решений. Библиогр. 9.

Введение

Известно [1, 2], что при описании движения жидкости с большими числами Рейнольдса вблизи границ области течения можно выделять пограничные слои Прандтля вблизи твердых стенок и слои Марангони вблизи свободных границ. Разрешимость граничных задач для пограничного слоя Прандтля изучена достаточно хорошо; основные результаты изложены в монографии [3]. Задачи для слоя Марангони исследовались в [4, 5].

Может быть так, что область движения имеет твердую и свободную границы, пересекающиеся под некоторым углом. В данной работе показано, что задача о прохождении пограничного слоя через точку контакта сводится к решению уравнения Мизеса теории пограничного слоя с граничными условиями переменного типа: первого рода на одном участке границы и второго — на другом. При этом возможны два варианта (математически весьма различных) этой задачи: жидкость может или стекать с твердой стенки, что соответствует задаче перехода слоя Прандтля в слой Марангони, или натекать на нее (переход слоя Марангони в слой Прандтля). В работе исследован второй вариант этой задачи. Установлены условия разрешимости в классе обобщенных функций. Кроме того, указан довольно широкий класс задаваемых величин, при которых существует и классическое решение задачи. При этом накладываемые ограничения на данные задачи имеют понятное физическое обоснование. Изучены свойства классических и обобщенных решений.

§ 1. Постановка задачи

Пусть область движения занимает в декартовой системе координат (x, y) угловой сектор $\gamma > \operatorname{arctg} y/x > 0$, причем линия $\{\operatorname{arctg} y/x = \gamma\}$ — твердая стенка, а $\{y = 0\}$ — свободная граница. Если u, v — компоненты вектора скорости в декартовых координатах, то кинематические и динамические условия на границах имеют вид

$$u|_{\operatorname{arctg}(y/x)=\gamma} = v|_{\operatorname{arctg}(y/x)=\gamma} = 0, \quad \varrho\nu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \hat{f}(x), \quad v|_{y=0} = 0. \qquad (1.1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–00818).

Здесь ϱ, ν — материальные константы жидкости, а $\hat{f}$ — заданное касательное напряжение на свободной границе. Пусть ξ, η — произвольная система криволинейных ортогональных координат, а v_ξ, v_η — компоненты вектора скорости в этой системе. Тогда уравнения Навье — Стокса имеют вид [1]

$$\frac{v_\xi}{H_\xi}\frac{\partial v_\xi}{\partial\xi}+\frac{v_\eta}{H_\eta}\frac{\partial v_\xi}{\partial\eta}+\frac{v_\eta}{H_\xi H_\eta}\left(v_\xi\frac{\partial H_\xi}{\partial\eta}-v_\eta\frac{\partial H_\eta}{\partial\xi}\right)=-\frac{1}{\varrho H_\xi}\frac{\partial p}{\partial\xi}+\nu\biggl[\frac{1}{H_\xi^2}\frac{\partial^2 v_\xi}{\partial\xi^2}+\frac{1}{H_\eta^2}\frac{\partial v_\xi}{\partial\eta^2}$$
$$+\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial(H_\eta/H_\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial v_\xi}{\partial\xi}+\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial(H_\xi/H_\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial v_\xi}{\partial\eta}+\frac{2}{H_\xi^2 H_\eta}\frac{\partial H_\xi}{\partial\eta}\frac{\partial v_\eta}{\partial\xi}-\frac{2}{H_\xi H_\eta^2}\frac{\partial H_\eta}{\partial\xi}\frac{\partial v_\eta}{\partial\eta}$$
$$+\frac{1}{H_\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\eta}{\partial\xi}\right)v_\xi+\frac{1}{H_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\xi}{\partial\eta}\right)v_\xi+\frac{1}{H_\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\xi}{\partial\eta}\right)v_\eta$$
$$-\frac{1}{H_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\eta}{\partial\xi}\right)v_\eta\biggr], \quad (1.2)$$

$$\frac{v_\xi}{H_\xi}\frac{\partial v_\eta}{\partial\xi}+\frac{v_\eta}{H_\eta}\frac{\partial v_\eta}{\partial\eta}-\frac{v_\xi}{H_\xi H_\eta}\left(v_\xi\frac{\partial H_\xi}{\partial\eta}-v_\eta\frac{\partial H_\eta}{\partial\xi}\right)=-\frac{1}{\varrho H_\eta}\frac{\partial p}{\partial\eta}+\nu\biggl[\frac{1}{H_\xi^2}\frac{\partial^2 v_\eta}{\partial\xi^2}+\frac{1}{H_\eta^2}\frac{\partial v_\eta}{\partial\eta^2}$$
$$+\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial(H_\eta/H_\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial v_\eta}{\partial\xi}+\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial(H_\xi/H_\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial v_\eta}{\partial\eta}-\frac{2}{H_\xi^2 H_\eta}\frac{\partial H_\xi}{\partial\eta}\frac{\partial v_\eta}{\partial\xi}+\frac{2}{H_\xi H_\eta^2}\frac{\partial H_\eta}{\partial\xi}\frac{\partial v_\xi}{\partial\eta}$$
$$+\frac{1}{H_\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\eta}{\partial\xi}\right)v_\eta+\frac{1}{H_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\xi}{\partial\eta}\right)v_\eta-\frac{1}{H_\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\xi}{\partial\eta}\right)v_\xi$$
$$+\frac{1}{H_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial H_\eta}{\partial\xi}\right)v_\xi\biggr], \quad (1.3)$$

$$H_\eta\frac{\partial v_\xi}{\partial\xi}+H_\xi\frac{\partial v_\eta}{\partial\eta}+v_\xi\frac{\partial H_\eta}{\partial\xi}+v_\eta\frac{\partial H_\xi}{\partial\eta}=0 \quad (1.4)$$

(H_ξ, H_η — коэффициенты Ламе соответствующих координат).

Зададим систему координат ξ, η равенствами

$$\xi^2+\eta^2=(x^2+y^2)^{\pi/\gamma}, \quad \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}=\pi\gamma^{-1}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Тогда

$$\xi d\xi+\eta d\eta=\pi\gamma^{-1}(xdx+ydy)(x^2+y^2)^{(\pi-\gamma)/\gamma},$$
$$(-\eta d\xi+\xi d\eta)/(\xi^2+\eta^2)=\pi\gamma^{-1}(-ydx+xdy)/(x^2+y^2).$$

Возведя последние равенства в квадрат и сложив их, получим $dx^2+dy^2=\gamma^2(d\xi^2+d\eta^2)/\pi^2(\xi^2+\eta^2)^{(\pi-\gamma)/\pi}$, откуда $H_\xi=H_\eta=\gamma/\pi(\xi^2+\eta^2)^{(\pi-\gamma)/2\pi}$. Заметим еще, что такая замена переменных осуществляет конформное отображение углового сектора $\gamma>\arg z>0$ плоскости $z=x+iy$ на полуплоскость $\eta>0$ плоскости $\xi+i\eta$, поэтому криволинейные координаты (ξ,η) ортогональны.

Рассмотрим порядки величин в данной задаче. Введем обозначения: V — порядок скорости, l — характерный размер области, δ — толщина слоя больших градиентов скорости у границ области движения, при удалении от них (пограничного слоя), F — порядок $\hat{f}(x)$. Пусть происходит движение жидкости с большими числами Рейнольдса $\mathrm{Re}=Vl/\nu$. Тогда согласно гипотезе Прандтля [1] вблизи границ области имеет место порядковое соотношение $\delta=l/\sqrt{\mathrm{Re}}$. Выделим асимптотическую форму уравнений (1.2)–(1.4), полагая $v_\xi\sim V$, $v_\eta\sim\delta V/l$,

$\xi \sim l^{(\pi-\gamma)/\pi}$, $\eta \sim \delta l^{-\gamma/\pi}$. Тогда $H_\xi \sim H_\eta \sim 1/l^{(\pi-\gamma)/\pi}$. Сохраняя члены старшего относительно δ/l порядка, получаем аналог системы уравнений Прандтля для описания течения вблизи точки контакта:

$$v_\xi \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + v_\eta \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\pi\nu}{\gamma}|\xi|^{(\pi-\gamma)/\pi}\frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \eta^2}, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} - \frac{\pi-\gamma}{\pi}\frac{v_\xi}{\xi} = 0. \tag{1.6}$$

В силу первого из уравнений (1.6) можно полагать, что $p = p(\xi)$, и ввести $U(\xi)$ — скорость внешнего (потенциального) движения на границах области. При этом случай $\xi < 0$ соответствует границе $\{\operatorname{arctg} y/x = \gamma\}$, а $\xi > 0$ — границе $\{y = 0\}$. Второе из уравнений (1.6) позволяет ввести функцию тока s так, что $v_\xi = |\xi|^{(\pi-\gamma)/\pi}\partial s/\partial\eta$, $v_\eta = -|\xi|^{(\pi-\gamma)/\pi}\partial s/\partial\xi$. Переходя к переменным Мизеса ξ, s, $w = v_\xi^2$, получаем уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{2}{\varrho}\frac{dp}{d\xi} + \frac{\pi\nu\sqrt{w}}{\gamma|\xi|^{(\pi-\gamma)/\pi}}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2},$$

которое заменой

$$t = \int\limits_{\xi_o}^{\xi} \frac{\pi}{\gamma|\xi|^{(\pi-\gamma)/\pi}}\, d\xi$$

приводится к классическому уравнению Мизеса теории пограничного слоя

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu\sqrt{w}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + w'_\infty(t), \tag{1.7}$$

рассматриваемому в области $t > 0$, $s > 0$. Здесь $w_\infty = U^2$, а граничные условия с учетом (1.1) задаются в виде

$$w|_{t=0} = w_o(s), \quad w|_{s=0,\, t\le t_*} = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{s=0,\, t>t_*} = f(t). \tag{1.8}$$

Здесь точка смены типа граничных условий $t = t_*$ соответствует точке контакта, а функция f представляет собой преобразованную к новым переменным функцию $\hat{f}$.

Задача (1.7), (1.8) является задачей перехода пограничного слоя Прандтля в слой Марангони. Ясно, что можно рассматривать также и задачу перехода слоя Марангони в слой Прандтля. При этом граничные условия примут вид

$$w|_{t=0} = w_o(s), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{s=0,\, t<t_*} = f(t), \quad w|_{s=0,\, t\ge t_*} = 0. \tag{1.9}$$

Проведенные выше построения корректны при $\gamma \ge \gamma_0 > 0$, где γ_0 таково, что множитель π/γ_0 имеет первый порядок и не влияет на асимптотическую величину членов уравнений после замены переменных.

§ 2. Существование обобщенного решения

Пусть в области $D_a = \{(t,s) \in (0,a)\times(0,\infty)\}$, $a > 0$, $t_* \in (0,a)$ выполняется уравнение Мизеса (1.7) с граничными условиями (1.9). Будем считать, что w_∞ удовлетворяет условиям

$$w_\infty(t) > 0 \text{ при } t < t_*; \quad w_\infty(t_*) = 0; \quad w_\infty(t) > 0, \quad w'_\infty(t) \ge 0 \text{ при } t > t_*. \tag{2.1}$$

Эти условия вытекают из физического смысла задачи: в угловой точке внешнее течение должно иметь точку останова, поэтому выше нее (по току) должно происходить торможение жидкости, а ниже — разгон. Функция w'_∞ может иметь в точке $t = t_*$ разрыв 1-го рода, и пусть она может менять знак лишь конечное число раз.

Определение. Неотрицательную непрерывную и ограниченную в области D_a функцию $w(t,s)$ будем называть *обобщенным решением задачи* (1.7), (1.9), если в D_a существует ограниченная обобщенная производная $\partial w/\partial s$, $\lim\limits_{s\to 0} w(t,s) = 0$ при $t > t_*$ и для любой гладкой в D_a функции $\varphi(t,s)$, равной нулю при $t = a$, при $s = 0$, $t \geq t_*$ и вне некоторой конечной области (класс таких пробных функций обозначим через Φ), выполняется тождество

$$\iint\limits_{D_a}\left[\frac{\nu}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\sqrt{w} - \frac{\varphi w'_\infty}{2\sqrt{w}}\right]dtds = \int\limits_0^\infty \sqrt{w_0(s)}\varphi(0,s)\,ds - \int\limits_0^{t_*}\frac{\nu}{2}\varphi(t,0)f(t)\,dt. \tag{2.2}$$

Очевидно, что классическое решение будет также и обобщенным.

Теорема 1. *Пусть* $w_\infty \in C[0,a]$, $w_\infty \in C^1(0,t_*)$, $w_\infty \in C^1(t_*,a)$ *удовлетворяет условиям* (2.1)*; функция* f *принадлежит* $C[0,t_*]$ *и* $f(t) \leq 0$. *Кроме того, пусть функция* w_0 *дважды непрерывно дифференцируема и ограничена вместе со своими первой и второй производными,* $w'_0(0) = f(0)$, $w_0(s) \geq w_\infty(0)$ *для любого* $s \geq 0$ *и* $w_0(s) \to w_\infty(0)$ *при* $s \to \infty$. *Тогда в области* D_a *существует обобщенное решение задачи* (1.7), (1.9), *причем справедливы следующие утверждения:*

а) *во всех точках* $(t_1,s_1) \in D_a$, $t_1 \neq t_*$, *функция* w *является решением уравнения* (1.7) *в обычном смысле;*

б) $w(t,s) \to w_\infty(t)$ *при* $s \to \infty$ *равномерно по* $t \in (0,a)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. Определим области $D_1 = \{(t,s) \in (0,t_*)\times(0,1/\varepsilon)\}$, $D_2 = \{(t,s) \in (t_*,a)\times(0,1/\varepsilon)\}$ и сглаживающую непрерывную функцию $\lambda(t)$ следующим образом: $\lambda(t) = w'_\infty(t)$ при $t \in (0,t_*-\varepsilon)$ и при $t \in (t_*,a)$, а если $t \in (t_*-\varepsilon,t_*)$, то $w'_\infty(t) \leq \lambda(t) \leq \lim\limits_{\tau\to t_*+0} w'_\infty(\tau)$. В области $D_\varepsilon = D_1 \cup D_2$ рассмотрим семейство $\{w_\varepsilon(t,s)\}$ решений уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu\sqrt{w}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \hat{w}'_\infty(t), \tag{2.3}$$

где $\hat{w}_\infty(t) = \mu_\varepsilon + w_\infty(0) + \int\limits_0^t \lambda(\tau)d\tau$. При этом функция $\hat{w}_\infty(t)$ будет гладкой и положительной на всем интервале $(0,a)$. Здесь $\mu_\varepsilon = \max\{\varepsilon,\, |w'_0(1/\varepsilon)|^{1/2}\}$. Из свойств функции w_0 ясно, что $\mu_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. На границе $\partial D_1 = \{t = 0;\ s = 0;\ s = 1/\varepsilon\}$ области D_1 поставим для уравнения (2.3) регуляризованные условия вида

$$w_\varepsilon|_{t=0} = 2\mu_\varepsilon + w_0(s), \quad \left.\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial s}\right|_{s=0} = f(t), \quad \left.\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial s}\right|_{s=1/\varepsilon} = f_1(t). \tag{2.4}$$

Здесь $f_1 \in C[0,t_*]$, $|f_1(t)| \leq |w'_0(1/\varepsilon)|$, причем $f_1(0) = w'_0(1/\varepsilon)$, $f_1(t_*) = 0$. Предполагая существование в D_1 положительного решения задачи (2.3), (2.4), установим некоторые его априорные свойства.

Лемма 1. *В области D_1 имеют место оценки*

$$B(t,s,\varepsilon) \geq w_\varepsilon(t,s) \geq b(t,s,\varepsilon), \tag{2.5}$$

где $b(t,s,\varepsilon) = \hat{w}_\infty(t) + \mu_\varepsilon e^{-\alpha t}[1-\zeta(s)]$, $B = \alpha^3\zeta(s)(1+t)$, *число* $\alpha > 0$ *достаточно велико и не зависит от* ε,

$$\zeta(s) = \begin{cases} 1/3 + (1-s)^3/3\alpha^2, & s \in (0,1), \\ 1/3, & s \in (1, 1/\varepsilon - 1), \\ 1/3 + (s - 1/\varepsilon + 1)^3/3\alpha^2, & s \in (1/\varepsilon - 1, 1/\varepsilon). \end{cases}$$

Доказательство. Проверим сперва нижнюю из оценок. Пусть оператор L задается равенством $L(j) = \nu\sqrt{j}\partial^2 j/\partial s^2 - \partial j/\partial t$. Тогда при достаточно больших значениях α

$$L(b) + \hat{w}'_\infty(t) = \mu_\varepsilon \mathrm{e}^{-\alpha t}[-\nu\sqrt{b}\zeta'' + \alpha(1-\zeta)] \geq 0,$$

поскольку b — ограниченная функция. Отсюда следует, что $L(w_\varepsilon) - L(b) = L_1(w_\varepsilon - b) \leq 0$, где L_1 — линейный оператор. На основании обобщенного принципа максимума заключаем, что функция $w_\varepsilon - b$ не имеет внутри D_1 отрицательных минимумов. Но при $t = 0$ она положительна, а также

$$\frac{\partial}{\partial s}(w_\varepsilon - b)\bigg|_{s=0} = f(t) - \frac{\mu_\varepsilon \mathrm{e}^{-\alpha t}}{\alpha^2} < 0, \quad \frac{\partial}{\partial s}(w_\varepsilon - b)\bigg|_{s=1/\varepsilon} = f_1(t) + \frac{\mu_\varepsilon \mathrm{e}^{-\alpha t}}{\alpha^2} > 0.$$

Последнее неравенство верно при малых ε по определению μ_ε, f_1 и ввиду независимости величины α от ε. Отсюда видно, что наименьшее значение $w_\varepsilon - b$ не достигается ни при $s = 0$, ни при $s = 1/\varepsilon$, что доказывает нижнюю из оценок (2.5).

Оценка сверху доказывается аналогично: при больших α получаем $L(B) + \hat{w}'_\infty(t) \leq 0$, поэтому функция $B - w_\varepsilon$ может достигнуть своего наименьшего отрицательного значения лишь на ∂D_1. Но там она его не достигает, ибо

$$(B - w_\varepsilon)|_{s=0} \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial s}(B - w_\varepsilon)\bigg|_{s=0} = -\alpha(1+t) - f(t) < 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(B - w_\varepsilon)\bigg|_{s=1/\varepsilon} = \alpha(1+t) - f_1(t) > 0.$$

Поэтому верна и верхняя из оценок. Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 следует, что в области D_1 будет $g_\varepsilon \leq w_\varepsilon(t,s) \leq W$, где $g_\varepsilon = \inf\limits_{t,s} b(t,s,\varepsilon)$, $W = \sup\limits_{t,s,\varepsilon} B(t,s,\varepsilon)$. Поэтому в уравнении (2.3) можно изменить коэффициент при $\partial^2 w_\varepsilon/\partial s^2$ так, чтобы он являлся гладкой функцией, большей чем $g_\varepsilon/2$ при $w_\varepsilon < g_\varepsilon$, и гладкой ограниченной функцией при $w_\varepsilon > W$. Но тогда по известным теоремам существования [6, гл. 5] регуляризованная задача (2.3), (2.4) имеет в D_1 решение $w_\varepsilon(t,s)$ такое, что w_ε, $\partial w_\varepsilon/\partial t$, $\partial w_\varepsilon/\partial s$, $\partial^2 w_\varepsilon/\partial s^2$ удовлетворяют в замкнутой области $\overline{D_1}$ условию Гёльдера. Кроме того, из теоремы 6 из [7] следует возможность дифференцировать уравнение (2.3) один раз по t и дважды по s. В силу (2.5) полученное решение совпадает с решением исходной задачи (2.3), (2.4). Продифференцировав (2.3) по s и обозначив $q_\varepsilon(t,s) = \partial w_\varepsilon(t,s)/\partial s$, получим для функции q_ε уравнение

$$\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial t} = \nu\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 q_\varepsilon}{\partial s^2} + \frac{\nu q_\varepsilon}{2\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial s}, \tag{2.6}$$

которое является равномерно параболическим в области D_1 и однородным, поэтому свои наибольшее и наименьшее значения q_ε принимает на ∂D_1. Но из граничных условий (2.4) видно, что q_ε равномерно ограничена на ∂D_1, поэтому в D_1 имеет место оценка

$$\left|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial s}\right| \le M_1. \tag{2.7}$$

Здесь и всюду далее $M_1, M_2, \dots$ — некоторые достаточно большие постоянные, не зависящие от ε.

Рассмотрим далее уравнение (2.3) в области D_2, поставив на границе $\partial D_2 = \{t = t_*,\ s = 0,\ s = 1/\varepsilon\}$ регуляризованные условия

$$w_\varepsilon|_{t=t_*} = w_1(s), \quad w_\varepsilon|_{s=0} = w_2(t), \quad \left.\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial s}\right|_{s=1/\varepsilon} = 0, \tag{2.8}$$

где $w_1(s) = \lim\limits_{t\to t_*-0} w_\varepsilon(t,s)$, а функция w_2 устроена следующим образом: $w_2(t_*) = w_1(0)$, $w_2'(t_*) = \nu\sqrt{w_1(0)}w_1''(0) + \hat{w}_\infty'(0)$, $w_2(t) = g_\varepsilon/2$ при $t \in (t_* + \varepsilon, a)$, и при этом функция w_2 гладкая и ограниченная на всем интервале (t_*, a). Кроме того, будем полагать $w_2(t) \ge g_\varepsilon/2$. Ясно, что так как $w_2(t_*) \ge g_\varepsilon$, такую функцию построить можно. Кроме того, функцию w_2 можно задать так, чтобы могло быть $w_2'(t) > 0$ только при $t \in (t_*, t_* + \delta)$, где $\delta < \varepsilon$ — любое положительное число, а при $t \in (t_* + \delta, a)$ было бы $w_2'(t) \le 0$.

Предположим, что задача (2.3), (2.8) имеет в D_2 положительное решение, и установим там его априорные свойства.

Лемма 2. *В области D_2 имеют место оценки*

$$B(t,s,\varepsilon) \ge w_\varepsilon(t,s) \ge b_1(t,s,\varepsilon) = w_\infty(t)\zeta_1(s)(2 - e^{\tau t}) + g_\varepsilon\zeta_2(s)e^{-\alpha t}, \tag{2.9}$$

где B определена в лемме 1, $\tau > 0$ достаточно мало, $\zeta_1 \in C^2(0,\infty)$,

$$\zeta_1(s) = \begin{cases} s\sqrt{\tau}, & s \in (0,1), \\ \zeta_1 \ge \sqrt{\tau}, \zeta_1'' = O(\tau^2), & s \in (1,2), \\ 1 - e^{-\tau s} + \sqrt{\tau}, & s \ge 2, \end{cases}$$

$$\zeta_2(s) = \begin{cases} 1/2, & s \in (0, 1/\varepsilon - 1), \\ 1/2 + (1/\varepsilon - 1 - s)^3/3, & s \in (1/\varepsilon - 1, 1/\varepsilon). \end{cases}$$

Доказательство. Оценка сверху (2.9) доказывается так же, как и аналогичная оценка леммы 1, за исключением случая $s = 0$, где она верна по построению. Для доказательства нижней оценки заметим, что она верна при $t = t_*$ и при $s = 0$. Кроме того, наименьшее отрицательное значение $w_\varepsilon(t,s) - b_1$ не достигается при $s = 1/\varepsilon$, ибо там $\partial(w_\varepsilon - b_1)/\partial s = -\tau w_\infty(t)e^{-\tau/\varepsilon}(2 - e^{\tau t}) + g_\varepsilon e^{-\alpha t} > 0$ при малых ε. Но оно не достигается и во внутренних точках D_2, ибо

$$L(b_1) + \hat{w}_\infty'(t) = g_\varepsilon e^{-\alpha t}[\nu\sqrt{b_1}\zeta_2'' + \alpha\zeta_2] + w_\infty(t)[\nu\sqrt{b_1}(2 - e^{\tau t})\zeta_1'' + \tau\zeta_1 e^{\tau t}] \\ + [\hat{w}_\infty'(t) - w_\infty'(t)(2 - e^{\tau t})\zeta_1] \ge 0,$$

поскольку при больших α и малых τ каждое из выражений в квадратных скобках неотрицательно. Поэтому $L_1(w_\varepsilon - b_1) \le 0$ и из принципа максимума следует нижняя из оценок (2.9). Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует, что в области D_2 существует положительное решение с такими же дифференциальными свойствами, что и в D_1. Докажем, что в D_2

остается справедливой оценка (2.7) с достаточно большой постоянной M_1. Для этого достаточно установить его справедливость при $s=0$. Однако установить это свойство сразу при всех $t\in(t_*,a)$ не удается. Докажем сперва его на некотором малом интервале $(t_*,t_*+\delta_1)$.

Лемма 3. *При $t\in(t_*,t_*+\delta_1)$ имеют место оценки*

$$w_2(t)+\zeta_3(s)e^{\gamma t}\geq w_\varepsilon\geq w_2(t)-\zeta_4(s)e^{\gamma t}, \tag{2.10}$$

где функции ζ_3,ζ_4 дважды непрерывно дифференцируемы и имеют свойства: $\zeta_3=M_4(s-s^{5/4})$ при $s\in(0,\delta_s)$, где $\delta_s>0$ мало, $\zeta_3(s)+w_2(0)\geq w_1(s)$, $\zeta_3'(1/\varepsilon)>0$; $\zeta_4(s)=M_5(s-s^{5/4})$ при $s\in(0,\delta_s)$, $\zeta_4>0$, и $w_1(s)\geq w_2(0)-\zeta_4(s)$ и $\zeta_4'(1/\varepsilon)>0$. При этом $\gamma>0$ велико и $e^{\gamma\delta_1}=1/2$. Здесь δ_s, γ, δ_1 могут зависеть от ε.

Доказательство. Так как $|w_1'|\leq M_1$ и $w_1\geq g_\varepsilon$, такие функции ζ_3, ζ_4 построить можно. Покажем сперва нижнюю оценку. Обозначим $Q_1=w_\varepsilon-w_2(t)+\zeta_4e^{\gamma t}$. Тогда

$$\nu\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2Q_1}{\partial s^2}-\frac{\partial Q_1}{\partial t}=\left[\frac{5\nu}{16}\sqrt{w_\varepsilon}\zeta_4''+w_2'-\gamma\zeta_4\right]e^{\gamma t}-\hat{w}_\infty'\leq 0.$$

Последнее неравенство выполняется при $s\in(0,\delta_s)$, если δ_s достаточно мало, а при $s>\delta_s$, если γ велико. Поэтому Q_1 не имеет внутри рассматриваемой в лемме 3 области отрицательных минимумов. Но поскольку

$$Q_1|_{t=t_*}\geq 0,\quad Q_1|_{s=0}=0,\quad \left.\frac{\partial Q_1}{\partial s}\right|_{s=1/\varepsilon}=\zeta_4'(1/\varepsilon)e^{\gamma t}>0,$$

в этой области $Q_1\geq 0$, что доказывает оценку снизу. Оценка сверху доказывается аналогично. Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 следует, что оценка (2.7) остается справедливой при $t\in(t_*,t_*+\delta_1)$. Так как по построению δ_1 может зависеть от ε, но не зависит от δ (длина промежутка, на котором может быть $w_2'>0$), с самого начала можно считать $\delta<\delta_1$, т. е. $w_2'(t)\leq 0$ при $t\geq t_*+\delta_1$.

Лемма 4. *При $t\geq t_*+\delta_1$, $s\in(0,1/M_5)$ имеют место оценки*

$$w_2(t)+M_5^2(s-s^{3/2})\geq w_\varepsilon(t,s)\geq w_2(t)(1-M_5s). \tag{2.11}$$

Доказательство. Докажем нижнюю из оценок (2.11). Она верна при $s=0$, при $t=t_*+\delta_1$ и при $s=1/M_5$. Обозначив функцию в ее правой части через Q_2 видим, что $L(Q_2)+\hat{w}_\infty'=-w_2'(1-M_5s)+\hat{w}_\infty'\geq 0$, т. е. Q_2 по принципу максимума не имеет внутри рассматриваемой здесь области отрицательных минимумов, откуда $Q_2\geq 0$, что эквивалентно нижней из оценок. Верхняя доказывается аналогично. Лемма 4 доказана.

Из лемм 3, 4 следует выполнение оценки (2.7) при $(t,s)\in\partial D_2$, а отсюда — справедливость ее всюду в D_2. Но тогда ввиду равномерной ограниченности w_ε и справедливости всюду (2.7) по теореме 4.5 из [8] в области $D_\beta=\{(t,s)\in(\beta,a)\times(\beta,1/\beta)\}$ для любого $\beta>\varepsilon$ будет верна оценка

$$|w_\varepsilon(t_2,s)-w_\varepsilon(t_1,s)|\leq M_\beta|t_2-t_1|^{1/2}, \tag{2.12}$$

а в силу (2.7) во всей области D_ε — оценка

$$|w_\varepsilon(t,s_2)-w_\varepsilon(t,s_1)|\leq M_1|s_2-s_1|, \tag{2.13}$$

где M_β зависит от β, но не зависит от ε. Оценки (2.12), (2.13) достаточны для компактности семейства $\{w_\varepsilon\}$, т. е. существует последовательность w_{ε_k}, равномерно сходящаяся при $\varepsilon_k \to 0$ к некоторой непрерывной в D функции $w(t,s)$, имеющей вследствие (2.7) ограниченную обобщенную производную $\partial w/\partial s$. Из оценок (2.11) и свойств функции w_2 следует выполнение условия $\lim\limits_{s\to 0} w(t,s) = 0$ при $t > t_*$. Умножим уравнение (2.3) на функцию $\varphi \in \Phi$ и проинтегрируем его по области D_ε. Получаем тождество

$$\iint\limits_{D_\varepsilon} \left[\frac{\nu}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial s} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\sqrt{w_\varepsilon} - \frac{\varphi \hat{w}'_\infty}{2\sqrt{w_\varepsilon}}\right] dtds = \int\limits_0^\infty \sqrt{w_0(s)}\varphi(0,s)\,ds - \int\limits_0^{t_*} \frac{\nu}{2}\varphi(t,0)f(t)\,dt. \tag{2.14}$$

Покажем, что все члены этого тождества равномерно по ε ограничены. Это очевидное следствие равномерной ограниченности w_ε и $\partial w_\varepsilon/\partial s$ для членов, содержащих множители $\partial\varphi/\partial s$, $\partial\varphi/\partial t$ и для линейных интегралов в правой части (2.14). Но тогда и оставшийся интеграл будет равномерно ограничен в силу самого тождества (2.14) (это можно доказать и непосредственно, используя оценки решения снизу, полученные в леммах 1, 2). Рассмотрим тождество (2.14) с такими пробными функциями φ_β, $\beta > 0$, что $\varphi_\beta \in \Phi$ и $\varphi_\beta(t,s) = 0$ при $\forall s > 0$, $t \in (t_* - \beta, t_* + \beta)$ и при $s \in (0,\beta)$, $t > t_*$. Но из оценок снизу лемм 1, 2 получаем $w(t,s) \geq w_\infty(t)$, $t < t_*$ и $w(t,s) \geq w_\infty(t)\zeta_1(s)(2 - e^{\tau t})$, $t > t_*$, тем самым из свойств функций w_∞, ζ_1 следует, что в тех точках (t,s), где $\varphi_\beta(t,s) \neq 0$, функции w_ε равномерно отделены от нуля, поэтому функции $1/\sqrt{w_\varepsilon}$ в этих точках равномерно сходятся при $\varepsilon \to 0$. Поэтому в (2.14) можно переходить к пределу под знаками интегрирования и получить выполнение тождества (2.2) для w. Поскольку β произвольно мало, можно считать установленным выполнение (2.2) с пробными функциями $\hat{\varphi} \in \Phi$, имеющими нулевой след на линии $\{t = t_*\}$. Докажем, что тогда тождество (2.2) выполняется и с любой пробной функцией $\varphi \in \Phi$. Пусть $m > 0$ — произвольно малое число, а функции $z_m(t)$ заданы в виде

$$z_m(t) = \begin{cases} 1, & t \notin (t_* - m, t_* + m), \\ [1 - \cos(\pi(t - t_*)/m)]/2, & t \in (t_* - m, t_* + m). \end{cases}$$

Если $\varphi \in \Phi$ произвольна, то φz_m имеет на линии $\{t = t_*\}$ нулевой след, поэтому для нее тождество (2.2) доказано. Подставив эту функцию в (2.2), получим, перегруппировав члены тождества, равенство

$$\iint\limits_{D_a} \left[\frac{\nu}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\sqrt{w} - \frac{\varphi w'_\infty}{2\sqrt{w}}\right] z_m(t)\,dtds - \int\limits_0^\infty \sqrt{w_0(s)}\varphi(0,s)\,ds$$
$$+ \int\limits_0^{t_*} \frac{\nu}{2}\varphi(t,0)f(t)z_m(t)\,dt = \iint\limits_{D_a} \sqrt{w}\varphi z'_m\,dtds.$$

Совершенно очевидно, что если при $m \to 0$ правая часть этого равенства стремится к нулю, то получаем тождество (2.2) с произвольной пробной функцией $\varphi \in \Phi$. Используя теорему о средних, приходим к цепочке равенств

$$\iint\limits_{D_a} \sqrt{w}\varphi z'_m dtds = \frac{\pi}{2m}\int\limits_0^\infty \int\limits_{t_*-m}^{t_*+m} \sqrt{w}\varphi \sin\frac{\pi(t - t_*)}{m}\,dtds$$

$$= \frac{\pi}{2m}\int\limits_0^\infty \left[\int\limits_{t_*-m}^{t_*} \sqrt{w}\varphi \sin\frac{\pi(t-t_*)}{m}\,dt + \int\limits_{t_*}^{t_*+m} \sqrt{w}\varphi \sin\frac{\pi(t-t_*)}{m}\,dt\right] ds$$

$$= \frac{\pi}{2m}\int\limits_0^\infty \left[(\sqrt{w}\varphi)|_{t=t_1}\int\limits_{t_*-m}^{t_*} \sin\frac{\pi(t-t_*)}{m}\,dt + (\sqrt{w}\varphi)|_{t=t_2}\int\limits_{t_*}^{t_*+m} \sin\frac{\pi(t-t_*)}{m}\,dt\right] ds$$

$$= \int\limits_0^\infty [-(\sqrt{w}\varphi)|_{t=t_1} + (\sqrt{w}\varphi)|_{t=t_2}]\,ds$$

$$= \int\limits_0^\infty [(\sqrt{w}\varphi)|_{t=t_*} - (\sqrt{w}\varphi)|_{t=t_1}]\,ds + \int\limits_0^\infty [(\sqrt{w}\varphi)|_{t=t_2} - (\sqrt{w}\varphi)|_{t=t_*}]\,ds = I_1 + I_2.$$

Здесь $t_1 \in [t_* - m, t_*]$, $t_2 \in [t_*, t_* + m]$ зависят, вообще говоря, от s. Следует заметить, что так как $\sqrt{w}$, φ непрерывны в D_a, то $(\sqrt{w}\varphi)|_{t=t_1}$ — непрерывная функция аргумента s, поскольку отличается постоянным множителем от непрерывной функции $\int\limits_{t_*-m}^{t_*} \sqrt{w}\varphi \sin(\pi(t-t_*)/m)\,dt$. Поэтому все написанные выше интегралы определены. Покажем теперь, что при достаточно малых m будет $|I_1| \le \varepsilon_1$, где ε_1 — произвольно малое положительное число. Обозначим $\delta_2 = \varepsilon_1/4 \sup\limits_{(t,s)\in D_a} |\sqrt{w}\varphi|$, и пусть $A > 0$ таково, что $\varphi = 0$ при $s > A$. Тогда

$$|I_1| = \left|\int\limits_0^{\delta_2}\left[(\sqrt{w}\varphi)|_{t=t_*} - (\sqrt{w}\varphi)|_{t=t_1}\right] ds + \int\limits_{\delta_2}^{A} [(\sqrt{w}\varphi)|_{t=t_*} - (\sqrt{w}\varphi)|_{t=t_1}]\,ds\right|$$

$$\le \frac{\varepsilon_1}{2} + (A - \delta_2)\sup_{(t,s)\in\Delta(m)} |\sqrt{w(t_*,s)}\varphi(t_*,s) - \sqrt{w(t,s)}\varphi(t,s)|,$$

где $\Delta(m) = \{(t,s) \in [t_* - m, t_*] \times [\delta_2, A]\}$. Ясно, что $\Delta(m) \subset \Delta(m_0)$ при $m < m_0$. По теореме Кантора функция $\sqrt{w}\varphi$ равномерно непрерывна на $\Delta(m_0)$, поэтому при малых m будет $I_1 \le \varepsilon_1$. Проведя аналогичные рассуждения для I_2, получим $|I_1 + I_2| \le 2\varepsilon_1$, что и требовалось доказать.

Таким образом, (2.2) выполняется с любой $\varphi \in \Phi$, т. е. w — обобщенное решение задачи (1.7), (1.9).

Докажем утверждение а) теоремы. Пусть $s_1 > 0$ и $t_1 \ne t_*$. Тогда $w(t_1, s_1) > 0$ и существует прямоугольник S, $(t_1, s_1) \in S$, $\{t = t_*\} \cap S \ne 0$ такой, что $w \ge \mu > 0$ при $(t,s) \in S$. Если ε_k достаточно мало, то $\hat{w}'_\infty(t)$ совпадет с $w'_\infty(t)$ при $t \in \Pi_S$, где Π_S — проекция S на ось Ot. Так как w_{ε_k} равномерно сходятся к w, то начиная с некоторого номера k будет $w_{\varepsilon_k} \ge \mu/2$. Тогда w_{ε_k} является решением уравнения (1.7) с коэффициентом при второй производной по s, равномерно отделенным от нуля (и ограниченным сверху), поэтому легко доказать, что на S производные функций w_{ε_k}, входящие в (1.7), равномерно ограничены, следовательно, у предельной функции w тоже существуют ограниченные производные и она удовлетворяет (1.7) в обычном смысле. П. а) теоремы доказан.

Для доказательства п. б) уточним свойства решения w_ε в области D_ε.

Лемма 5. *Существует функция $H \in C^2(0,\infty)$ такая, что $H(s) > w_0(s)$, $H'(0) = -1$, $H'(s) \le 0$, $\lim\limits_{s\to\infty} H(s) = w_\infty(0)$ и справедливо неравенство*

$$|H''(s)| \le M_6(H(s) - w_\infty(0)) \quad \forall s > 0. \tag{2.15}$$

Доказательство. Так как $\lim\limits_{s\to\infty} w_0(s) = w_\infty(0)$, для любого целого $n > 1$ существует $s_n > 0$ такое, что $w_0(s) \le w_\infty(0) + 1/n$ при всех $s \ge s_n$. Без ограничения общности можно считать $s_{n+1} \ge s_n + 1$, ибо в противном случае значение $s_n + 1$ можно рассматривать как s_{n+1}. Получаем последовательность s_n, причем $s_n \to \infty$ при $n \to \infty$. На каждом из интервалов (s_n, s_{n+1}) определим функцию H равенством

$$H(s) = w_\infty(0) + \frac{2}{n} + \frac{1}{\pi n(n+1)} \sin\left[\frac{2\pi(s-s_n)}{s_{n+1}-s_n}\right] - \frac{2(s-s_n)}{n(n+1)(s_{n+1}-s_n)}.$$

Тогда $H(s_n) = w_\infty(0) + 2/n$, $H(s_{n+1}) = w_\infty(0) + 2/(n+1)$, $H'(s_n) = H''(s_n) = H'(s_{n+1}) = H''(s_{n+1}) = 0$, поэтому $H \in C^2(s_2, \infty)$. Поскольку, к тому же, $H' \le 0$, то $\lim\limits_{s\to\infty} H(s) = w_\infty(0)$. Кроме того, на любом из интервалов (s_n, s_{n+1}) имеем $H(s) \ge w_\infty(0) + 2/(n+1)$, $w_0(s) \le w_\infty(0) + 1/n$, поэтому $H(s) > w_0(s)$. Но так как $H''(s) = -4\pi n^{-1}(n+1)^{-1}(s_{n+1}-s_n)^{-2} \sin\left(2\pi(s-s_n)/(s_{n+1}-s_n)\right)$, справедливо неравенство (2.15). Функция H определена этими построениями на интервале (s_2, ∞). Очевидно, что при $s \in (0, s_2)$ ее легко можно доопределить с выполнением требуемых свойств. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *В области D_ε имеет место оценка*

$$w_\varepsilon(t,s) \le \hat{w}_\infty(t) + M_7 E(s) e^{M_8 t}. \tag{2.16}$$

Здесь

$$E(s) = \begin{cases} H(s) + \varepsilon - w_\infty(0), & s \in (0, 1/2\varepsilon), \\ H(s) + \varepsilon - w_\infty(0) + \varepsilon^2 (s - 1/2\varepsilon)^3, & s \in (1/2\varepsilon, 1/\varepsilon). \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим $Q_4 = w_\varepsilon(t,s) - \widehat{w}_\infty(t) - M_7 E(s) e^{M_8 t}$. Тогда Q_4 удовлетворяет неравенству

$$\nu\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 Q_4}{\partial s^2} - \frac{\partial Q_4}{\partial t} = -M_7\{\nu\sqrt{w_\varepsilon}E''(s) - M_8 E(s)\}e^{M_8 t} \ge 0,$$

ибо $E''(s) = H''(s) + O(\varepsilon)$, $E \ge \varepsilon + H(s) - w_\infty(0)$, а w_ε равномерно ограничена. Поэтому Q_4 не достигает в D_ε своего наибольшего положительного значения. Рассмотрим Q_4 на границе ∂D_ε области D_ε. Из граничных условий (2.4), (2.8) получаем

$$Q_4|_{t=0} = w_0(s+\varepsilon) - w_\infty(0) - \varepsilon - M_7 E(s) \le 0, \quad \left.\frac{\partial Q_4}{\partial s}\right|_{s=0,\, t<t_*} = f(t) + M_7 e^{M_8 t} > 0,$$

$$\left.\frac{\partial Q_4}{\partial s}\right|_{s=1/\varepsilon,\, t<t_*} = f_1(t) - M_7\left(\frac{3}{4} + H'(1/\varepsilon)\right)e^{M_8 t} < 0,$$

$$Q_4|_{s=0,\, t>t_*} \le 0, \quad \left.\frac{\partial Q_4}{\partial s}\right|_{s=1/\varepsilon,\, t>t_*} = -M_7\left(\frac{3}{4} + H'(1/\varepsilon)\right)e^{M_8 t} < 0.$$

Здесь использован тот факт, что $\lim\limits_{s\to\infty} H'(s) = 0$, поэтому при малых ε будет $3/4 + H'(1/\varepsilon) \ge 1$. Поведение Q_4 на ∂D_ε показывает, что там не достигается ее наибольшее положительное значение, поэтому $Q_4 \le 0$. Лемма 6 доказана.

Из лемм 1, 2, 6 следует, что предельная функция w при любых $(t,s) \in D_a$ удовлетворяет неравенствам

$$M_7 e^{M_8 t}(H(s) - w_\infty(0)) \ge w(t,s) - w_\infty(t) \ge 0 \quad \text{при} \quad t < t_*,$$

$$
\begin{aligned}
M_7 e^{M_8 t}(H(s) - w_\infty(0)) &\geq w(t,s) - w_\infty(t) \\
&\geq w_\infty(t)[\zeta_1(s)(2 - e^{\tau t}) - 1]|_{s\to\infty} \geq O(\sqrt{\tau}) \quad \text{при} \quad t > t_*.
\end{aligned}
$$

Так как $H(s) \to w_\infty(0)$ при $s \to \infty$, и τ произвольно мало, из этих неравенств следует выполнение утверждения б). Теорема 1 доказана.

§ 3. Существование классического решения

Существование классического решения доказывается в более узком классе задаваемых величин, что обусловлено необходимостью обеспечить достаточную гладкость построенного решения. При этом ограничения касаются не только дифференциальных свойств данных, но и их величин. Примем условие

$$
w'_\infty(t) \leq k_1 f(t) - k_2 f'(t) \quad \text{при} \quad t < t_*; \quad k_1 = -\frac{4\nu f(0)}{\sqrt{3w_0(0)}}, \quad k_2 = -\frac{2w_0(0)}{f(0)}. \tag{3.1}
$$

Заметим, что это условие существенно, без него не удается установить существование классического решения. Оно означает, что ускорение торможения внешнего потока при подходе к точке контакта должно быть в некотором смысле достаточно большим в сравнении с величиной касательного напряжения на свободной границе. Это условие может быть заменено другими такого же смысла.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и, кроме того, пусть* $w_\infty \in C^1(0,a)$, $w_\infty \in C^2(0,t_*)$, $w_\infty \in C^2(t_*,a)$, $f(t) < 0$, $f'(t) \geq 0$, $f(t_*) = 0$, $w_0(0) > w_\infty(0)$, $w'_0(s) \leq 0$ $\forall s \geq 0$, *и пусть, наконец, справедливо условие* (3.1).

Тогда в D_a *существует решение* $w(t,s)$ *задачи* (1.1), (1.2) *такое, что оно непрерывно и ограничено в* $\overline{D_a}$ *вместе с* $\partial w/\partial s$, *а* $\partial w/\partial t$ *и* $\sqrt{w}\partial^2 w/\partial s^2$ *ограничены в* $\overline{D_a}$, *причем*

$$
\left.\frac{\partial w(t,s)}{\partial s}\right|_{s=0,\, t>t_*} \geq \lambda_1 w_\infty(t), \tag{3.2}
$$

где $\lambda_1 > 0$ *— некоторое число.*

Доказательство. Очевидно, что в области D_1 можно провести все построения доказательства теоремы 1. Кроме того, можно модифицировать функцию w_0, задающую начальный профиль скорости, следующим образом: при $s \in (0, 1/2\varepsilon - 1)$ она не изменена, при $s \in (1/2\varepsilon, 1/\varepsilon)$ она точно равна значению $w_\infty(0)$, а на интервале $(1/2\varepsilon - 1, 1/2\varepsilon)$ доопределена таким образом, чтобы ее свойства сохранялись. Ясно что это сделать можно; при этом $w'_0(1/\varepsilon) = 0$. Поэтому можно считать $\mu_\varepsilon = \varepsilon$, $\widehat{w}_\infty(t) = \varepsilon + w_\infty(t)$. В дальнейшем считается, что такая модификация проведена. Заметим еще, что из условия (3.1) следует, что $w'_\infty < 0$ при некоторых значениях t, тем самым $w_\infty(0) > 0$. Установим в D_1 дополнительные свойства функции w_ε.

Лемма 7. *В* D_1 *справедлива оценка*

$$
w_\varepsilon(t,s) \leq w_0(0)[1 + e^{2sf(0)/\sqrt{3w_0(0)}}]\frac{f(t)}{f(0)} + \varepsilon F(s)e^{\alpha t}, \tag{3.3}
$$

где

$$
F(s) = \begin{cases} 2, & s \in (0, 1/\varepsilon - 1), \\ 2 + (s - 1/\varepsilon + 1)^3/3, & s \in (1/\varepsilon - 1, 1/\varepsilon). \end{cases}
$$

Доказательство. Обозначим через Q_3 правую часть неравенства (3.3). Тогда

$$(Q_3 - w_\varepsilon)|_{t=0} \geq w_0(0) - w_0(s) \geq 0, \quad \frac{\partial(Q_3 - w_\varepsilon)}{\partial s}\bigg|_{s=0} = f(t)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) < 0,$$

$$\frac{\partial(Q_3 - w_\varepsilon)}{\partial s}\bigg|_{s=1/\varepsilon} = f(t)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} e^{2f(0)/\varepsilon\sqrt{3}w_0(0)} + \varepsilon e^{\alpha t}\right) > 0.$$

Кроме того,

$$L(Q_3) + \widehat{w}'_\infty(t) = \left\{\nu\sqrt{Q_3}\frac{4f(0)f(t)}{3w_0(0)} e^{2sf(0)/\sqrt{3}w_0(0)}\right.$$
$$\left. - \frac{f'(t)w_0(0)}{f(0)}[1 + e^{2sf(0)/\sqrt{3}w_0(0)}] + \widehat{w}'_\infty(t)\right\} + \varepsilon e^{\alpha t}\{\nu\sqrt{Q_3}F''(s) - \alpha F(s)\} \leq 0.$$

Это неравенство верно, поскольку выражения в фигурных скобках неположительны: в первых скобках в силу (3.1) и неравенства $Q_3 \leq 3w_0(0)$, а во вторых — при больших α. Поэтому $L_1(Q_3 - w_\varepsilon) \leq 0$, $Q_3 \geq w_\varepsilon$, и лемма 7 доказана.

Лемма 8. *В области D_1 имеют место оценки*

$$-C\sqrt{w_\varepsilon - \widehat{w}_\infty} \leq \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial s} \leq 0, \tag{3.4}$$

где $C = \text{const} > 0$ достаточно велико. Кроме того, при малых ε в полосе $1/\varepsilon - 1 \leq s \leq 1/\varepsilon$ будет

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial s} = O(\varepsilon). \tag{3.5}$$

Доказательство. Верхняя из оценок (3.4) очевидна, ибо $\partial w_\varepsilon/\partial s \leq 0$ на ∂D_1 удовлетворяет в D_1 равномерно параболическому уравнению (2.6). Нижняя верна при $s = 1/\varepsilon$ и при $t = 0$, что следует из условия $w_0 > w_\infty(0) > 0$ и ограниченности w'_0. Докажем ее справедливость при $s = 0$. Для этого в области $D' = \{(t, s) \in (0, t_*) \times (0, s_1)\}$ установим оценку

$$w_\varepsilon(t, s) \geq \widehat{w}_\infty(t) + \frac{f(t)}{f(0)}(s_1 - s)^{6/5}. \tag{3.6}$$

Из леммы 1 следует, что $w_\varepsilon \geq \widehat{w}_\infty$, поэтому оценка (3.6) верна при $s = s_1$. Поскольку $w_0(0) > w_\infty(0)$, эта оценка справедлива при $t = 0$, если s_1 достаточно мало. Обозначим правую часть неравенства (3.6) через T. Тогда

$$L(T) + \widehat{w}'_\infty(t) = \nu\sqrt{T}\frac{6f(t)}{25(s_1 - s)^{4/5}f(0)} - (s_1 - s)^{6/5}\frac{f'(t)}{f(0)} \geq 0,$$

так как неотрицательно каждое из слагаемых. Кроме того, $\partial(w_\varepsilon - T)/\partial s|_{s=0} = f(t)[1 + 6s_1^{1/5}/5f(0)] < 0$ при достаточно малых s_1. Но тогда $w_\varepsilon - T \geq 0$, т. е. верна оценка (3.6), откуда следует выполнение нижней из оценок (3.4) при $s = 0$. Таким образом, эта оценка выполняется на всей границе ∂D_1 области D_1. Дальнейшее доказательство оценок (3.4) проводится точно так же, как это сделано при доказательстве аналогичного свойства в лемме 3 из [5].

Оценка (3.5) следует из верхней из оценок (3.4) и оценки в D_1

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial s} + \varepsilon e^{\alpha t} + M(\sin 1 - \sin(\varepsilon s)) \geq 0,$$

которая верна для больших α, M при $t = 0$, если учесть модификацию начального профиля, а также при $s = 1/\varepsilon$ и при $s = 0$, что очевидно. Действуя так же, как при доказательстве леммы 3 из [5], можно завершить проверку этой оценки. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Для любого $\omega > 0$ в области $D_1^\omega = \{(t,s) \in (0, t_* - \omega) \times (0, 1/\varepsilon)\}$ справедлива оценка*

$$\left|\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial s^2}\right| \le C_\omega, \tag{3.7}$$

а в области D_1 — оценки

$$\left|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}\right|, \quad \left|\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial s^2}\right| \le M_4, \quad \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial s^2} \ge -M_4. \tag{3.8}$$

Здесь $C_\omega = \mathrm{const} > 0$ зависит от ω, но не зависит от ε.

Доказательство. Оценка (3.7) вполне очевидна, так как по лемме 1 и свойствам функции $\widehat{w}_\infty$ в D_1^ω будет $w_\varepsilon \ge \widehat{w}_\infty(t) \ge M_\omega > 0$. Из леммы 1 и выполнения в D_1 уравнения (2.4) следует, что первую из оценок (3.8) достаточно доказать для $\sqrt{w_\varepsilon}\partial^2 w_\varepsilon/\partial s^2$. Докажем равномерную ограниченность $\partial^2 w_\varepsilon/\partial s^2$ при $s = 0$. Для этого достаточно убедиться в справедливости при $s \in (0, 1/2)$ оценок

$$f(t) + M_5(s + s^2/2) \ge \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial s} \ge f(t) - M_5(s - s^2/2). \tag{3.10}$$

Для доказательства нижней из оценок (3.10) заметим, что она верна при $s = 0$, при $s = 1/2$ и при $t = 0$. Обозначив $Q_4 = \partial w_\varepsilon/\partial s - f(t) + M_5(s - s^2/2)$, в силу (2.7) получаем для Q_4 неравенство

$$\begin{aligned}\nu\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 Q_4}{\partial s^2} + \frac{\nu q_\varepsilon}{2\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{\partial Q_4}{\partial s} - \frac{\partial Q_4}{\partial t} - \frac{\nu M_5(1-s)Q_4}{2\sqrt{w_\varepsilon}} &= f'(t) - \nu\sqrt{w_\varepsilon}M_5 \\ &+ \frac{\nu M_5(1-s)}{2\sqrt{w_\varepsilon}}f(t) - \frac{\nu M_5^2(1-s)(s - s^2/2)}{2\sqrt{w_\varepsilon}} \le 0,\end{aligned}$$

которое выполняется в малой окрестности точки $t = t_*$, потому что там согласно (3.1) $f'(t) = O(w_\infty(t))$. Поскольку $w_\varepsilon \ge \widehat{w}_\infty$, имеем $f' - \nu\sqrt{w_\varepsilon}M_5 \le 0$. При других значениях t отрицательный член в левой части неравенства (содержит множитель f) достаточно мал при больших M_5. Отсюда следуют отсутствие у функции Q_4 в рассматриваемой области отрицательных минимумов и справедливость нижней оценки (2.10). Верхняя оценка доказывается вполне аналогично.

Неравенство (3.5) леммы 8 позволяет доказать равномерную ограниченность $\partial^2 w_\varepsilon/\partial s^2$ при $s = 1/\varepsilon$ точно так же, как это сделано при доказательстве леммы 4 из [5]. Таким образом, неравенства (3.8) выполняются на всей границе ∂D_1 области D_1. Продифференцируем теперь уравнение (2.6) по s и, обозначив $q_\varepsilon = \chi(S)$, $l = \partial S/\partial s$, получим уравнение для функции l вида

$$\begin{aligned}\nu\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 l}{\partial s^2} - \frac{\partial l}{\partial t} + \nu\sqrt{w_\varepsilon}\left[\frac{\chi}{w_\varepsilon} + 2l\frac{\chi''}{\chi'}\right]\frac{\partial l}{\partial s}& \\ = -\frac{\nu}{\sqrt{w_\varepsilon}}\left\{w_\varepsilon\left(\frac{\chi''}{\chi'}\right)'l^3 + \frac{1}{2}\left[\chi\frac{\chi''}{\chi'} + \chi'\right]l^2 - \frac{\chi^2}{2w_\varepsilon}l\right\}&.\end{aligned}$$

Если $\chi(S) = S$, то правая часть этого уравнения отрицательна при $l < 0$, поэтому функция l может принимать свой отрицательный минимум лишь на ∂D_1, откуда следует равномерная ограниченность в D_1 $l = \partial^2 w_\varepsilon/\partial s^2$ снизу, т. е. последняя из оценок (3.8). Заменив l на $\sigma = \sqrt{w_\varepsilon}l$, приходим для σ к уравнению вида

$$L_2(\sigma) = -\frac{\nu}{w_\varepsilon}\left\{\sqrt{w_\varepsilon}\left(\frac{\chi''}{\chi'}\right)'\sigma^3 + \frac{1}{2}\left[-\chi\frac{\chi''}{\chi'} + \chi'\right]\sigma^2 + \frac{1}{2}\widehat{w}'_\infty\sigma\right\}.$$

Здесь L_2 — некоторый линейный параболический оператор. Положим теперь $\chi(s) = -e^{-S}$, где $S \in (-\ln M_1, \infty)$. Эта замена корректна ввиду (3.4). Тогда во внутренних точках D_1 не может быть положительного максимума функции σ, ибо коэффициенты при σ^3 и σ^2 обращаются в нуль, а $\widehat{w}'_\infty \leq 0$. Поэтому функция σ равномерно ограничена сверху, следовательно, $\sqrt{w_\varepsilon}\partial^2 w_\varepsilon/\partial s^2 = \chi'\sigma = \sigma e^{-S}$ также равномерно ограничена сверху. Лемма 9 доказана.

Установленные выше дополнительные свойства функции w_ε позволяют доказать существование при $t < t_*$ решения рассматриваемой задачи с требуемыми теоремой 2 свойствами. Однако в области D_2 не удается установить аналогичных оценок. Поэтому будем строить решение при $t < t_*$ и при $t > t_*$ независимо, а затем решение во всей области D_a получим путем склеивания решений в этих двух частях.

В области D_1^s функции из семейства $\{w_\varepsilon\}$ равномерно по ε ограничены вместе со своими производными, входящими в (2.3). Из этого семейства можно выбрать равномерно сходящуюся последовательность такую, что ее производные, входящие в (2.3), равномерно сходятся в области $D_a^1 = D_a \cap \{t < t_*\}$. Предельная функция $w(t,s)$ будет, очевидно, решением задачи (1.7), (1.9) в этой области. Оценки лемм 1, 7 позволяют заключить, что $w \to 0$ при $t \to t_* - 0$. Кроме того, из леммы 1 видно, что $w > 0$ в D_a^1. Тем самым $\varlimsup\limits_{t \to t_*-0} \partial w/\partial t \leq 0$. Но так как $\partial^2 w/\partial s^2$ равномерно ограничена снизу и $w'_\infty \to 0$ при $t \to t_*$, то $\varliminf\limits_{t \to t_*-0} \partial w/\partial t \geq 0$. Таким образом, $\partial w/\partial t \to 0$ при $t \to t_* - 0$.

Рассмотрим в области $D_a^2 = D_a \cap \{t > t_*\}$ уравнение (1.7), поставив для него граничные условия

$$w|_{t=t_*} = 0, \quad w|_{s=0} = 0. \tag{3.11}$$

Задача о развитии пограничного слоя Прандтля из точки торможения исследовалась в [9], где получены условия ее разрешимости и асимптотические оценки. Здесь невозможно прямо использовать эти результаты, поскольку исследования в [9] проводились для задачи в форме Крокко, что эквивалентно некоторому симметрическому пограничному слою в форме Прандтля. Здесь же, при изучении движения вблизи точки контакта, основной формой задачи является форма Мизеса, а ее эквивалентность задаче в форме Прандтля при полном вырождении начального профиля скорости не установлена. В [9] решения граничных задач строились с помощью метода прямых путем замены производной по t ее разностным аналогом. Здесь можно провести аналогичные исследования, поскольку уравнение Мизеса того же типа, что и стационарное уравнение Крокко. Но эти построения несколько громоздки и требуют конкретного (степенного) характера вырождения функции $w_\infty(t)$ при $t \to t_* + 0$.

Воспользуемся предложенным в [10] методом прямых, основанным на замене производной $\partial^2 w/\partial s^2$ ее разностным аналогом и несколько модифицированным для рассматриваемой здесь задачи. Пусть $1 > h > 0$ — произвольное число, а $s_i = ih$. Рассмотрим задачу Коши для счетной системы функций $\overline{w} = (w_1, w_2, \dots,)$ вида

$$w_i' = Y_i(t, \overline{w}) = w'_\infty(t) + \nu\sqrt{w_i}\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2}, \tag{3.12}$$

$$w_i(t_*) = h. \tag{3.13}$$

Здесь и всюду далее $i = 1, 2, \dots$, а $w_0 = h$ — заданная функция. Построим для этой задачи системы верхних и нижних (в смысле [10]) функций $\overline{U}$, $\bar{u}$ соответственно, т. е. таких, чтобы имели место неравенства

$$u_i(t_*) \le w_i(t_*), \quad u_i'(t) \le Y_i(t, \bar{u}); \quad U_i(t_*) \ge w_i(t_*), \quad U_i'(t) \ge Y_i(t, \overline{U}). \tag{3.14}$$

Легко проверить, что (3.14) выполняются, если положить $u_i = h$, $U_i = h + w_\infty(t)$. Более того, если в правой части (3.10) заменить множитель $\sqrt{w_i}$ какой-либо другой положительной функцией, то все равно U_i и u_i остаются верхними и нижними функциями. Модифицирум этот множитель так, чтобы при $w_i < h/2$ он был бы гладкой функцией, не меньшей $\sqrt{h}/2$, а при $w_i > \sup\limits_t w_\infty(t) + 1$ — гладкой ограниченной функцией. Тогда модифицированные функции Y_i непрерывны по t, удовлетворяют условию Липшица по $\overline{w}$ и квазимонотонны по $\overline{w}$ в смысле [10]. Поэтому по теоремам A и B из [10] модифицированная задача (3.12), (3.13) имеет при $t \in (t_*, a)$ единственное решение, причем выполняются неравенства

$$h + w_\infty(t) \ge w_i(t) \ge h. \tag{3.15}$$

В силу (3.15) это решение совпадает с решением исходной задачи (3.12), (3.13).

Обозначим $p_k = (w_{k+1} - w_k)/h$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда функции p_i — решение задачи Коши

$$p_i'(t) = \frac{\nu}{h^2}[\sqrt{w_{i+1}}p_{i+1} + \sqrt{w_i}p_{i-1} - (\sqrt{w_{i+1}} + \sqrt{w_i})p_i], \tag{3.16}$$

$$p_i(t_*) = 0. \tag{3.17}$$

Оценим сперва p_0. Из (3.15) очевидно, что $p_0 \ge 0$. В [10, § 7] установлено, что функции $W_i = M_6(1+t)\zeta_5(s_i)$ являются верхними для задачи (3.12), (3.13). Здесь $\zeta_5(s) = s - s^{3/2}/3$ при $s \in (0, 4)$ и $\zeta_5(s) = 4/3$ при $s \ge 4$. Поэтому $w_1 \le W_1 \le hM_7$, откуда $p_0 \le M_7$. Тогда функции $\hat{p}_i = 0$ и $P_i = M_7$ будут нижними и верхними соответственно для задачи Коши (3.16), (3.17), отсюда $0 \le p_i \le M_7$.

Продифференцируем (3.12) по t и обозначим $r_i = w_i'$, $r_0 = 0$. Так как $r_i(0) = Y_i(0, \overline{w}(0))$, получим для r_i задачу Коши

$$r_i'(t) = w_\infty''(t) + \nu\sqrt{w_i}\frac{r_{i+1} - 2r_i + r_{i-1}}{h^2} + \frac{r_i(r_i - w_\infty')}{2w_i}, \tag{3.18}$$

$$r_i(t_*) = 0. \tag{3.19}$$

В лемме § 7 из [10] показано, что к этой задаче можно считать применимыми теоремы A и B из [10]. Установим, что $R_i = w_\infty'$ и $\hat{r}_i = -M_8 w_i$ являются верхними и нижними функциями. Первое из этих утверждений очевидно, а для доказательства второго подставим $\hat{r}_i$ в (3.18). Используя (3.12), получаем неравенство

$$0 \le w_\infty'' + M_8 w_\infty' + (M_8 w_i)^2 + M_8 w_i w_\infty'.$$

Оно справедливо, так как в некоторой окрестности $t = t_*$ из свойств w_∞ следует $w_\infty'' \ge 0$, а при других значениях t это неравенство достигается увеличением M_8. Таким образом,

$$-M_8 w_i(t) \le r_i(t) \le w_\infty'(t). \tag{3.20}$$

Определим кусочно гладкую непрерывную функцию $w_h(t, s)$ путем линейной интерполяции функций w_i, т. е. $w_h(t, s_i) = w_i(t)$ и для любого $k \in (0, 1)$ положим

$$w_h(t, ks_i + (1-k)s_{i+1}) = kw_i(t) + (1-k)w_{i+1}(t).$$

Производные по t и s семейства функций $\{w_h, h > 0\}$ равномерно ограничены. Действуя точно так же, как в [10], можно показать, что в $\{w_h, h > 0\}$ существует сходящаяся последовательность и предельная функция $w(t,s)$ является решением задачи (3.1), (3.11) в области D_a^2. При этом из (3.20) следует, что $\partial w/\partial t$ непрерывна вплоть до линии $t = t_*$ и $\lim\limits_{t\to t_*+0} \partial w/\partial t = 0$.

Определим в области D_a функцию $w(t,s)$ так, чтобы в D_a^1 и D_a^2 она совпадала с построенными там решениями и $w(t_*, s) = 0$. Так как

$$\lim_{t\to t_*+0} \frac{\partial w}{\partial t} = \lim_{t\to t_*-0} \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \lim_{t\to t_*+0} w = \lim_{t\to t_*-0} w = 0,$$

то w будет решением (1.7) во всей области D_a. Непрерывность $\partial w/\partial s$ вплоть до линии $s = 0$ при $t < t_*$ вытекает из (3.10), а при $t > t_*$ — из (3.2) (будет доказано ниже) и ограниченности величины $\sqrt{w}\partial^2 w/\partial s^2$. Поскольку

$$\lim_{t\to t_*-0} \frac{\partial w}{\partial s} = f(t_*) = 0 = \lim_{t\to t_*+0} \frac{\partial w}{\partial s},$$

то $\partial w/\partial s$ непрерывна в $\overline{D_a}$. Таким образом, построено решение с требуемыми теоремой 2 дифференциальными свойствами. Чтобы доказать (3.2), проверим, что функции $\Delta_i(t) = h + w_\infty(t)e^{-kt}\zeta_6(s_i)$ являются нижними для задачи (3.12), (3.13). Здесь $k > 0$ достаточно велико, $\zeta_6(s) = s$ при $s \in (0, 1/2)$, $1/2 \le \zeta_6(s) < 1$ при $s \ge 1/2$ и производные ζ_6 до 4-го порядка включительно ограничены. Очевидно, что $\Delta_i(t_*) = w_i(t_*)$. Докажем, что $\Delta_i' \le Y_i(t, \overline{\Delta})$. Подставляя Δ_i, получаем

$$e^{-kt}\zeta_6(s_i)\big[w_\infty' - kw_\infty\big] \le w_\infty' + \nu w_\infty(t)e^{-kt}\sqrt{w_i}\frac{\zeta_6(s_{i+1}) - 2\zeta_6(s_i) + \zeta_6(s_{i-1})}{h^2}.$$

Это неравенство верно, поскольку $e^{-kt}\zeta_6 < 1$, а величины

$$\frac{\zeta_6(s_{i+1}) - 2\zeta_6(s_i) + \zeta_6(s_{i-1})}{h^2}$$

равны 0 при $s_i < 1/2 - h$ и равномерно ограничены при других значениях s_i, функции Δ_i ограничены, а k произвольно велико. Поэтому Δ_i — нижние функции для задачи (2.12), (2.13), откуда $w_i \ge \Delta_i$, т. е. $p_0(t) \ge k_2 w_\infty(t)$, тем самым верно (2.2). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: ОГИЗ, 1948. Т. II.
2. *Napolitano L. G.* Marangoni boundary layers // Proc. of 3rd European symp. on material sciences in space. Grenoble, 1979. P. 349–358.
3. *Олейник О. А., Самохин В. Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука, Физматлит, 1997.
4. *Кузнецов В. В.* О существовании пограничного слоя вблизи свободной поверхности // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1984. Т. 67. С. 68–75.
5. *Кузнецов В. В.* О развитии пограничного слоя Марангони из точки торможения // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 6. С. 820–826.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
7. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17, № 3. С. 3–146.

8. *Кружков С. Н.* Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. Т. 5. С. 217–272.

9. *Олейник О. А.* Асимптотическое разложение решения системы уравнений пограничного слоя для стационарного плоскопараллельного течения несжимаемой жидкости в окрестности точки останова // Тр. Ин-та. прикл. математики Тбил. ун-та. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1967. Т. 2. С. 93–111.

10. *Walter W.* Existence and convergence theorems for the boundary layer equations based on the line method // Arch. Rational Mech. Anal. 1970. V. 39, N 3. P. 169–188.

Статья поступила 8 декабря 1998 г.,
окончательный вариант — 10 марта 1999 г.

г. Новосибирск
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
просп. акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
`kuznetsov@hydro.nsc.ru`