Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6

УДК 517.962.22

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К. Айдын, А. Я. Булгаков, Г. В. Демиденко

Аннотация: Рассмотрена линейная система разностных уравнений с периодическими коэффициентами

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad n \geq 0, \quad A(n+T) = A(n).$$

Предложены числовые характеристики асимптотической устойчивости решений этой системы, и с их использованием получены различные оценки решений. Библиогр. 7.

§ 1. Введение

В работе рассматривается линейная система разностных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad n \geq 0, \tag{1.1}$$

где $N \times N$-матрица $A(n)$ периодическая с периодом T, т. е.

$$A(n+T) = A(n), \quad n \geq 0.$$

Предполагается, что нулевое решение системы (1.1) асимптотически устойчиво. Согласно спектральному критерию это означает, что все собственные значения матрицы монодромии системы (1.1)

$$X(T) = A(T-1)\dots A(1)A(0) \tag{1.2}$$

принадлежат единичному кругу $\{|\lambda| < 1\}$ (см., например, [1]).

Наша цель — указать ряд числовых характеристик асимптотической устойчивости решений системы (1.1), не опираясь на спектр матрицы монодромии.

В случае постоянных коэффициентов $A(n) = A$, $n \geq 0$, эта задача может быть решена на основе критерия Ляпунова о разрешимости матричного уравнения

$$A^*HA - H = -C, \quad C = C^* > 0. \tag{1.3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Турецкого комитета по науке и технике (TUBITAK).

Согласно этому критерию нулевое решение (1.1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда матричное уравнение (1.3) имеет единственное решение $H = H^* > 0$ (см., например, [2, 3]). В этом случае решение (1.3) дается формулой

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k C A^k,$$

где A^* — сопряженная матрица к A. В частности, если $C = I$ — единичная $N \times N$-матрица, то

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k A^k. \tag{1.4}$$

Следовательно, можно утверждать, что величина

$$\omega(A) = \|H\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k A^k \right\| \tag{1.5}$$

является характеристикой асимптотической устойчивости нулевого решения (1.1) в случае, когда $A(n) = A$, $n \geq 0$. Отметим также, что имеет место оценка [3, 4]

$$\|A^n\| \leq \left(1 - \frac{1}{\omega(A)}\right)^{n/2} \omega(A)^{1/2}, \quad n \geq 0.$$

Основываясь на этом подходе, один из авторов [5, 6] разработал алгоритм с гарантированной точностью решения системы (1.1) с постоянными коэффициентами. В частности, этот алгоритм позволяет получать матрицу (1.4) и параметр (1.5) на компьютере с гарантированной точностью.

В настоящей работе мы предлагаем числовые характеристики асимптотической устойчивости нулевого решения периодической системы (1.1) и, используя их, получаем различные оценки решений.

§ 2. Формулировка основных результатов

В дальнейшем для определенности будем рассматривать спектральную норму квадратных $N \times N$ матриц B, т. е.

$$\|B\| = \max_{\|u\|=1} \|Bu\|,$$

где

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^{N} |u_i|^2 \right)^{1/2}$$

— норма вектора $u = (u_1, \dots, u_N)$ в линейном пространстве E_N. Скалярное произведение векторов $u, v \in E_N$ будем обозначать символом

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{N} u_i \bar{v}_i.$$

Рассмотрим начальную задачу для системы (1.1):

$$x(n+1) = A(n)x(n), \ n \geq 0, \quad x(0) = x_0. \tag{2.1}$$

Пусть последовательность матриц $\{X(n)\}$ является решением задачи

$$X(n+1) = A(n)X(n),\ n \geq 0, \quad X(0) = I. \tag{2.2}$$

Тогда, очевидно, решение $\{x(n)\}$ начальной задачи (2.1) имеет вид $x(n) = X(n)x_0$.

Рассмотрим матричный ряд

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} (X^*(T))^k (X(T))^k. \tag{2.3}$$

Поскольку матрица $X(T)$, имеющая вид (1.2), является матрицей монодромии, согласно критерию Ляпунова этот ряд сходится тогда и только тогда, когда нулевое решение системы (1.1) асимптотически устойчиво.

В качестве первой числовой характеристики асимптотической устойчивости нулевого решений системы (1.1) рассмотрим

$$\{\omega_1(A,T), \rho(A,T)\}, \tag{2.4}$$

где $\omega_1(A,T)$ — спектральная норма ряда (2.3), т. е.

$$\omega_1(A,T) = \|F\|$$

и

$$\rho(A,T) = \max\{\|X(0)\|, \|X(1)\|, \dots, \|X(T-1)\|\}.$$

Теорема 2.1. *Для решения $\{x(n)\}$ начальной задачи (2.1) справедливы оценки*

$$\|x(kT+m)\| \leq \|X(m)\| \left(1 - \frac{1}{\omega_1(A,T)}\right)^{k/2} \omega_1(A,T)^{1/2} \|x_0\|, \tag{2.5}$$
$$k \geq 0, \quad 0 \leq m \leq T-1.$$

Следствие. *Решение задачи (2.1) удовлетворяет следующим оценкам:*

$$\|x(n)\| \leq \rho(A,T) \left(1 - \frac{1}{\omega_1(A,T)}\right)^{k/2} \omega_1(A,T)^{1/2} \|x_0\|, \tag{2.6}$$
$$n = kT + m, \quad k \geq 0,\ 0 \leq m \leq T-1.$$

Рассмотрим теперь матричный ряд

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} X^*(k) X(k). \tag{2.7}$$

Поскольку в силу периодичности

$$X(kT+m) = X(m)(X(T))^k, \quad k \geq 0,\ 0 \leq m \leq T-1,$$

очевидно, этот ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд (2.3).

В качестве второй числовой характеристики асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.1) рассмотрим

$$\omega_2(A,T) = \|\Phi\|, \tag{2.8}$$

т. е. спектральную норму ряда (2.7). Отметим, что эту характеристику можно переписать в виде

$$\omega_2(A,T) = \sup_{L \geq 0,\ \|x(0)\|=1} \sum_{l=0}^{L} \|x(l)\|^2.$$

Ясно, что выполнены оценки

$$\omega_1(A,T) \leq \omega_2(A,T), \quad \rho(A,T) \leq \omega_2(A,T)^{1/2}.$$

Теорема 2.2. *Для решения $\{x(n)\}$ начальной задачи* (2.1) *справедливы оценки*

$$\|x(n)\| \le \left(1 - \frac{1}{\omega_2(A,T)}\right)^{k/2} \omega_2(A,T)\|x_0\|, \tag{2.9}$$
$$n = kT + m, \quad k \ge 0, \quad 0 \le m \le T-1.$$

Следуя схеме [5, 6], можно указать алгоритм с гарантированной точностью для вычисления числовых характеристик (2.4), (2.8). Однако отметим, что если сравнивать оценки (2.5), (2.6), (2.9) решений задачи (2.1), получаемые с использованием этих характеристик, то в случае постоянных коэффициентов $A(n) = A$ приходим к оценкам, более грубым по сравнению с оценкой

$$\|x(n)\| \le \left(1 - \frac{1}{\omega(A)}\right)^{n/2} \omega(A)^{1/2}\|x_0\|, \quad n \ge 1, \tag{2.10}$$

поскольку в этом случае

$$\omega(A) = \omega_1(A,T) = \omega_2(A,T).$$

Для того чтобы получить более точные оценки решений задачи (2.1), введем еще одну числовую характеристику асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.1).

С этой целью определим дискретные аналоги интегралов типа Ляпунова [7]. Введем последовательности матричных рядов $\{H(l)\}$ и $\{h(l)\}$, где

$$H(l) = \sum_{k=l}^{\infty} \left(\prod_{j=l}^{k-1} A(j)\right)^* \left(\prod_{j=l}^{k-1} A(j)\right), \tag{2.11}$$

$$h(l) = \sum_{k=l}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} A(j)\right)^* \left(\prod_{j=0}^{k-1} A(j)\right), \tag{2.12}$$

при этом по определению полагаем

$$\prod_{j=l}^{k-1} A(j) = \begin{cases} A(k-1)\dots A(l) & \text{при } k > l, \\ I & \text{при } k = l. \end{cases}$$

Ясно, что в предположении асимптотической устойчивости решений (1.1) эти ряды сходятся. В некоторых случаях нам будет удобно применять эквивалентную перезапись этих матриц с использованием матричных последовательностей $\{Y(n,l)\}$, являющихся при каждом целом $l \ge 0$ решением задачи

$$Y(n+1,l) = A(n)Y(n,l), \ n \ge l, \quad Y(l,l) = I. \tag{2.13}$$

Тогда матрицы $\{H(l)\}$, $\{h(l)\}$ можно переписать в виде

$$H(l) = \sum_{k=l}^{\infty} Y^*(k,l)Y(k,l),$$

$$h(l) = \sum_{k=l}^{\infty} X^*(k)X(k), \quad X(k) = Y(k,0).$$

Из определений, очевидно, вытекает, что

$$H(0) = h(0) = \Phi.$$

Свойства этих матриц будут изучены в § 4. В частности, будет показана периодичность матриц $H(l)$ с периодом T.

В качестве третьей числовой характеристики асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.1) рассмотрим T чисел

$$\{\|H(0)\|, \|H(1)\|, \dots, \|H(T-1)\|\}. \tag{2.14}$$

Теорема 2.3. *Для любого вектора $v \in E_N$ выполняются оценки*

$$\langle h(l)v, v\rangle \le \prod_{j=0}^{l-1}\left(1-\frac{1}{\|H(j)\|}\right)\langle h(0)v, v\rangle, \quad l \ge 1. \tag{2.15}$$

Теорема 2.4. *Для решения $\{x(n)\}$ начальной задачи* (2.1) *справедливы оценки*

$$\|x(n)\|^2 \le \prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{1}{\|H(j)\|}\right)\|H(0)\|\|x_0\|^2, \quad n \ge 1. \tag{2.16}$$

Отметим, что можно рассмотреть более грубую характеристику, чем (2.14), состоящую из двух чисел

$$\{\omega_2(A,T), M(A,T)\},$$

где

$$\omega_2(A,T) = \|H(0)\| = \|\Phi\|,$$
$$M(A,T) = \max\{\|H(0)\|, \|H(1)\|, \dots, \|H(T-1)\|\}.$$

Тогда из теоремы 2.4 вытекает

Следствие. *Решение задачи* (2.1) *удовлетворяет оценкам*

$$\|x(n)\| \le \left(1-\frac{1}{M(A,T)}\right)^{n/2}\omega_2(A,T)^{1/2}\|x_0\|, \quad n \ge 1. \tag{2.17}$$

Очевидно, неравенства (2.16), (2.17) в частном случае $A(n) = A$, $n \ge 0$, совпадают с (2.10).

Теорема 2.5. *Для собственных значений λ_i матрицы монодромии* (1.2) *имеют место оценки*

$$|\lambda_i|^2 \le \prod_{j=0}^{T-1}\left(1-\frac{1}{\|H(j)\|}\right), \quad i = 1, \dots, N.$$

§ 3. Доказательство теорем 2.1, 2.2

Доказательство теоремы 2.1. Напомним, что решение $\{x(n)\}$ начальной задачи (2.1) имеет вид

$$x(n) = X(n)x_0,$$

где последовательность матриц $\{X(n)\}$ удовлетворяет (2.2). В силу периодичности для любых $k \ge 0$ и $0 \le m \le T-1$ имеем

$$X(kT+m) = X(m)(X(T))^k.$$

Следовательно, для решения задачи (2.1) получаем оценку

$$\|x(kT+m)\| \le \|X(m)\|\,\|(X(T))^k\|\,\|x_0\|.$$

А поскольку матричный ряд (2.3), очевидно, является решением дискретного уравнения Ляпунова $X^*(T)FX(T) - F = -I$, в силу неравенства (2.10) имеем

$$\|(X(T))^k\| \le \left(1-\frac{1}{\omega_1(A,T)}\right)^{k/2}\omega_1(A,T)^{1/2}, \quad k \ge 1.$$

Отсюда вытекает оценка (2.5). Теорема доказана.

Неравенство (2.6) является непосредственным следствием оценки (2.5).

Доказательство теоремы 2.2. Как уже отмечалось,

$$\omega_1(A,T) \le \omega_2(A,T).$$

Следовательно, из оценки (2.6) выводим неравенство

$$\|x(n)\| \le \rho(A,T)\left(1 - \frac{1}{\omega_2(A,T)}\right)^{k/2} \omega_2(A,T)^{1/2}\|x_0\|, \tag{3.1}$$

$$n = kT + m, \quad k \ge 0, \quad 0 \le m \le T-1.$$

Поскольку для любого $l \ge 0$ выполняется неравенство

$$\|X(l)v\|^2 \le \langle \Phi v, v\rangle, \quad v \in E_N,$$

очевидно,

$$\|X(l)\| \le \|\Phi\|^{1/2} = (\omega_2(A,T))^{1/2}$$

и, значит,

$$\rho(A,T) \le (\omega_2(A,T))^{1/2}.$$

С учетом этого неравенства из (3.1) получаем оценку (2.9).

Теорема доказана.

§ 4. Свойства матричных рядов $H(l)$

Лемма 4.1. *Матрицы $H(l)$ являются периодическими с периодом T.*

Доказательство. Для любого l в силу определения (2.11) матрицы $H(l+T)$ имеем

$$H(l+T) = I + A^*(l+T)A(l+T)$$
$$+ (A(l+T+1)A(l+T))^*(A(l+T+1)A(l+T))$$
$$+ (A(l+T+2)A(l+T+1)A(l+T))^*(A(l+T+2)A(l+T+1)A(l+T)) + \dots .$$

Учитывая периодичность матрицы $A(n)$, получаем

$$H(l+T) = I + A^*(l)A(l) + (A(l+1)A(l))^*(A(l+1)A(l))$$
$$+ (A(l+2)A(l+1)A(l))^*(A(l+2)A(l+1)A(l)) + \dots .$$

По определению (2.11)

$$H(l) = I + A^*(l)A(l) + (A(l+1)A(l))^*(A(l+1)A(l))$$
$$+ (A(l+2)A(l+1)A(l))^*(A(l+2)A(l+1)A(l)) + \dots , \tag{4.1}$$

т. е. $H(l+T) = H(l)$. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Для любого l имеют место равенства*

$$H(l) = I + A^*(l)H(l+1)A(l). \tag{4.2}$$

Доказательство. Очевидно, равенство (4.1) можно переписать следующим образом:

$$H(l) = I + A^*(l)A(l) + A(l)^*A^*(l+1)A(l+1)A(l) \\ + A^*(l)(A(l+2)A(l+1))^*(A(l+2)A(l+1))A(l) + \dots .$$

Учитывая определение (2.13) матриц $Y(n, l+1)$, получаем

$$H(l) = I + A^*(l)A(l) + A^*(l)Y^*(l+2, l+1)Y(l+2, l+1)A(l) \\ + A^*(l)Y^*(l+3, l+1)Y(l+3, l+1)A(l) + \dots .$$

Поскольку

$$H(l+1) = \sum_{k=l+1}^{\infty} Y^*(k, l+1)Y(k, l+1), \quad Y(l+1, l+1) = I,$$

приходим к (4.2). Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Матрица $H(l)$ является решением дискретного матричного уравнения Ляпунова*

$$H - Y^*(l+T, l)HY(l+T, l) \\ = I + Y^*(l+1, l)Y(l+1, l) + Y^*(l+2, l)Y(l+2, l) \\ + \dots + Y^*(l+T-1, l)Y(l+T-1, l). \tag{4.3}$$

Доказательство. В силу леммы 4.2 имеем

$$H(l) = I + A^*(l)H(l+1)A(l) \\ = I + A^*(l)(I + A^*(l+1)H(l+2)A(l+1))A(l) \\ = I + A^*(l)A(l) + (A(l+1)A(l))^*H(l+2)A(l+1)A(l).$$

Если $T > 2$, то, вновь применяя лемму 4.2 для матрицы $H(l+2)$, получим

$$H(l) = I + A^*(l)A(l) \\ + (A(l+1)A(l))^*(I + A^*(l+2)H(l+3)A(l+2))A(l+1)A(l) \\ = I + A^*(l)A(l) + (A(l+1)A(l))^*A(l+1)A(l) \\ + (A(l+2)A(l+1)A(l))^*H(l+3)A(l+2)A(l+1)A(l),$$

и т. д. Наконец,

$$H(l) = I + A^*(l)A(l) + (A(l+1)A(l))^*A(l+1)A(l) \\ + \dots + (A(l+T-2)\dots A(l+1)A(l))^*A(l+T-2)\dots A(l+1)A(l) \\ + (A(l+T-1)\dots A(l+1)A(l))^*H(l+T)A(l+T-1)\dots A(l+1)A(l).$$

Следовательно, в силу периодичности матрицы $H(l)$ и определения (2.13) матриц $Y(n,l)$ находим

$$H(l) = I + Y^*(l+1,l)Y(l+1,l) + Y^*(l+2,l)Y(l+2,l) + \dots + Y^*(l+T-1,l)Y(l+T-1,l) + Y^*(l+T,l)H(l)Y(l+T,l),$$

т. е. матрица $H(l)$ является решением дискретного уравнения Ляпунова (4.3). Лемма доказана.

Лемма 4.4. *Каждая матрица* $H(l), 1 \le l \le T-1$, *может быть представлена в виде*

$$H(l) = I + Y^*(l+1,l)Y(l+1,l) + Y^*(l+2,l)Y(l+2,l) + \dots + Y^*(T-1,l)Y(T-1,l) + Y^*(T,l)H(0)Y(T,l). \quad (4.4)$$

Доказательство. В силу лемм 4.1 и 4.2 имеем

$$H(T-1) = I + A^*(T-1)H(T)A(T-1) = I + A^*(T-1)H(0)A(T-1).$$

Если $T > 2$, то, используя эту формулу и лемму 4.2, точно так же получаем представление для матрицы $H(T-2)$:

$$H(T-2) = I + A^*(T-2)H(T-1)A(T-2) = I + A^*(T-2)A(T-2) + (A(T-1)A(T-2))^*H(0)A(T-1)A(T-2),$$

и т. д. Очевидно, для любого $1 \le j \le T-1$ будем иметь формулу

$$\begin{aligned} H(T-j) &= I + A^*(T-j)A(T-j) + (A(T-j+1)A(T-j))^*(A(T-j+1)A(T-j)) \\ &+ \dots + (A(T-2)\dots A(T-j+1)A(T-j))^*(A(T-2)\dots A(T-j+1)A(T-j)) \\ &+ (A(T-1)\dots A(T-j+1)A(T-j))^*H(0)(A(T-1)\dots A(T-j+1)A(T-j)). \end{aligned}$$

Сделав теперь замену $l = T-j$, получаем формулу

$$\begin{aligned} H(l) &= I + A^*(l)A(l) + (A(l+1)A(l))^*(A(l+1)A(l)) \\ &+ \dots + (A(T-2)\dots A(l+1)A(l))^*(A(T-2)\dots A(l+1)A(l)) \\ &+ (A(T-1)\dots A(l+1)A(l))^*H(0)(A(T-1)\dots A(l+1)A(l)). \end{aligned}$$

Следовательно, в силу определения (2.13) матриц $Y(n,l)$ имеем представление (4.4). Лемма доказана.

Отметим, что для нахождения числовой характеристики (2.14) нужно вычислять нормы матриц $\|H(0)\|, \|H(1)\|, \dots, \|H(T-1)\|$. Для этого, как следует из лемм 4.3 и 4.4, можно использовать два способа. Первый способ заключается в решении всех T дискретных уравнений Ляпунова вида (4.3). В результате получим матрицы $H(0), H(1), \dots, H(T-1)$. Второй заключается в решении одного дискретного уравнения Ляпунова (4.3) при $l = 0$. В результате получим матрицу $H(0)$, а остальные матрицы $H(j)$, $j = 1, \dots, T-1$, находим из формул (4.4).

Лемма 4.5. *Для любого вектора $v \in E_N$ выполняются оценки*

$$\langle h(l)v, v\rangle \leq \|H(l)\| \left\| \prod_{j=0}^{l-1} A(j)v \right\|^2, \quad l \geq 0. \tag{4.5}$$

Доказательство. По определению матриц $h(l)$ и $Y(n,l)$ имеем

$$\langle h(l)v, v\rangle = \sum_{k=l}^{\infty} \langle X^*(k)X(k)v, v\rangle = \sum_{k=l}^{\infty} \langle (Y(k,l)X(l))^* Y(k,l)X(l)v, v\rangle$$

$$= \sum_{k=l}^{\infty} \langle Y^*(k,l)Y(k,l)X(l)v, X(l)v\rangle = \langle H(l)X(l)v, X(l)v\rangle.$$

Отсюда, поскольку

$$X(l) = \prod_{j=0}^{l-1} A(j), \quad l \geq 0,$$

вытекает неравенство (4.5). Лемма доказана.

§ 5. Доказательство теорем 2.3–2.5

Доказательство теоремы 2.3. Учитывая определение (2.12) матрицы $h(l)$, имеем

$$\langle h(l)v, v\rangle + \left\| \prod_{j=0}^{l-2} A(j)v \right\|^2 = \langle h(l-1)v, v\rangle, \quad l \geq 1.$$

Вследствие леммы 4.5 справедлива оценка

$$\langle h(l-1)v, v\rangle \leq \|H(l-1)\| \left\| \prod_{j=0}^{l-2} A(j)v \right\|^2, \quad l \geq 1.$$

Поэтому ввиду положительной определенности матрицы $H(l-1)$ имеем

$$\langle h(l)v, v\rangle + \frac{\langle h(l-1)v, v\rangle}{\|H(l-1)\|} \leq \langle h(l-1)v, v\rangle,$$

или

$$\langle h(l)v, v\rangle \leq \left(1 - \frac{1}{\|H(l-1)\|}\right) \langle h(l-1)v, v\rangle.$$

В силу произвольности $l \geq 1$ получаем

$$\langle h(l)v, v\rangle \leq \left(1 - \frac{1}{\|H(l-1)\|}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\|H(0)\|}\right) \langle h(0)v, v\rangle.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.4. Поскольку решение $\{x(n)\}$ начальной задачи (2.1) имеет вид

$$x(n) = X(n)x_0 = \prod_{j=0}^{n-1} A(j)x_0, \tag{5.1}$$

из определения (2.12) матрицы $h(n)$ следует, что

$$\|x(n)\|^2 = \left\|\prod_{j=0}^{n-1} A(j)x_0\right\|^2 \leq \sum_{k=n}^{\infty}\left\|\prod_{j=0}^{k-1} A(j)x_0\right\|^2$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}\left\langle \left(\prod_{j=0}^{k-1} A(j)\right)^* \left(\prod_{j=0}^{k-1} A(j)\right)x_0, x_0\right\rangle = \langle h(n)x_0, x_0\rangle.$$

Из неравенства (2.15) получаем

$$\|x(n)\|^2 \leq \prod_{j=0}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{\|H(j)\|}\right)\langle h(0)x_0, x_0\rangle.$$

Отсюда, поскольку $H(0) = h(0)$, вытекает оценка (2.16). Теорема доказана.

Так как матрица $H(l)$ периодическая с периодом T, неравенство (2.17) является непосредственным следствием оценки (2.16).

Доказательство теоремы 2.5. Рассмотрим формулу (5.1) решения задачи (2.1) при $n = kT$ и $x_0 = v_i$, $\|v_i\| = 1$, где v_i — собственный вектор матрицы монодромии, соответствующий собственному значению λ_i. В силу периодичности матрицы $A(n)$, очевидно, имеем

$$x(kT) = \prod_{j=0}^{kT-1} A(j)v_i = (X(T))^k v_i = (\lambda_i)^k v_i.$$

Учитывая теперь оценку (2.16), получим

$$\|x(kT)\|^2 = |\lambda_i|^{2k} \leq \prod_{j=0}^{kT-1}\left(1 - \frac{1}{\|H(j)\|}\right)\|H(0)\|, \quad k \geq 1.$$

Но в силу леммы 4.1 матрицы $H(l)$ являются периодическими с периодом T. Следовательно,

$$|\lambda_i|^{2k} \leq \prod_{j=0}^{T-1}\left(1 - \frac{1}{\|H(j)\|}\right)^k \|H(0)\|, \quad k \geq 1,$$

или

$$|\lambda_i|^2 \leq \prod_{j=0}^{T-1}\left(1 - \frac{1}{\|H(j)\|}\right)\|H(0)\|^{1/k}, \quad k \geq 1.$$

Поэтому, переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем оценку

$$|\lambda_i|^2 \leq \prod_{j=0}^{T-1}\left(1 - \frac{1}{\|H(j)\|}\right).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Elaydi S. N.* An introduction to difference equations. New York: Springer-Verl., 1996.

2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

3. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Науч. книга, 1997.

4. *Булгаков А. Я., Годунов С. К.* Круговая дихотомия матричного спектра // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 5. С. 59–70.

5. *Akin O., Bulgak H.* Linear difference equations and stability theory. Konya: Selcuk Univ. Research Centre of Applied Mathematics, 1998. (In Turkish).

6. *Bulgak H.* Pseudoeigenvalues, spectral portrait of a matrix and their connections with different criteria of stability // Error control and adaptivity in scientific computing. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. P. 95–124. (NATO Sci. Ser.).

7. *Демиденко Г. В.* О функциональном подходе к построению проекторов на инвариантные подпространства матриц // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 796–813.

Статья поступила 29 февраля 2000 г.

г. Конья (Турция), г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
demidenk@math.nsc.ru