Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2000. Том 41, № 6

УДК 517.55

ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ ЭНДОМОРФИЗМОВ СВОБОДНЫХ МЕТАБЕЛЕВЫХ АЛГЕБР ЛИ

И. В. Чирков, М. А. Шевелин

Аннотация: Устанавливаются необходимые и достаточные условия на элементы свободной метабелевой алгебры Ли конечного ранга, при выполнении которых каждый эндоморфизм этой алгебры однозначно определяется своими значениями на них. Библиогр. 4.

Отвечая на вопрос В. Э. Шпильрайна [1, вопрос 13.66], Е. И. Тимошенко [2] нашел необходимые и достаточные условия на элементы свободной конечнопорожденной метабелевой группы G ранга n, при выполнении которых каждый эндоморфизм группы G однозначно определяется своим действием на эти элементы. Пусть M_n — свободная метабелева алгебра Ли с n свободными порождающими. Цель этой работы состоит в том, чтобы выяснить, при каких необходимых и достаточных условиях на элементы $b_1, b_2, \dots, b_m$ алгебры Ли M_n каждый эндоморфизм φ этой алгебры определяется однозначно своими значениями на них или, короче, *элементы $b_1, b_2, \dots, b_m$ однозначно определяют каждый эндоморфизм алгебры M_n*.

Пусть K — произвольное поле, L — алгебра Ли над K. Символом UL обозначается универсальная обертывающая алгебра для L. Хорошо известно, что UL — целостное кольцо. Обозначаем через F свободную алгебру Ли над полем K с множеством свободных порождающих $\{y_1, \dots, y_n\}$. Ее универсальная обертывающая является свободной ассоциативной алгеброй с тем же множеством свободных порождающих.

Идеал, порожденный F в UF, является свободным правым UF-модулем с базисом $y_1, \dots, y_n$. Поэтому для элемента $f \in FUF$ имеется единственное разложение

$$f = \sum_{1 \le i \le n} y_i \partial_i f \quad (\partial_i f \in UF).$$

Коэффициент при y_i называется *производной Фокса* элемента f. Образ элемента $\partial_i f$ при гомоморфизме колец $UF \to R$ называется *значением* в R производной $\partial_i f$.

Пусть M — метабелева алгебра Ли, A — ее коммутант. Присоединенное представление M индуцирует представление M/A на A. Таким образом, A наделяется структурой правого $U(M/A)$-модуля (действие обозначаем нижней точкой). Если $a \in A$, $\bar g_1, \bar g_2, \dots, \bar g_k \in M/A$, то $a.\bar g_1 \bar g_2 \dots \bar g_k = [[\dots[[a, g_1], g_2], \dots], g_k]$. Мы обозначаем верхней чертой образы элементов при гомоморфизме алгебр

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98–01–00932).

$UM \to U(M/A)$. Напомним, что алгебра $U(M/A)$ изоморфна алгебре многочленов.

Пусть $f \in UF$, $b_i \in M_n$, $a_i \in M_n'$. Как и в [2], нам понадобится формула

$$f(b_1 + a_1, b_2 + a_2, \dots, b_n + a_n) = f(b_1, \dots, b_n) + \sum_{1 \le i \le n} a_i . \overline{\partial_i f}.$$

Ее достаточно проверить для одночлена f от букв $\{x_i | 1 \le i \le n\}$ степени r. Поскольку при $r = 1$ формула очевидна, предположим, что f — лиев одночлен степени $r > 1$. Тогда можем записать $f = [f_1, f_2]$, f_1, f_2 — одночлены степени, меньшей чем f. Теперь формула следует из предположения индукции, определения действия $U(M_n/M_n')$ на M_n' и непосредственно проверяемого (в UM_n) равенства $\partial_i[f_1, f_2] = (\partial_i f_1) f_2 - (\partial_i f_2) f_1$.

Теорема 1. *Пусть M_n — свободная n-порожденная метабелева алгебра Ли над полем K. Тогда никакие $m < n$ элементов этой алгебры не определяют однозначно ее эндоморфизмы, действующие тождественно по модулю коммутанта.*

Доказательство. Пусть $g_1, \dots, g_m$ — произвольные элементы алгебры M_n. Очевидно, существует нетривиальное решение $\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n}$ системы линейных уравнений

$$\sum_{1 \le i \le n} \overline{\lambda_i}\ \overline{\partial_i g_j} = 0 \quad (1 \le j \le m).$$

Пусть $0 \ne c \in M_n'$. Эндоморфизм φ, определенный правилом

$$x_i \to x_i + c.\overline{\lambda_i} \quad (1 \le i \le n),$$

является тождественным по модулю коммутанта. Вычислим $g_j \varphi$:

$$g_j \varphi = g_j(x_1 + c.\overline{\lambda_1}, \dots, x_n + c.\overline{\lambda_n}) = g_j(x_1, \dots, x_n) + \sum_{1 \le i \le n} c.\overline{\lambda_i}\ \overline{\partial_i g_j(x_1, \dots, x_n)} = g_j.$$

Значит, φ тождественно действует на всех g_j.

Теперь проверим, что φ — не тождественный эндоморфизм. В [3] показано, как вложить M_n в свободный модуль E над $U(M_n/M_n')$ так, чтобы действие на E продолжало действие на M_n'. В частности, $U(M_n/M_n')$-модуль M_n' без кручения. Выберем теперь число l между 1 и n так, чтобы $\overline{\lambda_l} \ne 0$. Тогда φ переводит x_l в $x_l + c.\overline{\lambda_l}$. Так как $c \ne 0$, $\overline{\lambda_l} \ne 0$ и M_n' — модуль без кручения, то $x_l \varphi \ne x_l$, $\varphi \ne 1$, что и требовалось.

Лемма 1. *Пусть $c \in A$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in U(M_n/M_n')$. Если*

$$\sum_{1 \le i \le n} \lambda_i \overline{\partial_i c} = 0,$$

то эндоморфизм φ, заданный правилом

$$x_i \varphi = x_i + c.\lambda_i \quad (1 \le i \le n),$$

является автоморфизмом алгебры Ли M_n.

Доказательство. Согласно следствию из теоремы 2 работы [4] эндоморфизм φ свободной метабелевой алгебры Ли M_n является автоморфизмом тогда и только тогда, когда его матрица Якоби $J(\varphi) = (\overline{\partial_i(x_j + c.\lambda_j)})$ обратима. Доказательство заканчивается дословно так же, как в [2].

Теорема 2. *Никакие $n-1$ элементов свободной метабелевой алгебры Ли M_n при $n \geq 3$ не определяют однозначно автоморфизмы, тождественные по модулю коммутанта.*

Доказательство. В [3] построено вложение $\gamma : M_n \to E$ в свободный модуль $E = \bigoplus_{1\leq i\leq n} e_i U(M_n/M_n')$ над $U(M_n/M_n')$. Это вложение в наших терминах выглядит следующим образом:

$$M_n \ni f \to \sum_{1\leq i\leq n} e_i \overline{\partial_i f} \in E.$$

Согласно этой же работе элемент $f \in E$ принадлежит образу $M_n'\gamma$ коммутанта тогда и только тогда, когда

$$\sum_{1\leq i\leq n} \overline{x_i}\, \overline{\partial_i f} = 0.$$

Пусть $g_1, \dots, g_{n-1} \in M$. Рассмотрим нетривиальное решение $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in U(M_n/M_n')$ системы линейных уравнений:

$$\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i \overline{\partial_i g_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq n-1).$$

Система

$$\sum_{1\leq i\leq n} \overline{\lambda_i} z_i = 0, \qquad \sum_{1\leq i\leq n} \overline{x_i} z_i = 0$$

двух линейных уравнений над $U(M_n/M_n')$ с неизвестными $z_1, \dots, z_n$ имеет при $n \geq 3$ нетривиальное решение. Из второго уравнения этой системы ввиду сказанного выше следует, что найдется $c \in M_n'$ такой, что $\overline{\partial_i c} = z_i$, а из первого по лемме 1 — что эндоморфизм $\varphi : M_n \to M_n$, определенный правилом

$$x_i\varphi = x_i + c.\overline{\lambda_i},$$

является автоморфизмом. Этот автоморфизм не тождественный, поскольку не все $\overline{\lambda_i}$ нулевые, но на все g_j он действует тождественно. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $m \geq n$. Элементы $g_1, \dots, g_m \in M$ однозначно определяют эндоморфизмы алгебры Ли M_n тогда и только тогда, когда подалгебра, порожденная этими элементами, содержит подалгебру, изоморфную M_n.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что найдется такое число $k \in \{1, \dots, n\}$, для которого

$$g_i = x_i + c_i \quad (1 \leq i \leq k), \quad g_i = c_i \quad (k+1 \leq i \leq m).$$

Здесь $c_1, \dots, c_m \in M_n'$. Очевидно, что $g_1, \dots, g_k$ порождают свободно метабелеву подалгебру в M_n.

Предположим сначала, что $k < n$.

Пусть a, b — различные элементы из коммутанта. Эндоморфизм φ определим правилом

$$x_1\varphi = a, \quad x_i\varphi = b \ (i = 1, \dots, n),$$

а эндоморфизм ψ —

$$x_1\psi = a, \quad x_i\psi = b \ (i = 1, \dots, n-1), \quad x_n\psi = a.$$

Заметим, что $g_i\varphi = g_i\psi$ $(i = 1, \dots, k)$, а на элементах $g_{k+1}, \dots, g_m$ оба эндоморфизма действуют нулевым образом. Следовательно, элементы $g_1, \dots, g_m$ не определяют однозначно эндоморфизмы алгебры M_n.

Допустим, что $k \geq n$. Нам нужно доказать, что если эндоморфизмы φ и ψ совпадают на элементах $g_1, \dots, g_m$, то $\varphi = \psi$. Из того, что $g_i\varphi = g_i\psi$ $(1 \leq i \leq k)$, легко выводится, что значения $x_i\varphi$ и $x_i\psi$ сравнимы по модулю коммутанта. Пусть

$$x_i\varphi = l_i + a_i, \quad x_i\psi = l_i + b_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

Здесь $a_i, b_i \in M_n'$, а l_i — линейные комбинации порождающих. Вычислим $g_i\varphi$ и $g_i\psi$:

$$\begin{aligned} g_i\varphi &= g_i(l_1 + a_1, \dots, l_n + a_n) \\ &= g_i(l_1, \dots, l_n) + \sum_{1 \leq j \leq n} a_j.\overline{\partial_j g_i} = g_i(l_1, \dots, l_n) + \sum_{1 \leq i \leq n} a_j.(\delta_{ij} + \overline{\partial_j c_i}). \end{aligned}$$

Аналогично

$$g_i\psi = g_i(l_1, \dots, l_n) + \sum_{1 \leq i \leq n} b_j.(\delta_{ij} + \overline{\partial_j c_i}).$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера.

Элементы $a_i - b_i \in M_n'$ удовлетворяют системе однородных линейных уравнений с коэффициентами в $U(M_n/M_n')$:

$$\sum_{1 \leq j \leq n} z_i(\delta_{ij} + \overline{\partial_j c_i}) = 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

Гомоморфизм ассоциативно-коммутативных алгебр $\varepsilon : U(M_n/M_n') \to K$, определенный правилом $\overline{x_i}\varepsilon = 0$, продолжается до гомоморфизма матричных алгебр $\varepsilon : M(n, U(M_n/M_n')) \to M(n, K)$, перестановочного с отображением det.

Рассмотрим M_n как $U(M_n/M_n')$-подмодуль в $E = \bigoplus\limits_{1 \leq i \leq n} e_i U(M_n/M_n')$. Нетрудно понять, что этот подмодуль порожден множеством $e_i.\overline{x_j} - e_j.\overline{x_i}$. Поэтому для всех i справедливо включение $\overline{\partial_j c_i}$ =(i-я координата соответствующего вектора из E)$\in \ker\varepsilon$. Это означает, что определитель предыдущей системы сравним с 1 по модулю $\ker\varepsilon$, т. е. эта система имеет только нулевое решение. Поэтому $a_i = b_i$ при всех i, $\varphi = \psi$. Теорема доказана.

Авторы признательны Е. И. Тимошенко за полезное замечание.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коуровская тетрадь.* Нерешенные вопросы теории групп. 13-е изд. Новосибирск: Изд-во НИИ математико-информационных основ обучения НГУ, 1995.
2. *Тимошенко Е. И.* Об определяемости эндоморфизмов свободной группы многообразия **AM** конечным множеством значений // Мат. заметки. 1997. Т. 62, № 6. С. 916–920.
3. *Artamonov V. A.* The categories of free metabelian groups and Lie algebras // Comment. Math. Univ. Carolin. 1977. V. 18, N 1. P. 143–159.
4. *Умирбаев У. У.* Частные производные и эндоморфизмы некоторых относительно свободных алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 6. С. 179–188.

Статья поступила 21 сентября 1999 г.

г. Омск
chirkov@math.omsu.omskreg.ru; shevelin@math.omsu.omskreg.ru