Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 512.554

О ПРИМАРНЫХ И РЕДУЦИРОВАННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ МОНОАССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

Л. М. Мартынов

Аннотация: Введенные автором для произвольных алгебр понятия примарности и редуцированности изучаются в работе для моноассоциативных алгебр. Охарактеризованы примарные многообразия таких алгебр над произвольным кольцом операторов и редуцированные многообразия с некоторыми свойствами для моноассоциативных алгебр (ими обладают, в частности, ассоциативные, альтернативные, лиевы и йордановы алгебры) над дедекиндовыми кольцами. Библиогр. 19.

В теории групп важную роль играют понятия разрешимости, полноты (делимости), примарности, редуцированности и сервантности (чистоты). Оказывается, что к этим понятиям возможен другой подход, использующий теорию многообразий групп. Это обстоятельство позволяет определить их аналоги для произвольных алгебр. Что касается понятия разрешимости, то оно введено в [1] (см. также [2]). Там же сформулированы многие проблемы. В развитие идей этих статей в [3] введены понятия примарной, полной и редуцированной алгебры, а также чистой подалгебры и некоторые другие. В [3] также упоминается о некоторых результатах для модулей и линейных алгебр, относящиеся к указанным понятиям. В настоящей статье охарактеризованы примарные многообразия произвольных моноассоциативных алгебр над любым ассоциативным и коммутативным кольцом с единицей и редуцированные многообразия с некоторыми свойствами для моноассоциативных алгебр над дедекиндовыми кольцами. В частности, найденные характеризации охватывают случаи ассоциативных, альтернативных, лиевых и йордановых алгебр (соответствующие результаты для колец анонсированы в [4]).

§ 1. Основные определения и обозначения

Условимся через R обозначать в дальнейшем произвольное ненулевое ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей, под модулем понимать левый унитарный R-модуль, а под алгеброй — моноассоциативную алгебру над R. Напомним, что алгебру называют *моноассоциативной* или *алгеброй с ассоциативными степенями*, если любая ее моногенная (т. е. однопорожденная) подалгебра ассоциативна. Если $\mathscr{V}$ — многообразие алгебр, то через $L(\mathscr{V})$ будем обозначать решетку подмногообразий многообразия $\mathscr{V}$. Пусть $\mathscr{V}$ — произвольное фиксированное многообразие алгебр, $\mathscr{X} \in L(\mathscr{V})$ и $A \in \mathscr{V}$. Алгебра A называется *$\mathscr{X}$-полной*, если ее $\mathscr{X}$-вербал $\mathscr{X}(A)$ совпадает с A. Алгебру A будем называть *$\mathscr{X}$-разрешимой*, если она не имеет ненулевых $\mathscr{X}$-полных подалгебр. Понятие $\mathscr{X}$-разрешимой алгебры можно определить, используя $\mathscr{X}$-вербальный ряд алгебры A [1, 2]. А именно, для любого ординала α определим с помощью трансфинитной индукции α-й $\mathscr{X}$-вербал $\mathscr{X}^\alpha(A)$ алгебры A: $\mathscr{X}^0(A) = A$; если α — непредельный ординал, то $\mathscr{X}^\alpha(A) = \mathscr{X}(\mathscr{X}^{\alpha-1}(A))$; если α — предельный ординал, то $\mathscr{X}^\alpha(A) = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} \mathscr{X}^\beta(A)$. Таким образом мы получаем убывающую цепь подалгебр алгебры A:

$$A = \mathscr{X}^0(A) \supseteq \mathscr{X}^1(A) \supseteq \cdots \supseteq \mathscr{X}^\alpha(A) \supseteq \cdots,$$

которая называется *$\mathscr{X}$-вербальной цепью алгебры A*. Понятно, что $\mathscr{X}^{\alpha+1}(A)$ — идеал в $\mathscr{X}^\alpha(A)$, но в общем случае $\mathscr{X}$-вербальная цепь алгебры A не является цепью ее идеалов.

Для некоторого ординала γ эта цепь стабилизируется, т. е. $\mathscr{X}^\gamma(A) = \mathscr{X}^{\gamma+1}(A)$. В этом случае говорят, что многообразие $\mathscr{X}$ является *γ-достижимым на A*. Если существует ординал γ такой, что $\mathscr{X}$ γ-достижим на всех алгебрах класса $\mathscr{K}$, то $\mathscr{X}$ называется *γ-достижимым в $\mathscr{K}$* [1, 2]. Заметим, что термин «достижимость» впервые введен Т. Тамурой [5] и рассматривался А. И. Мальцевым [6] в смысле 1-достижимости по нашей терминологии.

Если для некоторого γ имеет место $\mathscr{X}^\gamma(A) = O$, то A называется *γ-$\mathscr{X}$-разрешимой*, а наименьшее γ с этим свойством называется *ступенью $\mathscr{X}$-разрешимости алгебры A*. Понятно, что алгебра A является $\mathscr{X}$-разрешимой тогда и только тогда, когда она γ-$\mathscr{X}$-разрешима для некоторого ординала γ. Если γ — натуральное число, то γ-$\mathscr{X}$-разрешимая алгебра называется также *конечно $\mathscr{X}$-разрешимой.*

Пусть $\mathscr{P}$ — атом решетки $L(\mathscr{V})$. Назовем алгебру A *примарной по $\mathscr{P}$* (*$\mathscr{P}$-алгеброй*), если любая ее моногенная подалгебра конечно $\mathscr{P}$-разрешима. Будем говорить, что алгебра A является *примарной* , если она примарна по некоторому $\mathscr{P}$. Алгебру A будем называть (атомно) *полной*, если она $\mathscr{P}$-полная для любого атома $\mathscr{P} \in L(\mathscr{V})$. Мы называем A (атомно) *редуцированной*, если она не имеет нетривиальных полных подалгебр.

Заметим, что если $\mathscr{V}$ — многообразие $\mathscr{A}$ всех абелевых групп, то наши понятия примарности, полноты и редуцированности совпадают с соответствующими понятиями для абелевых групп. Действительно, атомами решетки $L(\mathscr{A})$ являются в точности многообразия $\mathscr{A}_p$ абелевых групп экспоненты p по всем простым p и $\mathscr{A}_p(A) = pA$ для любой аддитивной абелевой группы A. Следовательно, разрешимость в A уравнения $px = a$ для любых элемента $a \in A$ и простого числа p эквивалентна равенству $\mathscr{A}_p(A) = pA = A$, а примарность A по p — конечной $\mathscr{A}_p$-разрешимости циклических подгрупп из A.

Мы называем алгебру A из многообразия $\mathscr{V}$ *конечно редуцированной*, если она принадлежит $\mathscr{V}$-произведению в смысле А. И. Мальцева [6] конечного набора (необязательно различных) атомов из $L(\mathscr{V})$ при левонормированной расстановке скобок. Это равносильно тому, что алгебра обладает конечным убывающим субидеальным рядом, факторы которого принадлежат некоторым атомам решетки $L(\mathscr{V})$; при этом будем говорить, что алгебра редуцирована данными атомами. Заметим, что понятие редуцированной алгебры можно определить через бесконечное нижнее $\mathscr{V}$-произведение атомов из $L(\mathscr{V})$, которое определяется по аналогии с нижними произведениями классов групп в смысле Б. И. Плоткина [7, 8] (см. также [9]). Следуя [10], мы называем многообразие $\mathscr{V}$ *предполным*, если $L(\mathscr{V})$ имеет единственный атом; если этот атом есть $\mathscr{P}$, то назовем $\mathscr{V}$ *предполным по $\mathscr{P}$* или *$\mathscr{P}$-предполным.* Условимся, что $[\Sigma]$ обозначает многообразие всех алгебр, определенное системой тождеств Σ, $\operatorname{var}\mathscr{K}$ — наименьшее многообразие, содержащее класс $\mathscr{K}$ алгебр. Знак $\Box$ обозначает окончание доказательства соответствующего утверждения. Этот знак используется также в случае, когда мы опускаем доказательства некоторых утверждений.

Если многообразие $\mathscr{V}$ состоит из алгебр со свойством, выраженным прилагательным, то мы добавляем его в название $\mathscr{V}$. Например, утверждение «$\mathscr{V}$ есть примарное многообразие» означает, что $\mathscr{V}$ состоит из алгебр, каждая из которых примарна по некоторому фиксированному атому из $L(\mathscr{V})$. Если M — подмножество алгебры A, то $\langle M\rangle$ обозначает подалгебру из A, порожденную M. Если $M = \{a\}$, то подалгебра, порожденная M, называется *моногенной* и обозначается через $\langle a\rangle$. Для множества M через $|M|$ обозначается его кардинальное число. Буквы i, k, m, n (в том числе с индексами) обозначают положительные целые числа, буква p — простое число. Знак $:=$ означает равенство по определению. Ниже будем использовать следующие обозначения: $\mathrm{Asd}(R)$ — многообразие всех моноассоциативных R-алгебр; $\mathrm{Ass}(R)$ — многообразие всех ассоциативных R-алгебр; $\mathrm{Alt}(R)$ — многообразия всех альтернативных R-алгебр; $\mathrm{Jord}(R)$ — многообразия всех йордановых R-алгебр; $\mathrm{Lie}(R)$ — многообразия всех лиевых R-алгебр; $\mathscr{Z} := [xy = 0]$ — многообразие всех алгебр с нулевым умножением; $\mathscr{N}_k := [x^k = 0]$ — многообразие всех нильалгебр индекса $\le k$; $\mathscr{P}$ — атом решетки $L(\mathrm{Asd}(R))$; $\mathrm{Ann}(\mathscr{V}) := \{r \in R \mid (\forall A \in \mathscr{V}) rA = O\}$ — аннулятор многообразия $\mathscr{V}$; $R\langle x\rangle$ — свободная в $\mathrm{Asd}(R)$ моногенная алгебра; A^0 — алгебра над R с нулевым умножением, полученная из R-модуля A заданием нулевого умножения; V — идеал кольца R; P — максимальный идеал кольца R; $F_P := R/P$, $\mathscr{F}_P := \mathrm{var}\, F_P$, $Z_V := (R/V)^0$, $\mathscr{Z}_V := \mathrm{var}\, Z_V = [Vx = 0, xy = 0]$; $\mathscr{S}^n_V$ — многообразие всех n-$\mathscr{Z}$-разрешимых алгебр, аннулирующихся идеалом V кольца R; $\mathrm{Mod}(R)$ — многообразие всех R-модулей. Любое многообразие алгебр с нулевым умножением назовем *модульным*. Такие многообразия образуют подрешетку решетки $L(\mathrm{Asd}(R))$, изоморфную решетке $L(\mathrm{Mod}(R))$ подмногообразий модулей. Любое модульное многообразие $\mathscr{V}$ алгебр совпадает с многообразием $\mathscr{Z}_V$, где $V = \mathrm{Ann}(\mathscr{V})$. Алгебру будем называть *MI-алгеброй*, если любая ее ненильпотентная моногенная подалгебра содержит ненулевой идемпотент. Понятно, что любая ассоциативная MI-алгебра является I-кольцом в смысле [11, с. 304]. Ясно, что любая нильалгебра (в частности, алгебра Ли) представляет собой MI-алгебру. Назовем алгебру *существенной MI-алгеброй*, если она MI-алгебра и не будет нильалгеброй. *Простым R-полем* будем называть поле над R, являющееся простым модулем над R. Понятно, что поля вида F_P суть простые R-поля. Пересечение всех ненулевых идеалов алгебры называется ее *монолитом* (*сердцевиной*). Если монолит алгебры есть ненулевой идеал, то алгебру будем называть *монолитной* (по другой терминологии — *подпрямо неразложимой*). Наконец, обратим внимание на то, что обычная разрешимость алгебр — это конечная $\mathscr{Z}$-разрешимость в нашем смысле и поэтому условимся $\mathscr{Z}$-разрешимые алгебры называть просто разрешимыми.

§ 2. Примарные многообразия алгебр

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 1. *Многообразие $\mathscr{V}$ алгебр над произвольным кольцом R примарно тогда и только тогда, когда либо для некоторых k и n*

$$\mathscr{V} \subseteq [P^k x = 0, x^n = 0], \tag{1}$$

где P — единственный максимальный идеал кольца R, содержащий аннулятор V многообразия $\mathscr{V}$, либо

$$\mathscr{V} \subseteq [Px = 0, x^{p^m} = x], \tag{2}$$

где P — максимальный идеал конечного индекса, p — характеристика конечного R-поля F_P, а p^m — его порядок.

Доказательству теоремы 1 предпошлем несколько лемм. Для удобства ссылок приведем два утверждения, доказанные для многообразия $\mathrm{Ass}(R)$ в [10] (теоремы 3 и 4), но справедливые и для многообразия $\mathrm{Asd}(R)$. Первое из них отмечалось в обзоре [12, теорема 12].

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{P}$ — атом решетки $L(\mathrm{Asd}(R))$. Тогда либо $\mathscr{P} = \mathscr{Z}_P$ для некоторого P, либо $\mathscr{P} = \mathscr{F}_P$ для некоторого P такого, что $|R/P| < \infty$. Любое такое многообразие — атом $L(\mathrm{Asd}(R))$.* $\square$

Лемма 2. *Если многообразие $\mathscr{V}$ алгебр является предполным и V — аннулятор многообразия $\mathscr{V}$, то R/V — локальное кольцо.* $\square$

Лемма 3. *Любое $\mathscr{P}$-примарное многообразие $\mathscr{V}$ алгебр является $\mathscr{P}$-предполным.*

В самом деле, предположим, что решетка $L(\mathscr{V})$, где $\mathscr{V}$ — $\mathscr{P}$-примарное многообразие, содержит атом $\mathscr{P}'$, отличный от $\mathscr{P}$, и пусть F_1' — свободная в $\mathscr{P}'$ моногенная алгебра. Тогда, с одной стороны, ненулевая алгебра F_1' является $\mathscr{P}$-полной, а с другой стороны, она обязана быть конечно $\mathscr{P}$-разрешимой, что противоречиво. $\square$

Следующая лемма очевидна.

Лемма 4. *Если фактор-алгебра алгебры A по идеалу T конечно редуцирована атомами из множества A_1, а идеал T конечно редуцирован атомами из множества A_2, то алгебра A конечно редуцирована атомами из множества $A_1 \cup A_2$.* $\square$

Лемма 5. *Если идеал V кольца R содержит произведение $P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_m^{k_m}$ максимальных идеалов $P_1, P_2, \dots, P_m$ кольца R, то любая алгебра из многообразия $\mathscr{S}_V^k$ при любом k будет конечно редуцирована атомами из списка $\mathscr{Z}_{P_1}, \mathscr{Z}_{P_2}, \dots, \mathscr{Z}_{P_m}$.*

Действительно, если $A \in \mathscr{S}_V^k$, то A является k-$\mathscr{Z}$-разрешимой алгеброй. Пусть $A \supseteq A^{(1)} \supseteq A^{(2)} \supseteq \dots \supseteq A^{(k-1)} \supseteq A^{(k)} = O$ — ее $\mathscr{Z}$-вербальная цепь. Поскольку $V \supseteq P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_m^{k_m}$, имеем $P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_m^{k_m} A = O$. Учитывая, что для любой алгебры B с нулевым умножением и любого идеала I кольца R имеет место $\mathscr{Z}_I(B) = IB + B^2 = IB$, легко понять, что алгебра $A^{(k-1)}$ будет конечно редуцированной атомами из списка $\mathscr{Z}_{P_1}, \mathscr{Z}_{P_2}, \dots, \mathscr{Z}_{P_m}$. Переходя к фактору $A^{(k-2)}/A^{(k-1)}$, заключаем по аналогии с предыдущим о его конечной редуцированности атомами из того списка, а потом ввиду леммы 4 и о конечной редуцированности алгебры $A^{(k-2)}$ все теми же атомами. Продолжая аналогичные рассуждения, через конечное число шагов приходим к выводу о редуцированности алгебры A конечной последовательностью атомов из списка $\mathscr{Z}_{P_1}, \mathscr{Z}_{P_2}, \dots, \mathscr{Z}_{P_m}$. $\square$

Следствие 1. *Многообразие $\mathscr{S}_{P^k}^n$ при любых P, k, n состоит из конечно $\mathscr{Z}_P$-разрешимых алгебр.*

В самом деле, $\mathrm{Ann}(\mathscr{S}_{P^k}^n) = P^k$, так как $(R/P^k)^0 \in \mathscr{S}_{P^k}^n$. $\square$

Следующая лемма очевидна.

Лемма 6. *Любая конечно разрешимая алгебра A является нильалгеброй.*

В самом деле, в A конечно разрешима любая моногенная подалгебра, которая ассоциативна и потому нильпотентна. $\square$

Доказательство теоремы 1. Пусть сначала $\mathscr{V}$ — $\mathscr{Z}_P$-примарное многообразие для некоторого P. Тогда по лемме 3 $\mathscr{V}$ является $\mathscr{Z}_P$-предполным и в силу леммы 2 P — единственный максимальный идеал, содержащий аннулятор V многообразия $\mathscr{V}$. Поскольку любая моногенная алгебра из $\mathscr{V}$ конечно разрешима, по лемме 6 $\mathscr{V}$ состоит из нильалгебр и потому $\mathscr{V} \subseteq [Vx = 0, x^n = 0]$ для некоторого n. Если предположить, что P^k не является подмножеством V при любом k, то $\mathscr{V}$-свободная моногенная алгебра F_1 не конечно $\mathscr{Z}_P$-разрешима, ибо $P^k F_1 \subseteq \mathscr{Z}_P^k(F_1)$ при любом k (здесь мы учитываем, что аннулятор алгебры F_1 равен V). Таким образом, $P^k \subseteq V$, и, следовательно, $\mathscr{V} \subseteq [P^k x = 0, x^n = 0]$.

Пусть теперь многообразие $\mathscr{V}$ является примарным по $\mathscr{F}_P$, где P — максимальный идеал конечного индекса. Тогда ввиду 1-достижимости многообразия $\mathscr{F}_P$ на ассоциативных R-алгебрах [13] $\mathscr{F}_P$-разрешимость любой моногенной алгебры из $\mathscr{V}$ влечет ее принадлежность многообразию $\mathscr{F}_P$ и, следовательно, выполнимость в ней тождеств $Px = 0, x^{p^m} = x$, где p^m — порядок поля F_P. Тем самым в этом случае $\mathscr{V} \subseteq [Px = 0, x^{p^m} = x]$ для некоторого m.

Обратно, при выполнимости условия (1) моногенные алгебры из $\mathscr{V}$ принадлежат многообразию $\mathscr{S}^n_{P^k}$, и по следствию 1 они конечно $\mathscr{Z}_P$-разрешимы. Если выполнено соотношение (2), то любая моногенная алгебра из $\mathscr{V}$ принадлежит многообразию $\mathscr{F}_P$ и потому 1-$\mathscr{F}_P$-разрешима. Итак, в обоих случаях $\mathscr{V}$ — примарное многообразие. $\square$

Следствие 2. *Многообразие $\mathscr{V}$ алгебр над бесконечным полем является примарным тогда и только тогда, когда $\mathscr{V}$ — многообразие нильалгебр.*

§ 3. Редуцированные многообразия алгебр

Основной результат этого параграфа составляет

Теорема 2. *Пусть R — дедекиндово кольцо, $\mathscr{U}$ — многообразие R-алгебр, в котором выполнены следующие условия:*

1) *если монолит M алгебры A из $\mathscr{U}$ содержит ненулевой идемпотент, то $M^2 = M$;*
2) *если A — алгебра из $\mathscr{U}$, B — идеал в A, C — идеал в B и B/C — алгебра без нильпотентных элементов, то C — идеал в A;*
3) *если монолит M алгебры A из $\mathscr{U}$ является простым R-полем, то $A = M$.*

Тогда многообразие $\mathscr{V}$ алгебр из $\mathscr{U}$ редуцировано в том и только в том случае, если для некоторого n

$$\mathscr{V} \subseteq \mathscr{S}^n_V \circ \mathscr{F}, \tag{3}$$

где $V = \mathrm{Ann}(\mathscr{V})$, $V = P_1^{i_1} P_2^{i_2} \ldots P_k^{i_k}$ — каноническое разложение идеала V в произведение максимальных идеалов кольца R, $\mathscr{F}$ — многообразие, порожденное подмножеством F всех конечных R-полей из множества $\{F_{P_1}, F_{P_2}, \ldots, F_{P_k}\}$, принадлежащих $\mathscr{V}$, и $\circ$ — знак операции $\mathscr{U}$-произведения многообразий.

Непосредственному доказательству теоремы 2 предпошлем несколько вспомогательных утверждений. Прежде всего для удобства ссылок сформулируем в виде леммы одно (по-видимому, известное) утверждение, которое можно получить из предложения 1.2 работы [14], предварительно детализировав его применительно к нашему случаю.

Лемма 7. *Если в многообразии алгебр имеется разрешимая нильалгебра бесконечной ступени, то в нем существует ненулевая нильалгебра, совпадающая со своим квадратом.*

Лемма 8. *Любая нильалгебра C, совпадающая со своим квадратом, является полной.*

Действительно, поскольку гомоморфный образ нильалгебры есть нильалгебра, то C $\mathscr{F}_P$-полна при $|R/P| < \infty$. С другой стороны, для $\mathscr{Z}_P$ имеем $\mathscr{Z}_P(C) = PC + C^2 = C$ при любом P. $\square$

Лемма 9. *В любом редуцированном многообразии $\mathscr{V}$ алгебр разрешимые алгебры содержатся в многообразии $\mathscr{N}_k$ для некоторого k.*

В самом деле, если в многообразии $\mathscr{V}$ существует разрешимая ассоциативная алгебра бесконечной ступени, то ввиду того, что $\mathscr{Z}$-вербальный ряд такой алгебры является рядом ее идеалов, в $\mathscr{V}$ имеются разрешимые алгебры любой конечной ступени, которые являются нильалгебрами. Прямая сумма таких алгебр дает разрешимую нильалгебру бесконечной ступени. Но согласно леммам 7 и 8 в этом случае многообразие $\mathscr{V}$ содержит ненулевую полную алгебру, что противоречит его редуцированности. Таким образом, ступени разрешимости ассоциативных алгебр из $\mathscr{V}$ ограничены в совокупности натуральным числом. Отсюда получаем, что моногенные подалгебры любой разрешимой алгебры являются нильалгебрами индекса, не превосходящего некоторого k. Итак, $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{N}_k$. $\square$

Лемма 10. *В любом редуцированном многообразии алгебр ступени разрешимости разрешимых алгебр ограничены в совокупности некоторым натуральным числом.*

В самом деле, по лемме 9 любая разрешимая алгебра является нильалгеброй. Остальное следует из лемм 7 и 8.

Непосредственно из лемм 7, 8 и 10 вытекает

Следствие 3. *Если $\mathscr{V}$ — редуцированное многообразие алгебр, то существует такое n, что все нильалгебры из $\mathscr{V}$ являются n-ступенно разрешимыми. В частности, индексы нильпотентности нильпотентных ассоциативных алгебр ограничены в совокупности, т. е. $\mathscr{V} \cap \mathrm{Ass}(R)$ имеет конечный индекс в $\mathrm{Ass}(R)$ (в смысле* [15]*).* $\square$

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 11. *Любая простая алгебра многообразия $\mathscr{V}$, не принадлежащая ни одному из атомов решетки $L(\mathscr{V})$, является полной.*

Лемма 12. *Если многообразие $\mathrm{Mod}(R)$ содержит полный модуль C, то алгебра R^0 не принадлежит никакому редуцированному многообразию $\mathscr{V}$ алгебр из $\mathrm{Asd}(R)$.*

В самом деле, если предположить, что $\mathscr{V}$ содержит R^0, то оно содержит и алгебру C^0. Но тогда для любого P ввиду полноты модуля C имеем $PC^0 = C^0$ и, следовательно, $\mathscr{Z}_P(C^0) = PC^0 + (C^0)^2 = PC^0 = C^0$. Аналогично $\mathscr{F}_P(C^0) = C^0$. Таким образом, C^0 — полная алгебра из $\mathscr{V}$, что противоречит редуцированности $\mathscr{V}$. $\square$

Из следствия 3 и леммы 12 вытекает

Следствие 4. *Пусть R — дедекиндово кольцо, не являющееся полем. Тогда алгебры R и R^0 не принадлежат никакому редуцированному многообразию $\mathscr{V}$ алгебр из* $\mathrm{Asd}(R)$.

В самом деле, пусть P — ненулевой максимальный идеал кольца R. Из рассмотрений заметки [16] вытекает, что в этом случае $\mathrm{Mod}(R)$ содержит ненулевые полные модули. По лемме 12 $R^0 \notin \mathscr{V}$. С другой стороны, R-алгебра R не может принадлежать $\mathscr{V}$, ибо в противном случае для любого n нильпотентные ассоциативные R-алгебры P/P^n принадлежали бы $\mathscr{V}$, что противоречит следствию 3. $\square$

Лемма 13. *Для любого редуцированного многообразия $\mathscr{V}$ алгебр найдется такое число m, что для любого $n \geq m$ в алгебре $R\langle x\rangle$ существует многочлен $f(x)$ такой, что в $\mathscr{V}$ выполняется тождество $x^m = x^n f(x)$.*

Действительно, пусть F_1 — свободная в $\mathscr{V}$ моногенная алгебра. Тогда F_1 изоморфна фактору $R\langle x\rangle/T$, где $T = \mathscr{V}(R\langle x\rangle)$. Так как в силу следствия 4 индексы нильпотентности ассоциативных нильпотентных алгебр ограничены в совокупности, существует такое m, что $F_1^m = F_1^{m+1}$ и, следовательно, $F_1^m = F_1^n$ для любого $n \geq m$. Поскольку $F_1 = \langle x + T\rangle$, то $(x+T)^m = (x+T)^n f(x+T)$ для некоторого $f(x) \in R\langle x\rangle$. Отсюда $x^m - x^n f(x) \in T$ и поэтому $x^m = x^n f(x)$ — тождество в $\mathscr{V}$. $\square$

Следствие 5. *Любое редуцированное многообразие $\mathscr{V}$ алгебр состоит из MI-алгебр.*

В самом деле, по лемме 13 в $\mathscr{V}$ выполняется тождество $x^m = x^{2m} f(x)$ для некоторого числа m и многочлена $f(x)$ из алгебры $R\langle x\rangle$. В частности, $a^m = a^{2m} f(a)$ для любого элемента a любой алгебры A из $\mathscr{V}$. Положим $e = a^m f(a)$. Имеем

$$e = a^m f(a) = a^{2m} f(a)^2 = (a^m f(a))^2 = e^2.$$

Таким образом, e — идемпотент. Если $e = 0$, то $a^m = 0$ и $\langle a\rangle$ — нильпотентная алгебра.

Лемма 14. *Если R — бесконечное целостное кольцо, $\mathscr{V}$ — многообразие R-алгебр и $\mathrm{Ann}(\mathscr{V}) = O$, то $R^0 \in \mathscr{V}$.*

Доказательство этого утверждения почти дословно повторяет доказательство леммы 2.11 работы [15]. $\square$

Предложение 1. *Если все максимальные идеалы дедекиндова кольца R имеют бесконечный индекс, то многообразие $\mathscr{V}$ алгебр над R является редуцированным тогда и только тогда, когда $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{S}_V^k$ для некоторого k, где $V = \mathrm{Ann}(\mathscr{V})$.*

Действительно, по лемме 1 в данном случае любое минимальное многообразие R-алгебр имеет вид $\mathscr{Z}_P$ для некоторого P. Но тогда любая $\mathscr{Z}$-полная алгебра является полной и поэтому редуцированное многообразие $\mathscr{V}$ состоит из разрешимых алгебр, ступени которых в силу леммы 10 ограничены в совокупности некоторым k. Таким образом, $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{S}_V^k$, где $V = \mathrm{Ann}(\mathscr{V})$. Обратно, пусть $\mathscr{V}$ — нетривиальное подмногообразие многообразия $\mathscr{S}_V^k$ для некоторого k, где $V = \mathrm{Ann}(\mathscr{V})$. Если предположить, что $V = O$, то по лемме 14 $R^0 \in \mathscr{V}$, и в силу следствия 4 R — поле и $V = O$ — максимальный идеал кольца R. Если $V \neq O$, то идеал V разложим в произведение максимальных идеалов. Таким образом, в обоих случаях аннулятор V многообразия $\mathscr{V}$ содержит произведение конечного числа максимальных идеалов дедекиндова кольца R. Но тогда по лемме 5 $\mathscr{V}$ — редуцированное многообразие. $\square$

Лемма 15. *В любом редуцированном многообразии $\mathscr{V}$ алгебр класс $\mathscr{K}$ всех алгебр без нильпотентных элементов из $\mathscr{V}$ образует подмногообразие многообразия $[x^n = x]$ для некоторого $n > 1$.*

В самом деле, если класс $\mathscr{K}$ тривиален, то доказывать нечего. В противном случае класс $\mathscr{K}$, будучи квазимногообразием, содержит свободные в $\mathscr{K}$ алгебры любых рангов. Пусть F_1 — свободная в $\mathscr{K}$ моногенная алгебра. Являясь коммутативной и ассоциативной алгеброй без нильпотентных элементов и по лемме 13 с тождеством $x^m = x^{2m}f(x)$ для некоторых m и $f(x)$, в силу рассмотрений работы [13] алгебра F_1, а следовательно, и класс $\mathscr{K}$ удовлетворяет тождеству $x^n = x$ для некоторого $n > 1$. Но тогда произвольный гомоморфный образ любой алгебры из $\mathscr{K}$ удовлетворяют этому тождеству и поэтому является алгеброй без нильпотентов в $\mathscr{V}$, а потому принадлежит $\mathscr{K}$. $\square$

Лемма 16. *Многообразие $\mathscr{F}$ алгебр, порожденное конечным множеством F простых конечных R-полей, является редуцированным.*

В самом деле, ненулевые алгебры многообразия $\mathscr{F}$ — подпрямые произведения R-полей из F и потому имеют нетривиальные гомоморфные образы, принадлежащие соответствующим атомам решетки $L(\mathscr{F})$. $\square$

Лемма 17. *Любой гомоморфный образ полной алгебры является полной алгеброй.*

Действительно, если C — полная алгебра и T — ее идеал, то для любого $\mathscr{P}$ имеем $\mathscr{P}(C/T) = (\mathscr{P}(C) + T)/T = (C + T)/T = C/T$. $\square$

Лемма 18. *Расширение редуцированной алгебры с помощью редуцированной алгебры является редуцированной алгеброй.*

Действительно, если предположить, что алгебра A содержит редуцированный идеал T такой, что фактор-алгебра A/T редуцирована, то любая полная ее подалгебра C при естественном гомоморфизме A на A/T в виду леммы 17 и редуцированности A/T отображается в нулевую и потому $C \subseteq T$. Отсюда и из редуцированности T вытекает, что C — нулевая алгебра. Таким образом, A — редуцированная алгебра.

Доказательство теоремы 2. Пусть R — дедекиндово кольцо, $\mathscr{U}$ — многообразие R-алгебр, в котором выполнены условия 1–3 теоремы.

Необходимость. Пусть $\mathscr{V}$ — ненулевое редуцированное многообразие R-алгебр из $\mathscr{U}$ и $V = \mathrm{Ann}(\mathscr{V})$. Понятно, что $V \neq R$. Если $V = O$ и предположить, что R не поле, то R — бесконечное целостное кольцо и по лемме 14 $R^0 \in \mathscr{V}$, что противоречит следствию 4. Таким образом, в этом случае R — поле и потому $V = O$ — максимальный идеал кольца R. Если $V \neq O$, то ввиду дедекиндовости кольца R имеем $V = P_1^{i_1} P_2^{i_2} \dots P_k^{i_k}$ для некоторых чисел $k, i_1, i_2, \dots, i_k$ и максимальных идеалов $P_1, P_2, \dots, P_m$ кольца R. Итак, в обоих случаях аннулятор многообразия $\mathscr{V}$ разложим в произведение максимальных идеалов кольца R.

Напомним, что согласно следствию 3 все нильалгебры многообразия $\mathscr{V}$ принадлежат многообразию $\mathscr{S}_V^n$ для некоторого n. Пусть F — множество всех конечных R-полей вида $\mathscr{F}_P$, принадлежащих многообразию $\mathscr{V}$. Понятно, что если таковые имеются, то они принадлежат множеству $\{F_{P_1}, F_{P_2}, \dots, F_{P_k}\}$. Пусть $\mathscr{F}$ — многообразие, порожденное множеством F, и A — любая алгебра из $\mathscr{V}$. Если A является нильалгеброй, то A принадлежит многообразию $\mathscr{S}_V^n$, а следовательно, и многообразию $\mathscr{S}_V^n \circ \mathscr{F}$. Пусть A не является нильалгеброй. Тогда по следствию 5 A — существенная MI-алгебра. Пусть E — множество всех ненулевых идемпотентов алгебры A. Для каждого идемпотента из E пусть T_e обозначает идеал алгебры A, максимальный в множестве всех ее идеалов, не содержащих идемпотента e, и пусть N — пересечение всех таких идеалов T_e $(e \in E)$. Понятно, что N является нильидеалом, а алгебра A/N — подпрямая сумма первичных алгебр $A_e = A/T_e$ $(e \in E)$. Поскольку любой идеал алгебры A_e содержит идемпотент $e + N$, монолит M_e алгебры A_e содержит идемпотент и потому в силу условия 1 $M_e^2 = M_e$. Последнее означает, что алгебра M_e является $\mathscr{Z}_P$-полной для любого максимального идеала P кольца R. Но $\mathscr{V}$ — редуцированное многообразие и потому $L(\mathscr{V})$ обязано содержать атом вида $\mathscr{F}_P$, для которого $I_e = \mathscr{F}_P(M_e) \neq M_e$. Так как алгебра M_e/I_e принадлежит многообразию $\mathscr{F}_P$ и потому не содержит нильпотентных элементов, в силу условия 2 I_e — идеал алгебры A_e и поэтому $I_e = O$. Таким образом, монолит M_e алгебры A_e принадлежит многообразию $\mathscr{F}_P$, из чего легко заключить ввиду условия 2, что M_e — простая алгебра из $\mathscr{V}$. Но все простые алгебры многообразия $\mathscr{V}$ вследствие леммы 11 принадлежат атомам решетки $L(\mathscr{V})$ и тем самым M_e, а следовательно, в силу условия 3 доказываемой теоремы и A_e является конечным полем из множества F при любом e из E. Это означает, что A/N является подпрямым произведением конечных полей из множества F и потому $A/N \in \mathscr{F}$. С другой стороны, идеал N, будучи нильалгеброй, принадлежит многообразию $\mathscr{S}_V^n$. Таким образом, $A \in \mathscr{S}_V^n \circ \mathscr{F}$. В силу произвольности выбора алгебры A заключаем о справедливости включения (3).

Обратно, если выполнено включение (3), то алгебры многообразия $\mathscr{V}$ будут редуцированными поскольку согласно леммам 5 и 16 многообразия $\mathscr{S}_V^n$ и $\mathscr{F}$ редуцированные, и расширения редуцированных алгебр с помощью редуцированных алгебр являются по лемме 18 редуцированными алгебрами. $\square$

Замечание. Условиям 1–3 теоремы 2 удовлетворяют многообразия $\mathrm{Ass}(R)$, $\mathrm{Alt}(R)$, $\mathrm{Jord}(R)$ и $\mathrm{Lie}(R)$ над любым кольцом R операторов (предполагается, что $1/2 \in R$ в случае йордановых алгебр).

В самом деле, условия 1–3 для лиевых алгебр выполняются очевидным образом. Условие 1 для альтернативных (а значит, и для ассоциативных) алгебр выполняется ввиду того, что согласно предложению 1 из [17, с. 140] произведение двух идеалов альтернативной алгебры является ее идеалом, а для йордановых алгебр — в силу леммы 3 из [17, с. 109], согласно которой куб идеала йордановой алгебры — ее идеал. Условие 2 для ассоциативных алгебр выполняется в силу хорошо известной леммы Андрунакиевича (см., например, [17, лемма 11, с. 203]); для альтернативных алгебр — ввиду результата Хенцеля и Слейтера [18]; для йордановых алгебр — в силу результата Слинько [19] (см. также [17, теорема 12, с. 374]). Проверим, наконец, условие 3. Пусть монолит M алгебры A является простым R-полем и e — единица из M. Тогда Re — ненулевой подмодуль из M и потому $M = Re$. Учитывая включения $Re \subseteq Ae \subseteq M$, получаем $Re = Ae = M$. Отсюда следует, в частности, что Ae — идеал алгебры A. Кроме того, идемпотент e лежит в центре алгебры A: для любого a из A имеем $ae = re$ для некоторого $r \in R$ и потому $ae = re = (re)e = e(re) = ea$. Более того, монолит M в нашем случае лежит в центре алгебры A: для любого x из A имеем $(ae)x = (re)x = r(ex) = r(xe) = x(re) = x(ae)$. Рассмотрим пирсовское разложение алгебры A в прямую сумму двух подмодулей: $A = Ae \oplus A(1-e)$, где, как обычно, $A(1-e) = \{a - ae \mid a \in A\}$. В нашем случае эти подмодули аннулируют друг друга, так как $ae(x - xe) = re(x - xe) = r(e(x - xe)) = r(ex - xe) = 0$. В ассоциативном случае легко получаем, что $A(1 - e)$ — идеал в A. Отсюда

$A(1-e)=O$ и тем самым $A=Ae=M$. Если A — альтернативная алгебра, то, будучи монолитной полупервичной A, в силу теоремы 12 из [17, с. 205] является либо ассоциативной, либо алгеброй Кэли — Диксона. Так как последняя проста, снова имеем $A=M$. Наконец, если A — йорданова алгебра, то, применяя тождество (22) из [17, с. 86], для любых x,z из A и $y=t=e$ получаем

$$(xz)e=(xz)e^2=2((xe)z)e-2(xe)(ze)+x(ze)$$
$$=2(xe)z-2(xe)(ze)+x(ze)=2(xe)(z-ze)+x(ze)=x(ze),$$

т. е. $(xz)e=x(ze)$. Учитывая это, легко проверить, что $A(1-e)$ — идеал в A и потому $A(1-e)=O$, следовательно, $A=Ae=M$. Таким образом, для всех указанных выше многообразий условия 1–3 теоремы 2 выполнены.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеврин Л. Н., Мартынов Л. М.* О достижимых классах алгебр // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 6. С. 1363–1381.
2. *Shevrin L. N., Martynov L. M.* Attainability and solvability for classes of algebras // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai (39. Semigroups: Structure and universal algebraic problems, Szeged (Hungary), 1981). Amsterdam etc.: North-Holland, 1985. P. 397–459.
3. *Martynov L. M.* On notions of completeness, solvability, primarity, reducibility and purity for arbitrary algebras // Intern. conf. on modern algebra and its applications. Vanderbilt Univ., Nashville, Tennessee, May 14–18, 1996. Schudule and Abstracts. Nashville, Tennessee, 1996. P. 79–80.
4. *Martynov L. M.* Primary and reduced varieties of associative, alternative, Jordan, and Lie rings // Междунар. конф. «Всесибирские чтения по математике и механике», 17–21 июня 1997 г., г. Томск. Т. 1. Математика: Тез. докл. Томск: Изд-во ТГУ, 1997. P. 3–4.
5. *Tamura T.* Attainability of systems of identities on semigroups // J. Algebra. 1966. V. 3. P. 261–276.
6. *Мальцев А. И.* Об умножении классов алгебраических систем // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 2. С. 346–365.
7. *Плоткин Б. И.* О функториалах, радикалах и корадикалах в группах // Мат. зап. Уральск. ун-та. 1970. Т. 7, № 3. С. 150–182.
8. *Плоткин Б. И.* Радикалы в группах, операции на классах групп // Избранные вопросы алгебры и логики. Новосибирск: Наука, 1973. С. 205–244.
9. *Вовси С. М.* О бесконечных произведениях классов групп // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 2. С. 272–285.
10. *Sundararaman T. R.* Precomplete varieties of R-algebras // Algebra Universalis. 1974. V. 27, N 2. P. 243–256.
11. *Джекобсон Н.* Строение колец. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
12. *Артамонов В. А.* Решетки многообразий линейных алгебр // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33, № 2. С. 135–167.
13. *Martynov L. M.* On radical, semisimple and attainable classes of algebras // Radical Theory: Proc. 1st Conf., Eger, 1982. Amsterdam etc.: North-Holland, 1985. P. 281–296.
14. *Мартынов Л. М.* О многообразиях разрешимых алгебр // Изв. вузов. Математика. 1989. № 6. С. 85–87.
15. *Львов И. В.* О многообразиях ассоциативных колец. I // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 3. С. 269–296.
16. *Мартынов Л. М.* О примарных и редуцированных многообразиях модулей // Вестн. ОмГУ. 1999. № 4. С. 29–31.
17. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
18. *Hentzel I. R., Slater M.* On the Andrunakievich lemma for alternative rings // J. Algebra. 1973. V. 27. P. 243–256.
19. *Слинько А. М.* О радикалах йордановых колец // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 2. С. 206–215.

Статья поступила 2 февраля 2000 г.

г. Омск
Омский педагогический университет, кафедра алгебры
mart@omsk.edu