Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 517.95

ЕДИНСТВЕННОСТЬ В ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Г. В. Дятлов

Аннотация: Доказана единственность в одномерной обратной задаче определения потенциала, зависящего от времени, с одним измерением. Библиогр. 10.

1. Постановка задачи и основной результат

Рассматривается одномерная начально-краевая задача

$$u_{tt} - u_{xx} + a(x,t)u = 0, \quad x, t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0;s) = u_t(x,0;s) = 0, \quad x > 0, \tag{2}$$

$$u_x(0,t;s) = -\delta(t-s), \quad t > 0. \tag{3}$$

Здесь $a(x,t)$ — непрерывная функция, а s — положительный параметр. Обратная задача состоит в нахождении потенциала, если известны значения решения при $x = 0$, т. е. известна функция $g(t,s) = u(0,t;s)$, $s, t > 0$. Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. *Функция $g(t,s)$, $0 < s, t < T$, однозначно определяет потенциал $a(x,t)$ в треугольнике $\{(x,t) \mid 0 < x < T/2,\ x < t < T - x\}$.*

2. Прямая задача

Решение прямой задачи естественно представить в виде $u = \theta(t - x - s) + v(x,t;s)$, где $\theta(t)$ — функция Хевисайда. Подставляя это выражение в (1)–(3), мы получаем следующую задачу для рассеянной волны v:

$$v_{tt} - v_{xx} + a(x,t)v = -a(x,t)\theta(t-x-s), \quad x, t, s > 0,$$
$$v(x,0;s) = v_t(x,0;s) = 0, \quad x, s > 0,$$
$$v_x(0,t;s) = 0, \quad t, s > 0.$$

Продолжая правую часть и потенциал $a(x,t)$ четным образом на $x < 0$, можно перейти к эквивалентной задаче Коши

$$v_{tt} - v_{xx} = -a(|x|,t)(v(x,t;s) - \theta(t - |x| - s)), \quad x, t, s > 0,$$
$$v(x,0;s) = v_t(x,0;s) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ s > 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00540) и Программы поддержки молодых ученых СО РАН.

Обратим волновой оператор, используя фундаментальное решение $\frac{1}{2}\theta(t-|x|)$ и нулевые данные Коши:

$$v(x,t;s) = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\theta(t-\tau-|x-y|)a(|y|,\tau)\big(\theta(\tau-|y|-s)+v(y,\tau;s)\big)\,d\tau dy. \quad (4)$$

Полученное равенство можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно v, из которого стандартным образом вытекают существование решения v, непрерывность, равенство нулю при $t < |x|+s$ и гладкость при $t > |x|+s$. Полагая $x=0$ в (4) и дифференцируя по s и t, получим

$$\begin{aligned} v_{st}(0,t;s) &= \int\limits_{0}^{\infty}\delta(t-s-2y)a(y,y+s)\,dy - \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\delta(t-\tau-y)a(y,\tau)v_s(y,\tau;s)\,d\tau dy \\ &= a\Big(\frac{t-s}{2},\frac{t+s}{2}\Big) - \int\limits_{0}^{\infty}v_s(y,t-y;s)a(y,t-y)\,dy. \end{aligned}$$

Рассматривая t как параметр, а $\xi = \frac{t-s}{2}$ как новую переменную (при этом $\frac{t+s}{2} = t-\xi$, $s = t-2\xi$), приходим к интегральному уравнению

$$v_{st}(0,t;t-2\xi) = a(\xi,t-\xi) - \int\limits_{0}^{\xi}v_s(y,t-y;t-2\xi)a(y,t-y)\,dy. \quad (5)$$

Переменный верхний предел ξ возникает в силу того, что $v_s(y,t-y;t-2\xi)=0$ при $t-y < y+(t-2\xi)$, что равносильно $\xi < y$. Кроме того, заметим, что ξ меняется в пределах от 0 до $t/2$ (последнее соответствует $s=0$).

3. Доказательство теоремы

Всюду ниже будем считать, что T фиксировано, $0<x<T/2$, $x<t<T-x$, а $s>0$. Действуя по обычной схеме, предположим, что a_1, a_2 — два потенциала, а $u_j = \theta(t-x-s)+v_j$ — соответствующие решения; причем $u_1(0,t;s) = u_2(0,t;s)$ при $0<t,s<T$. Вычитая уравнения и условия и обозначая $v = v_1 - v_2$, $a = a_1 - a_2$, получаем задачу

$$\begin{gathered} v_{tt} - v_{xx} + a_1(x,t)v = -a(x,t)u_2, \quad x,t,s>0, \\ v(x,0;s) = v_t(x,0;s) = 0, \quad x,s>0, \\ v(0,t;s) = v_x(0,t;s) = 0, \quad t,s>0. \end{gathered} \quad (6)$$

Теперь мы должны исключить $a(x,t)$ в правой части уравнения, точнее, выразить $a(x,t)$ через $v(x,t;s)$.

В случае, когда a не зависит от времени, существует несколько способов исключения $a(x)$. Первый состоит в применении к уравнению дифференциального оператора первого порядка по t; при этом естественно требовать, чтобы $u_2(x,0)\neq 0$ [1]. Второй способ — это просто положить $t=0$ и выразить $a(x)$ через начальные данные [2]. В нашей ситуации оба эти приема не работают и для исключения $a(x,t)$ мы воспользуемся уравнением (5). В силу того, что $v_1(0,t;s) = v_2(0,t;s)$ при $0 < t, s < T$, имеем

$$a(\xi, t-\xi) - \int\limits_0^\xi v_{1s}(y, t-y; t-2\xi) a(y, t-y)\, dy$$
$$= \int\limits_0^\xi v_s(y, t-y; t-2\xi) a_2(y, t-y)\, dy, \quad 0 < t < T,\ 0 < \xi < \frac{T}{2}.$$

Полученное уравнение можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$b(\xi;t) - \int\limits_0^\xi K(\xi, y; t) b(y;t)\, dy = F(\xi;t)$$

относительно функции $b(\xi;t) = a(\xi, t-\xi)$. Здесь

$$K(\xi, y; t) = v_{1s}(y, t-y; t-2\xi), \quad F(\xi;t) = \int\limits_0^\xi v_s(y, t-y; t-2\xi) a_2(y, t-y)\, dy,$$

а t выступает в роли параметра. В силу известных результатов это уравнение имеет единственное решение, причем

$$b(\xi;t) = F(\xi;t) - \int\limits_0^\xi H(\xi, y; t) F(y;t)\, dy,$$

где $H(\xi, y; t)$ — некоторая функция, определяемая функцией v_{1s} и имеющая ту же гладкость, что и последняя. Конкретное выражение для H, вообще говоря, ненужно. Итак,

$$a(\xi, t-\xi) = \int\limits_0^\xi v_s(y, t-y; t-2\xi) a_2(y, t-y)\, dy$$
$$- \int\limits_0^\xi H(\xi, y; t) \int\limits_0^y v_s(z, t-z; t-2y) a_2(z, t-z)\, dz dy.$$

Перепишем это равенство, заменяя ξ на x, а $t-\xi$ на t:

$$a(x,t) = \int\limits_0^x v_s(y, t+x-y; t-x) a_2(y, t+x-y)\, dy$$
$$- \int\limits_0^x H(x, y; t+x) \int\limits_0^y v_s(z, t+x-z; t+x-2y) a_2(z, t+x-z)\, dz dy. \quad (7)$$

Отсюда видно, что для получения значения a в точке (x,t) нужно проинтегрировать v_s по отрезку с концами $(x,t,t-x)$, $(0,t+x,t-x)$ и по треугольнику с вершинами $(x,t,t-x)$, $(0,t+x,t-x)$, $(0,t+x,t+x)$.

Вернемся к уравнению (6) и подставим в него полученное выражение для $a(x,t)$:

$$v_{tt} - v_{xx} = -a_1 v - d_1 u_2 + d_2 u_2, \tag{8}$$

где $d_1(x,t)$ и $d_2(x,t)$ — интегралы в правой части (7). Мы должны «избавиться» от производной по s в d_1 и d_2. Рассмотрим сначала d_2:

$$\begin{aligned}
d_2(x,t) &= -\frac{1}{2}\int_0^x a_2(z,t+x-z)\int_z^x H(x,y;t+x)\partial_y v(z,t+x-z;t+x-2y)\,dydz \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^x a_2(z,t+x-z)\Bigg[H(x,y;t+x)v(z,t+x-z;t+x-2y)\Big|_z^x \\
&\qquad - \int_z^x \partial_y H(x,y;t+x)v(z,t+x-z;t+x-2y)\,dy\Bigg]\,dz \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^x a_2(z,t+x-z)H(x,x;t+x)v(z,t+x-z;t-x)\,dz \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^x\int_0^y a_2(z,t+x-z)\partial_y H(x,y;t+x)v(z,t+x-z;t+x-2y)\,dzdy.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$|d_2 u_2| \le c\big(J_1|v| + J_2|v|\big), \tag{9}$$

где

$$J_1 v = \int_0^x v(z,t+x-z;t-x)\,dz, \quad J_2 v = \int_0^x\int_0^y v(z,t+x-z;t+x-2y)\,dzdy.$$

Здесь и далее c обозначает (возможно, различные) константы, зависящие только от a_1, a_2 и T.

Для того чтобы «избавиться» от производной по s в $d_1(x,t)$, проинтегрируем равенство (8) вдоль характеристики от (x,t) до $(0,t+x)$, т. е. применим оператор

$$Jv = \int_0^x v(y,t+x-y;s)\,dy.$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
J\big((\partial_t - \partial_x)w\big) &= \int_0^x w_t(y,t+x-y;s) - w_x(y,t+x-y;s)\,dy \\
&= -\int_0^x \frac{d}{dy} w(y,t+x-y;s)\,dy = w(0,t+x;s) - w(x,t;s)
\end{aligned}$$

и $v(0,t;s) = v_x(0,t;s) = 0$, получаем

$$J\big(v_{tt} - v_{xx}\big) = -(\partial_t + \partial_x)v(x,t;s).$$

Итак, после применения оператора J равенство (8) превращается в такое:

$$(\partial_t + \partial_x)v(x,t;s) = J(a_1 v) + J(d_1 u_2) - J(d_2 u_2).$$

Рассмотрим $J(d_1 u_2)$:

$$\begin{aligned} J(d_1u_2) &= \int_0^x d_1(y, t+x-y)u_2(y, t+x-y; s)\,dy \\ &= \int_0^x \int_0^y v_s(z, t+x-z; t+x-2y)a_2(z, t+x-z)u_2(y, t+x-y; s)\,dzdy \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^x a_2(z, t+x-z)\Bigg[v(z, t+x-z; t+x-2y)u_2(y, t+x-y; s)\Big|_z^x \\ &\qquad - \int_z^x v(z, t+x-z; t+x-2y)\partial_y u_2(y, t+x-y; s)\,dy\Bigg]dz \\ &\qquad = -\frac{1}{2}\int_0^x a_2(z, t+x-z)u_2(y, t; s)v(z, t+x-z; t-x)\,dz \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^x\int_0^y a_2(z, t+x-z)\partial_y u_2(y, t+x-y; s)v(z, t+x-z; t+x-2y)\,dzdy. \end{aligned}$$

Поэтому мы можем оценить $J(d_1 u_2)$ следующим образом

$$|J(d_1u_2)| \le c(J_1|v| + J_2|v|).$$

В результате мы приходим к оценке

$$|(\partial_t + \partial_x)v(x,t;s)| \le c(J|v| + J_1|v| + J_2|v| + JJ_1|v| + JJ_2|v|). \tag{10}$$

Для того чтобы продолжить доказательство, нам потребуется весовая априорная оценка карлемановского типа для оператора $p = \partial_t + \partial_x$ в области

$$\Omega = \big\{(x,t,s) \mid x,t,s > 0,\ x+t < T,\ t > x+s\big\}.$$

Обозначим $\Gamma = \partial\Omega \cap \{(0,t,s) \mid s,t > 0\}$ и введем в рассмотрение весовое пространство с нормой

$$\|v\|_\tau = \Bigg(\int_\Omega e^{2\tau\varphi}|v|^2\,dxdtds\Bigg)^{1/2},$$

где φ — весовая функция, а $\tau > 0$.

Лемма. *Если $\varphi(x,t) \in C^2(\overline{\Omega})$ такова, что $p\varphi < 0$ и $p^2\varphi \ge 0$ в $\overline{\Omega}$, то для $v \in C^1(\overline{\Omega})$ имеет место оценка*

$$\tau^2\|v\|_\tau^2 + \tau\int_\Gamma e^{2\tau\varphi}|v|^2\,dtds \le c\|pv\|_\tau^2, \quad \tau > 0, \tag{11}$$

где c зависит только от T.

Доказательство леммы приведено в следующем пункте.

Выберем весовую функцию следующим образом: $\varphi(x,t) = T-(x+t)$. Она, очевидно, удовлетворяет условиям леммы.

Покажем, что операторы J, J_1, J_2 ограничены в пространстве с нормой $\|\cdot\|_\tau$. Положим $w = e^{\tau\varphi}v$. Используя неравенство Коши — Буняковского, выводим

$$|e^{\tau\varphi}J_1 v| = |e^{\tau\varphi}J_1(e^{-\tau\varphi}w)| \le \int\limits_0^x e^{\tau(\varphi(x,t)-\varphi(y,t+x-y))}|w(y,t+x-y;t-x)|\,dy$$

$$\le \left(\int\limits_0^x |w(y,t+x-y;t-x)|^2\,dy\right)^{1/2}.$$

Значит,

$$\|J_1 v\|_\tau^2 = \int\limits_\Omega |e^{\tau\varphi}J_1(e^{-\tau\varphi}w)|^2 dt\,dxds \le c\int\limits_\Omega \int\limits_0^x |w(y,t+x-y;t-x)|^2\,dydtdxds.$$

В последнем интеграле функция $|w(y,t+x-y;t-x)|^2$ интегрируется по области, заданной при помощи неравенств

$$x,t,s,y>0,\ x+t<T,\ t>x+s,\ y<x.$$

После замены переменных $y=y$, $s=s$, $\xi = x+t-y$, $\eta = t-x$ (при которой $x = \frac{\xi+y-\eta}{2}$, $t = \frac{\xi+y+\eta}{2}$) эти неравенства перейдут в следующие:

$$\xi+y-\eta>0,\ \xi+y+\eta>0,\ s>0,\ y>0,$$
$$\xi+y<T,\ \eta>s,\ \xi>y+\eta.$$

Поскольку подынтегральная функция не зависит от s, можно проинтегрировать по s от 0 до η. Вводя переобозначения $y\to x$, $\xi\to t$, $\eta\to s$ и преобразуя систему неравенств, видим, что последний интеграл есть не что иное, как

$$\int\limits_\Omega s|w(x,t;s)|^2\,dtdxds,$$

откуда немедленно вытекает ограниченность J_1.

Рассмотрим оператор J_2. Аналогичные рассуждения приводят нас к интегралу от функции $|w(z,t+x-z,t+x-2y)|^2$ по области, заданной неравенствами

$$x,t,s>0,\ x+t<T,\ t>x+s,\ y,z>0,\ z<y,\ y<x,$$

которые после замены

$$z=z,\ \xi=t+x-z,\ \eta=t+x-2y,\ s=s,\ \tau=t-x$$

переходят в неравенства

$$\xi-\tau+z>0,\ \xi+\tau+z>0,\ s>0,\ \xi+z<T,\ \tau>s,$$
$$\xi-\eta+z>0,\ z>0,\ 2z<\xi-\eta+z,\ \xi-\tau+z>\xi-\eta+z,$$

откуда $0<s<\tau<\eta<\xi<\xi+z<T$, $z>0$, $\xi>z+\eta$. Если переобозначить $z\to x$, $\xi\to t$, $\eta\to s$, получается интеграл от $|w(x,t;s)|^2$ по области Ω с весом $s^2/2$. В случае оператора J рассуждения еще проще.

Для завершения доказательства возведем в квадрат неравенство (10), учитывая неравенство $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$, проинтегрируем с весом $e^{2\tau\varphi}$ по области Ω и воспользуемся ограниченностью операторов J, J_1, J_2:

$$\|pv\|_\tau^2 \le c\|v\|_\tau^2.$$

В силу того, что $v = 0$ на Γ, весовая оценка (11) для функции v принимает вид

$$\tau^2\|v\|_\tau^2 \le c\|pv\|_\tau^2, \quad \tau > 0.$$

Так как $\tau > 0$ произвольно, из двух последних неравенств вытекает, что $v = 0$ в Ω. Теорема доказана.

4. Весовая оценка для оператора $\partial_t + \partial_x$

Доказательство леммы. Сначала получим оценку для оператора дифференцирования в одномерном случае. Пусть $\varphi(x)$ — достаточно гладкая весовая функция, $v(x)$ — гладкая функция и $w = e^{\tau\varphi}v$. Имеем

$$\int_a^b e^{2\tau\varphi}|v'|^2\,dx = \int_a^b e^{2\tau\varphi}|(e^{-\tau\varphi}w)'|^2\,dx = \int_a^b e^{2\tau\varphi}|e^{-\tau\varphi}(w' - \tau\varphi'w)|^2\,dx$$

$$= \int_a^b (w'-\tau\varphi'w)^2\,dx = \int_a^b w'^2 - 2\tau\varphi'ww' + \tau^2\varphi'^2w^2\,dx \ge \int_a^b \tau^2\varphi'^2w^2 - 2\tau\varphi'ww'\,dx.$$

Рассмотрим

$$\int_a^b 2\varphi'ww'\,dx = \int_a^b (\varphi'w^2)' - \varphi''w^2\,dx = -\int_a^b \varphi''w^2\,dx + (\varphi'w^2)\big|_a^b.$$

Таким образом, получается оценка

$$\int_a^b e^{2\tau\varphi}|v'|^2\,dx \ge \int_a^b e^{2\tau\varphi}(\tau^2\varphi'^2 + \tau\varphi'')|v|^2\,dx - \tau(e^{2\tau\varphi}\varphi'|v|^2)\big|_a^b. \tag{12}$$

Предположим, что $\varphi(x,t)$ такова, что $p\varphi < 0$ и $p^2\varphi \ge 0$ в области Ω. Мы должны оценить снизу интеграл

$$\int_\Omega e^{2\tau\varphi}|(\partial_t + \partial_x)v|^2\,dtdxds.$$

Введем новые координаты $\xi = t + x$, $\eta = t - x$ вместо x, t (при этом $x = \frac{\xi-\eta}{2}$, $t = \frac{\xi+\eta}{2}$, а якобиан равен $1/2$). Заметим, что

$$\partial_\xi v\left(\frac{\xi-\eta}{2}, \frac{\xi+\eta}{2}; s\right) = \frac{1}{2}(\partial_t + \partial_x)v.$$

С учетом одномерной оценки (12) имеем

$$\int_\Omega e^{2\tau\varphi}\big|(\partial_t + \partial_x)v|^2\,dtdxds = 2\int_0^T\int_s^T\int_\eta^T e^{2\tau\varphi}|\partial_\xi v|^2\,d\xi\,d\eta ds$$

$$\ge 2\int_0^T\int_s^T\int_\eta^T e^{2\tau\varphi}(\tau^2\varphi_\xi^2 + \tau\varphi_{\xi\xi})|v|^2\,d\xi d\eta ds - 2\tau\int_0^T\int_s^T e^{2\tau\varphi}\varphi_\xi|v|^2\big|_{\xi=\eta}^{\xi=T}\,d\eta ds$$

$$\ge c\left(\int_\Omega e^{2\tau\varphi}(\tau^2(p\varphi)^2 + \tau p^2\varphi)|v|^2\,dtdxds - \tau\int_\Gamma e^{2\tau\varphi}p\varphi|v|^2\,dtds\right).$$

На последнем шаге мы отбросили интеграл

$$\int_0^T \int_s^T e^{2\tau\varphi} \varphi_\xi |v|^2 \, d\eta ds$$

в силу его положительности. Вспоминая условия леммы, приходим к оценке (11).

5. Библиографические замечания

Обратная задача определения стационарного потенциала в одномерном гиперболическом уравнении рассматривалась многими авторами (см., например, [3, 4]). Сводя обратную задачу к системе нелинейных интегральных уравнений, можно доказать глобальную единственность и устойчивость, а также существование в малом.

Обратные задачи рассеяния на нестационарном потенциале изучались в работах Л. П. Нижника (см. [5]), который показал, что оператор рассеяния факторизуется на два оператора вида $I + V$, где I — тождественный, а V — интегральный оператор Вольтерра, и с помощью этого доказал единственность восстановления потенциала по данным рассеяния (в многомерном случае вообще говоря только в малом). Обратные задачи рассеяния на нестационарном потенциале рассматривались также П. Д. Стефановым [6]. А. Г. Рамм и Дж. Шёстранд установили, что нестационарный потенциал можно восстановить по отображению Дирихле — Неймана [7].

Метод весовых априорных оценок в обратных задачах был впервые предложен А. Л. Бухгеймом и М. В. Клибановым [1] (см. также [8–10]). Современное состояние этого метода отражено в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бухгейм А. Л., Клибанов М. В.* Единственность в целом одного класса многомерных обратных задач // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, № 2. С. 269–272.
2. *Bukhgeĭm A. L.* Carleman estimates and inverse problems // Proc. Japan Math. Soc. (to appear).
3. *Белишев М. И., Благовещенский А. С.* Динамические обратные задачи теории волн. СПб: Изд-во С.- Петербург. ун-та, 1999.
4. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
5. *Нижник Л. П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. Киев: Наук. думка, 1990.
6. *Stefanov P. D.* Uniqueness of the multi-dimensional inverse scattering problem for time dependent potentials // Math. Z. 1989. Bd 201, N 4. S. 541–559.
7. *Ramm A. G., Sjöstrand J. S.* An inverse problem for the wave equation // Math. Z. 1991. Bd 206. S. 119–130.
8. *Бухгейм А. Л.* Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983.
9. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
10. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer-Verl., 1998.

Статья поступила 22 мая 2000 г.

г. Новосибирск
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
dyatlov@math.nsc.ru