Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2001. Том 42, № 2

УДК 519.21

ОЦЕНКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ МАКСИМУМА КРИТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ГАЛЬТОНА — ВАТСОНА НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Е. М. Бондаренко, В. А. Топчий

Аннотация: Пусть $Z(n)$, $n = 0, 1, \dots,$ — критический ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона, $Z(0) = 1$. Доказано, что из условия $\mathbf{E}Z(1)(\ln^+ Z(1))^\beta < \infty$ при $\beta \geq 1$ следует оценка

$$\frac{\beta}{\beta+1} \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{E} \max_{1\leq k\leq n} Z(k) \ln^{-1} n,$$

а при $\beta > 2$ —

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{E} \max_{1\leq k\leq n} Z(k) \ln^{-1} n \leq \frac{\beta}{\beta-2}.$$

Библиогр. 10.

Пусть $Z(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots,$ — критический ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона (см. [1, 2]), $Z(0) = 1$; ν — случайная величина, задающая распределение численности потомства отдельных частиц (ее распределение совпадает с распределением $Z(1)$), с производящей функцией

$$f(s) = \mathbf{E}s^\nu = \sum_{k=0}^{\infty} f_k s^k,$$

где $f_k = \mathbf{P}\{\nu = k\}$ и $f'(1) = 1$ (условие критичности $Z(n)$).

Обозначим

$$F_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} f_j, \quad \mathscr{F}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k s^k = \frac{1-f(s)}{1-s}.$$

Пусть $M(n)$ — частичный максимум ветвящегося процесса $Z(n)$, а M — глобальный максимум:

$$M(n) = \max_{0\leq k\leq n} Z(k), \quad M = \max_n M(n).$$

Хорошо известно, что процесс $Z(k)$ вырождается с вероятностью 1, а случайная величина M конечна с вероятностью 1, но среднее у нее бесконечно. Эти факты являются основанием для исследований асимптотики $M(n)$, изучавшейся в работах [3–6].

Наиболее общие результаты получены в [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99–01–01130 и 98–01–04132) и INTAS (код проекта 99–01317).

Теорема 1 [6]. *Если $f'(1) = 1$ и существует постоянная $c > 1$ такая, что*

$$\lim_{y \to 0} \frac{1 - \mathscr{F}(1 - cy)}{1 - \mathscr{F}(1 - y)} = l > 1, \tag{1}$$

то справедливо соотношение

$$\mathbf{E}M(n) \sim \ln n \quad \text{при } n \to \infty.$$

В приведенной теореме 1 и далее символ $\sim$ обозначает сходимость отношения левой и правой частей к единице при соответствующем изменении аргумента.

Как отмечено в [7], условие (1) влечет существование $\delta > 0$ такого, что

$$1 - \mathscr{F}(1 - y) = O(y^{\delta}) \quad \text{при } y \to +0. \tag{2}$$

Целью данной публикации является получение асимптотических оценок снизу и сверху для $\mathbf{E}M(n)$ при отказе от условия (1) или от условия (2) (что то же самое) и замене его краеугольным в теории ветвящихся процессов так называемым $X \ln X$-условием (т. е. $\mathbf{E}\nu \ln^{+} \nu < \infty$) или достаточно близким к нему.

Приведем основные результаты.

Теорема 2. *Пусть $Z(n)$ — критический ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона и выполнено условие $\mathbf{E}Z(1) \ln^{+} Z(1) < \infty$. Тогда*

$$\varliminf_{n \to \infty} \mathbf{E}M(n) \ln^{-1} n \geq \frac{1}{2},$$

а если выполнено условие

$$1 - \mathscr{F}(1 - y) = O(\ln^{-\beta} y^{-1}) \quad \text{при } y \to +0$$

(или $\mathbf{E}Z(1)(\ln^{+} Z(1))^{\beta} < \infty$, что более ограничительно), где $\beta > 1$, то

$$\varliminf_{n \to \infty} \mathbf{E}M(n) \ln^{-1} n \geq \frac{\beta}{\beta + 1}.$$

Теорема 3. *Пусть $Z(n)$ — критический ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона, $\beta > 2$ и выполняется условие*

$$1 - \mathscr{F}(1 - y) = O(\ln^{-\beta} y^{-1}) \quad \text{при } y \to +0$$

(или более ограничительное условие $\mathbf{E}Z(1)(\ln^{+} Z(1))^{\beta} < \infty$). Тогда

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\mathbf{E}M(n)}{\ln n} \leq \frac{\beta}{\beta - 2}.$$

Из теорем 2 и 3 получается обобщение теоремы 1.

Следствие. *Пусть $Z(n)$ — критический ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона и при всех $\beta > 0$ выполнено условие $\mathbf{E}Z(1)(\ln^{+} Z(1))^{\beta} < \infty$. Тогда при $n \to \infty$*

$$\mathbf{E}M(n) \sim \ln n.$$

Напомним взаимосвязь между максимумами ветвящихся процессов $Z(n)$ и непрерывных слева случайных блужданий (см. [3, 5, 6]).

Пусть ξ_t — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением таким же, как у $\xi = \nu - 1$, и, следовательно, с нулевым средним. Положим

$$S(0) = 1, \quad S(t) = \sum_{i=0}^{t} \xi_i, \quad \text{где} \quad t = 1, 2, \dots .$$

Вложим ветвящийся процесс $Z(n)$ в непрерывное снизу случайное блуждание $S(t)$ следующим образом:

$$Z(0) = 1; \quad Z(1) = S(1) = S(Z(0)); \quad Z(n) = S\left(\sum_{k=0}^{n-1} Z(k)\right).$$

Обозначая $S^*(t) = S(t \wedge \tau)$, $\tau = \min\{k : S(k) = 0\}$, легко получить, что

$$M^* \overset{\text{df}}{=} \max_t S^*(t) \geq M.$$

Лемма 1 [5]. *Для любых $t > 0$ и $n = 0, 1, 2, \dots$ выполнены неравенства*

$$-t\mathbf{P}\{Z(n) > 0\} \leq \mathbf{E}M(n) - \int_0^t \mathbf{P}\{M > x\}\, dx \leq \int_t^\infty \mathbf{P}\{M(n) > x\}\, dx. \tag{3}$$

Заметим, что присутствующие в последней лемме интегралы фактически являются суммами $\sum\limits_{k=0}^{t} \mathbf{P}\{M > k\}$ и $\sum\limits_{k=t+0}^{\infty} \mathbf{P}\{M(n) > k\}$, при этом нецелые значения пределов в этих суммах и далее означают, что суммирование ведется по всем целым значениям из указанного диапазона.

Лемма 2 [5]. *Для любого критического ветвящегося процесса Гальтона — Ватсона $Z(n)$ существует функция $\varepsilon = \varepsilon(x) \to 0$ при $x \to \infty$ такая, что*

$$(1 - \varepsilon)\mathbf{P}\{M^* > (1 + \varepsilon)x\} \leq \mathbf{P}\{M > x\} \leq \mathbf{P}\{M^* > x\}. \tag{4}$$

Обозначим $T(n) = \#\{t : S^*(t) = n + 1,\ S^*(t + 1) = n\}$. Очевидно, что $Q(n) \overset{\text{df}}{=} \mathbf{P}\{T(n) > 0\} = \mathbf{P}\{M^* > n\}$. Пусть

$$P(n, s) = \mathbf{E}s^{T(n)}, \quad P(n) = P(n, 0).$$

Тогда $Q(n) = 1 - P(n)$. Для $n = 1, 2, \dots$ определим τ_n как решение уравнения

$$n^{-1} = 1 - \mathscr{F}(1 - \tau_n) \tag{5}$$

и положим $t_n = \tau_n^{-1}$. Очевидно, что значения t_n, $n = 1, 2, \dots$, являются решениями уравнений

$$n^{-1} = 1 - \mathscr{F}(1 - t_n^{-1}).$$

Лемма 3. *Если $\mathbf{E}Z(1) = 1$, то при $n \to \infty$ справедливы соотношения*

$$\sum_{i=0}^{t_n} \mathbf{P}(M^* > i) = \sum_{i=0}^{t_n} Q(i) \sim \int_0^{t_n} \mathbf{P}(M^* > t)\, dt \sim \ln n.$$

Доказательство. Лемма 3 отличается от леммы 4 из [6] отсутствием в допущениях условия (1). Доказательства этих лемм незначительно отличаются друг от друга. Поэтому приведем лишь перечень изменений, которые необходимо произвести в доказательстве леммы 4 из [6] для преобразования его в доказательство леммы 3. Формулу (18) из [6] и следующее за ней утверждение $c_0 < \infty$ нужно исключить, а абзац о применении обобщенной теоремы непрерывности, следующий за формулой (19) в [6], — поставить после двойного неравенства (в [6])

$$\min\{1, \lambda^{-1}\} \le \psi_n(\lambda) \le \max\{1, \lambda^{-1}\}. \tag{6}$$

Используемую в определении $\psi_n(\lambda)$ из [6] последовательность $\tau_n \uparrow \infty$ считать произвольной. Неравенство (6) обеспечивает конечность предела в перенесенном абзаце о применении обобщенной теоремы непрерывности.

Далее символы $\nearrow$ и $\searrow$ будут обозначать как монотонную сходимость к пределу, так и монотонное возрастание или убывание функции при соответствующем изменении аргумента. Кроме того, чтобы не писать различных вспомогательных постоянных $c_i > 0$ $(i \ge 1)$, мы будем использовать один и тот же символ c.

Для исключения комментариев о случаях, когда значения аргумента отделены от предельных, а значения исследуемых функций в данной области не влияют на результаты и имеют некоторую специфику, или длинных записей о достаточно больших значениях аргумента и выборе значений постоянных, чуть меньших или больших, чем предельное, введем специальные символы для асимптотических неравенств $\widetilde{\le}$ и $\widetilde{\ge}$, означающие, что верхний предел отношения функций из левой и правой частей на бесконечности меньше (больше) либо равен 1.

Докажем, что при $\beta \ge 1$ условие

$$\mathbf{E}Z(1)(\ln^+ Z(1))^\beta < \infty \tag{7}$$

влечет оценку (здесь и далее исследуется поведение функции $1 - \mathscr{F}(1-y)$ при $y \to +0$)

$$1 - \mathscr{F}(1-y) = o(\ln^{-\beta} y^{-1}).$$

Действительно, пусть фиксировано произвольное $\varepsilon \in (0,1)$, выполнено условие (7) и $m = \varepsilon n \ln^{-\beta} n$. Тогда по определению $\mathscr{F}(x)$, используя простейшие свойства экспоненты и логарифма, получаем

$$\begin{aligned} 1 - \mathscr{F}(1-n^{-1}) &= \sum_{k=1}^{m} F_k(1-(1-n^{-1})^k) + \sum_{k=m+1}^{\infty} F_k(1-(1-n^{-1})^k) \\ &\widetilde{\le}\, mn^{-1} + \ln^{-\beta} m \sum_{k=m+1}^{\infty} F_k \ln^\beta k \;\widetilde{\le}\; \ln^{-\beta} n \left(\varepsilon + \sum_{k=m+1}^{\infty} f_k k \ln^\beta k\right) \widetilde{\le}\, \varepsilon \ln^{-\beta} n, \end{aligned}$$

что в силу монотонности $\mathscr{F}(x)$ и произвольности $\varepsilon > 0$ немедленно влечет требуемую оценку.

Нас интересует $X \ln X$-условие, т. е. следствие из условия (7) при $\beta = 1$:

$$1 - \mathscr{F}(1-y) = o(\ln^{-1} y^{-1}). \tag{8}$$

Для получения более точных оценок $\mathbf{E}M(n)$ введем условия, менее ограничительные, чем полученные из оценки (7):

$$1 - \mathscr{F}(1-y) = O(\ln^{-\beta} y^{-1}), \tag{9}$$

где $\beta > 1$.

Соотношение (8) при $y = t_n^{-1}$ принимает вид $o(n) = \ln t_n$ при $n \to \infty$, а это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n верно неравенство

$$t_n \le e^{\varepsilon n}. \tag{10}$$

Из соотношения (9) так же, как и из (8), получаем аналог (10):

$$t_n \le e^{An^{\beta^{-1}}}, \tag{11}$$

где $A > 0$ — некоторая фиксированная постоянная.

Далее мы будем использовать традиционное для вероятности продолжения ветвящихся процессов обозначение: $Q_n \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathbf{P}\{Z(n) > 0\}$.

Из теоремы 1 [8] легко может быть извлечена следующая

Лемма 4. *Для любого критического процесса имеет место соотношение*

$$\int\limits_{Q_n}^{1} \frac{dy}{y(1-\mathscr{F}(1-y))} \sim n,$$

а если выполнено условие (8), *то все функции* r_n, *удовлетворяющие соотношению*

$$\int\limits_{r_n}^{1} \frac{dy}{y(1-\mathscr{F}(1-y))} \sim n,$$

асимптотически эквивалентны.

Лемма 5. *Если* $\mathbf{E}Z(1)\ln^+ Z(1) < \infty$, *то для любого фиксированного* $c > 0$ *при достаточно больших* n *справедлива оценка* $Q_n \ge e^{c\sqrt{n}}$ *и верно неравенство* $Q_n t_{\sqrt{n}} \stackrel{\sim}{\le} 1$, *а если выполнено условие* (9), *то для любого* $1 < \alpha < \beta$

$$Q_n t_{n^{\alpha(\alpha+1)^{-1}}} \stackrel{\sim}{\le} 1.$$

Доказательство. При выполнении условия $\mathbf{E}Z(1)\ln^+ Z(1) < \infty$ из соотношения (8) при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ и $y \searrow 0$ следует неравенство

$$1 - \mathscr{F}(1-y) \stackrel{\sim}{\le} \varepsilon \ln^{-1} y^{-1},$$

а значит, при достаточно больших n выполняются неравенства

$$\int\limits_{Q_n}^{1} \frac{dy}{1-\mathscr{F}(1-y)} \ge \int\limits_{Q_n}^{1} \frac{\ln y^{-1}}{\varepsilon y} dy = \frac{1}{2\varepsilon} \ln^2 Q_n^{-1}$$

или в силу леммы 4 при $n \to \infty$

$$\frac{1}{2\varepsilon} \ln^2 Q^{-1}(n) \stackrel{\sim}{\le} n,$$

что эквивалентно первой оценке в данной лемме 5.

Для получения второй оценки воспользуемся монотонностью $\mathscr{F}(x)$ и определением (5), тогда при $n \to \infty$

$$\int\limits_{\tau_{\sqrt{n}}}^{1} \frac{dy}{y(1-\mathscr{F}(1-y))} \le \sqrt{n} \int\limits_{\tau_{\sqrt{n}}}^{1} \frac{dy}{y} \le \sqrt{n} \ln t_{\sqrt{n}} \stackrel{\sim}{\le} \varepsilon n. \tag{12}$$

Полученное неравенство вместе с леммой 4 доказывают вторую оценку в лемме 5.

При более жестких ограничениях (9) для любого $1 < \alpha < \beta$ соотношение (11) представимо в виде: для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n верно неравенство $t_n \le e^{\varepsilon n^{\alpha^{-1}}}$ (т. е. $t_n \mathrel{\widetilde{\lesssim}} e^{\varepsilon n^{\alpha^{-1}}}$ при $n \to \infty$), что позволяет записать аналог (12):

$$\int\limits_{\tau_{n^{\alpha(1+\alpha)^{-1}}}}^{1} \frac{dy}{y(1-\mathscr{F}(1-y))} \le n^{\alpha(1+\alpha)^{-1}} \int\limits_{\tau_{n^{\alpha(1+\alpha)^{-1}}}}^{1} \frac{dy}{y} \le n^{\alpha(1+\alpha)^{-1}} \ln t_{n^{\alpha(1+\alpha)^{-1}}} \mathrel{\widetilde{\lesssim}} \varepsilon n,$$

и, учитывая ту же лемму 4, завершить доказательство леммы 5.

Леммы 1–3 при выполнении условия $\mathbf{E}Z(1)\ln^+ Z(1) < \infty$ влекут

$$-t_{\sqrt{n}} Q_n \le \mathbf{E}M(n) - \frac{1}{2}\ln n(1+o(1)),$$

а при выполнении условия (9) для любого $1 < \alpha < \beta$

$$-t_{n^{\alpha(1+\alpha)^{-1}}} Q_n \le \mathbf{E}M(n) - \frac{\alpha}{\alpha+1}\ln n(1+o(1)),$$

что в силу произвольности $1 < \alpha < \beta$, монотонного возрастания функции $\frac{\alpha}{\alpha+1}$ и леммы 5 доказывает теорему 2.

Займемся оценкой $\mathbf{E}M(n)$ сверху. Мы будем следовать подходу, разработанному в [6]. Отличия заключаются в корректировке определений приводимых ниже функционалов $K(\varepsilon, x)$ и $H(\varepsilon, x)$.

Всюду далее предполагается выполненным условие (9).

Положим

$$K(\varepsilon, x) = \max\{1, (1-\mathscr{F}(1-x^{-1}))^{-1+\varepsilon}\ln^{-1} x\}, \tag{13}$$

где $x \in (1, \infty)$ и $\varepsilon \in (0, (\beta-1)\beta^{-1})$. Легко проверить, что условие (9) для $\beta > 1$ и определение (13) немедленно влекут $K(\varepsilon, x) \to \infty$ при $x \nearrow \infty$.

При $x \nearrow \infty$ функция $1-\mathscr{F}(1-x^{-1})$ убывает, так как при $y \nearrow 1$ будет $\mathscr{F}(y) \nearrow 1$. Функция $x(1-\mathscr{F}(1-x^{-1}))$ возрастает при $x \nearrow \infty$, так как

$$\frac{1-\mathscr{F}(y)}{1-y} = \sum_j F_j \sum_{i=0}^{j-1} y^i \nearrow \quad \text{при } y \nearrow 1.$$

Тогда по определению (13) при $x \nearrow \infty$

$$K(\varepsilon, x)\ln x = (1-\mathscr{F}(1-x^{-1}))^{-1+\varepsilon} \nearrow \infty, \tag{14}$$

$$x^{-1+\varepsilon}K(\varepsilon, x)\ln x = (x(1-\mathscr{F}(1-x^{-1})))^{-1+\varepsilon} \searrow 0. \tag{15}$$

В работе [6] определен класс слабо выпуклых функций (позднее в [9] дано эквивалентное, но более естественное определение данного класса). Приведенное в [6] определение функции $H(\varepsilon, x)$ требует уточнения. Формально она не является слабо выпуклой. Неудачно выбрано определение $H(\varepsilon, x)$ при $|x| \le 1$. Требуемые нам описываемые ею свойства определяются значениями при больших x, и если к правой части имеющегося в [6] определения функции $H(\varepsilon, x)$ прибавить нормированную подходящей постоянной функцию $\min\{x^2, 1\}$, то она станет слабо выпуклой, а в приведенное там доказательство нужно внести естественные технические изменения, не влияющие на асимптотику оценок и сходимость соответствующих рядов и интегралов.

Приводимое ниже доказательство описывает более широкий класс процессов, и, в частности, из него будет следовать результат из [6], требующий упомянутой выше корректировки. Поэтому нет необходимости подробнее на ней останавливаться.

Пусть

$$c_0 = \int\limits_1^\infty \frac{K(\varepsilon, z)}{z^2}\, dz.$$

В силу (15) $c_0 < \infty$, т. е. данный интеграл конечен. Определим функции $H(\varepsilon, x)$ следующим образом:

$$H(\varepsilon, x) = \mathbb{I}\{x \geq 1\}\left(c_0 x - \frac{c_0}{2} + \int\limits_1^x du \int\limits_1^u dv \int\limits_v^\infty \frac{K(\varepsilon, z)}{z^2}\, dz\right) + \frac{c_0}{2}\min\{x^2, 1\}$$

при $x \geq 0$ и $H(\varepsilon, x) = H(\varepsilon, -x)$ при $x < 0$, где $\mathbb{I}\{A\}$ — индикатор события A.

Вычисляя производную от $H(\varepsilon, x)$ при $x > 0$, меняя порядок интегрирования и производя тождественные преобразования, получаем

$$\begin{aligned}
H'(\varepsilon, x) &= \mathbb{I}\{x > 1\}\int\limits_1^x dv \int\limits_v^\infty \frac{K(\varepsilon, z)}{z^2}\, dz + c_0 \min\{x, 1\} \\
&= \mathbb{I}\{x > 1\}\left(\int\limits_x^\infty dz \int\limits_1^x \frac{K(\varepsilon, z)}{z^2}\, dv + \int\limits_1^x dz \int\limits_1^z \frac{K(\varepsilon, z)}{z^2}\, dv\right) + c_0 \min\{x, 1\} \\
&= \mathbb{I}\{x > 1\}\left((x-1)\int\limits_x^\infty \frac{K(\varepsilon, z)}{z^2}\, dz + \int\limits_1^x \frac{K(\varepsilon, z)}{z}\, dz - \int\limits_1^x \frac{K(\varepsilon, z)}{z^2}\, dz\right) + c_0 \min\{x, 1\} \\
&= \mathbb{I}\{x > 1\}\left(x\int\limits_x^\infty \frac{K(\varepsilon, z)}{z^2}\, dz + \int\limits_1^x \frac{K(\varepsilon, z)}{z}\, dz\right) + c_0 x \mathbb{I}\{x \leq 1\}. \qquad (16)
\end{aligned}$$

Слабая выпуклость функции $H(\varepsilon, x)$ следует из того, что $H'(\varepsilon, x) > 0$ при $x > 0$ (см. (16)), положительности ее второй и неположительности третьей производных. Последнее вытекает из соотношения

$$H''(\varepsilon, x) = \mathbb{I}\{x > 1\}\int\limits_x^\infty \frac{K(\varepsilon, z)}{z^2}\, dz + c_0 \mathbb{I}\{x \leq 1\},$$

получаемого после дифференцирования крайних частей цепочки равенств (16).

В последней части последовательности преобразований (16) все слагаемые положительны, поэтому для оценки снизу достаточно оценить асимптотически при $x \nearrow \infty$ только первый интеграл. Пользуясь свойством (14) и частью а) теоремы 1 из [10, гл. 8, § 9] (далее теорема 1Ф), получаем

$$x\int\limits_x^\infty \frac{K(\varepsilon, z)}{z^2}\, dz \mathrel{\widetilde{\geq}} xK(\varepsilon, x)\ln x \int\limits_x^\infty \frac{\ln^{-1} z}{z^2}\, dz \mathrel{\widetilde{\geq}} \frac{1}{2}K(\varepsilon, x).$$

Следовательно, при $x \nearrow \infty$

$$H'(\varepsilon,x) \gtrapprox \frac{1}{2}K(\varepsilon,x) \to \infty. \tag{17}$$

С другой стороны, если зафиксировать $0 < \delta < \varepsilon$, то в силу того, что $x(1-\mathscr{F}(1-x^{-1})) \nearrow$ при $x \nearrow \infty$ (см. (15)) и выполнено условие (9), с помощью теоремы 1Ф при $\beta > 1$ и $x \nearrow \infty$ находим

$$\begin{aligned} x\int_x^\infty \frac{K(\varepsilon,z)}{z^2}\,dz &= x\int_x^\infty \frac{\max\{1,(1-\mathscr{F}(1-z^{-1}))^{-1+\varepsilon}\ln^{-1} z\}}{z^2}\,dz \\ &\lessapprox \frac{x}{(x(1-\mathscr{F}(1-x^{-1})))^{1-\delta}}\int_x^\infty \frac{(1-\mathscr{F}(1-z^{-1}))^{\varepsilon-\delta}}{z^{1+\delta}\ln z}\,dz \\ &\lessapprox \frac{x^\delta(1-\mathscr{F}(1-x^{-1}))^\delta}{1-\mathscr{F}(1-x^{-1})}\int_x^\infty \frac{\ln^{-1-(\varepsilon-\delta)\beta} z}{z^{1+\delta}}\,dz \lessapprox c\frac{\ln^{-\beta\varepsilon-1} x}{1-\mathscr{F}(1-x^{-1})}, \end{aligned} \tag{18}$$

а в силу того, что $1-\mathscr{F}(1-x^{-1}) \searrow$ при $x \nearrow \infty$, имеем

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{K(\varepsilon,z)}{z}\,dz &= \int_1^x \frac{\max\{1,(1-\mathscr{F}(1-z^{-1}))^{-1+\varepsilon}\ln^{-1} z\}}{z}\,dz \\ &\lessapprox \sum_{j=2}^x (1-\mathscr{F}(1-j^{-1}))^{-1}\frac{\ln^{-1-\varepsilon\beta} j}{j}. \end{aligned} \tag{19}$$

Учитывая оценки (18) и (19), допущение (9), неравенства

$$\mathbf{E}H(\varepsilon,Z(1)) \le \sum_k F_k H'(\varepsilon,k+1), \quad kF_k \lessapprox c(1-\mathscr{F}(1-k^{-1}))$$

из доказательства леммы 11 в [6] и оценку

$$(1-e^{-1})\sum_{i=k}^\infty F_i \lessapprox 1-\mathscr{F}(1-k^{-1}),$$

следующую из определения $1-\mathscr{F}(1-x^{-1})$ и определения e^x через предел последовательности, при $\beta > 1$ для некоторой постоянной $c > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}H(\varepsilon,Z(1)) &\le c\sum_k (1-\mathscr{F}(1-k^{-1}))k^{-1}(1-\mathscr{F}(1-k^{-1}))^{-1}\ln^{-\beta\varepsilon-1} k \\ &\quad + c\sum_{k=2}^\infty F_k \sum_{j=2}^k (1-\mathscr{F}(1-j^{-1}))^{-1}\frac{\ln^{-1-\varepsilon\beta} j}{j} \\ &= c\sum_k k^{-1}\ln^{-\beta\varepsilon-1} k + c\sum_{j=2}^\infty (1-\mathscr{F}(1-j^{-1}))^{-1}\frac{\ln^{-1-\varepsilon\beta} j}{j}\sum_{k=j}^\infty F_k < \infty. \end{aligned} \tag{20}$$

Из соотношений (17), (15) и теоремы 1Ф следует неравенство

$$\begin{aligned} H(\varepsilon,x) &\gtrapprox c\int_0^x K(\varepsilon,u)\,du \\ &\gtrapprox c\ln x K(\varepsilon,x)x^{-1+\varepsilon}\int_2^x u^{1-\varepsilon}\ln^{-1} u\,du \gtrapprox (2-\varepsilon)^{-1}cxK(\varepsilon,x). \end{aligned}$$

Последнее неравенство и предшествующая ему оценка (20) позволяют воспользоваться леммами 12 и 10 из [6], неравенством (25) из [6] и получить оценку

$$\mathbf{P}\{M(n) > x\} \leq \frac{\mathbf{E}H(\varepsilon, Z(n))}{H(\varepsilon, x)} \mathrel{\widetilde{\leq}} cn(xK(\varepsilon, x))^{-1},$$

что с учетом определения $K(\varepsilon, x)$ и допущения (9) приводит к соотношению

$$\int\limits_t^\infty \mathbf{P}\{M(n) > x\}\, dx \mathrel{\widetilde{\leq}} nc \int\limits_t^\infty x^{-1} \ln^{1-\beta(1-\varepsilon)} x\, dx.$$

Фиксируем некоторое $\gamma > \frac{\beta}{\beta-2}$ и последовательность t_{n^γ}, определенную согласно (5), тогда с учетом теоремы 1Ф и последнего неравенства правая часть неравенства из утверждения леммы 1 может быть оценена следующим образом:

$$U(t_{n^\gamma}) = \int\limits_{t_{n^\gamma}}^\infty \mathbf{P}\{M(n) > x\}\, dx \mathrel{\widetilde{\leq}} cn \ln^{2+\beta\varepsilon-\beta} t_{n^\gamma} \mathrel{\widetilde{\leq}} nc(An^{\gamma\beta^{-1}})^{2+\beta\varepsilon-\beta}. \tag{21}$$

При любом фиксированном $\gamma > \frac{\beta}{\beta-2}$ всегда можно подобрать $0 < \varepsilon < (\beta-1)\beta^{-1}$ такое, что $(\gamma\beta^{-1})(2 + \beta\varepsilon - \beta) < -1$. Для таких γ и ε оценка (21) превращается в $U(t_{n^\gamma}) = o(1)$. Тогда по леммам 1 и 3 получаем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}M(n)}{\ln n} \leq \gamma.$$

В силу произвольности $\gamma > \frac{\beta}{\beta-2}$ теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харрис Т.* Теория ветвящихся процессов. М.: Мир, 1966.
2. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.
3. *Lindval T.* On the maximum of a branching process // Scand. J. Statist. Theory Appl. 1976. V. 3. P. 209–214.
4. *Weiner H.* Moments of the maximum in critical branching processes // J. Appl. Probab. 1984. V. 21. P. 920–923.
5. *Borovkov K. A., Vatutin V. A.* On distribution tails and expectations of maxima in critical branching process // J. Appl. Probab. 1996. V. 33, N 3. P. 614–622.
6. *Ватутин В. А., Топчий В. А.* Максимум критических процессов Гальтона — Ватсона и непрерывные слева случайные блуждания // Теория вероятностей и ее применения. 1997. Т. 42, № 1. С. 21–34.
7. *Топчий В. А.* Свойства вероятности продолжения общих критических ветвящихся процессов при слабых ограничениях // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 5. С. 178–192.
8. *Sze M.* Markov processes associated with critical Galton — Watson processes with application to extinction probabilities // J. Adv. Appl. Probab. 1976. V. 8. P. 278–295.
9. *Реслер У., Ватутин В. А., Топчий В. А.* Условия сходимости для ветвящихся процессов с частицами, имеющими вес // Дискретная математика. 2000. Т. 12, № 1. С. 9–23.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.

Статья поступила 10 августа 2000 г.

Бондаренко Елена Михайловна
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН
ул. Певцова, 13, Омск 644099
bond@iitam.omsk.net.ru;

Топчий Валентин Алексеевич
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН
ул. Певцова, 13, Омск 644099
topchij@iitam.omsk.net.ru