Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2001. Том 42, № 2

УДК 519.21

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В ЗАДАЧЕ ДОСТИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ МНОГОМЕРНЫМ БЛУЖДАНИЕМ

А. А. Боровков, А. А. Могульский

Аннотация: Изучается асимптотическое поведение вероятности достижения многомерным случайным блужданием удаленной области. Эти задачи удалось решить благодаря выяснению в статьях А. А. Боровкова «О преобразованиях Крамера, больших уклонениях в граничных задачах и условном принципе инвариантности // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 3. С. 493–509» и «Об условных распределениях, связанных с большими уклонениями // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 4. С. 732–744» простого вероятностного смысла условных распределений для случайных блужданий и отыскания их явного вида в терминах преобразования Крамера. Библиогр. 24.

1. Введение. В 60–70-х гг. был достигнут существенный прогресс в изучении асимптотики распределений так называемых граничных функционалов от траектории *одномерного* случайного блуждания, т. е. функционалов, так или иначе связанных с *моментом* и *местом* первого прохождения (пересечения) заданной границы (см., например, [1–3]). Этому прогрессу в значительной степени способствовало то обстоятельство, что методом Винера — Хопфа удалось получить представления для двойных преобразований Лапласа (по времени и пространству) над распределениями изучаемых функционалов, связанных с пересечением *линейных* границ. Оказалось возможным асимптотически «обратить» эти двойные преобразования, получив при этом весьма полное описание асимптотического поведения изучаемых распределений, включая асимптотические разложения. Несколько позже многие из этих результатов удалось распространить на случай «*криволинейных границ*».

В *многомерном* случае положение дел существенно иное. Это связано прежде всего с тем, что аналитические подходы, сыгравшие важную роль в одномерном случае, для многомерных блужданий дают очень мало. Попытки использования аналитических методов касались лишь простейших блужданий (см. [4, 5]), но даже в этих случаях они не приводили к нужным результатам.

Тем не менее основные граничные задачи для *многомерных случайных блужданий* также удается решить. Это обстоятельство было обнаружено недавно (см. [6]). Суть его в том, что, как выяснено в [7, 8], вероятностная природа ряда условных распределений оказалась весьма простой. Рассмотрим, например, условную вероятность первого прохождения в окрестности точки x в заданный момент времени n удаленной гладкой поверхности при условии, что случайное

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99–01–00502, 99–01–00504, 00–15–96178) и INTAS (грант 99–01317).

блуждание в момент n «просто» находится в окрестности точки x. Асимптотика вероятности этого второго более простого события достаточно хорошо изучена (см., например, [9, 10]; там же см. более полную библиографию). Названная же условная вероятность оказывается асимптотически эквивалентной безусловной вероятности того, что траектория некоторого нового, но известного случайного блуждания никогда не коснется заданной гиперплоскости. Отыскание этой вероятности относится, по существу, к одномерным задачам и может быть осуществлено в явном виде с помощью аналитических методов, упомянутых выше.

Пусть ξ — невырожденный случайный вектор в $\mathbb{R}^d$, т. е. вектор, удовлетворяющий условию: *не существует плоскости* $L = L(\lambda, c) \equiv \{x : \langle\lambda, x\rangle = c\} \subset \mathbb{R}^d$ *такой, что*

$$\mathbf{P}(\xi \in L) = 1.$$

Это условие мы всюду будем предполагать выполненным.

Пусть случайные векторы $\{\xi(i)\}_{i=1}^{\infty}$ независимы и имеют общее распределение с вектором ξ. Обозначим $S(0) = 0$, $S(n) = \xi(1) + \cdots + \xi(n)$. Наиболее типичные граничные задачи для многомерных блужданий состоят в следующем.

Рассмотрим фиксированное множество $V \subseteq \mathbb{R}^d$, замыкание которого $[V]$ не содержит начала координат, и будем изучать распределения, связанные с моментом и местом первого попадания траектории $\{S(n)\}_{n=1}^{\infty}$ в множество tV, когда $t \to \infty$. Момент первого попадания в множество tV обозначим через

$$\eta = \eta(tV) \equiv \min\{n \ge 1 : S(n) \in tV\};$$

если $S(n) \notin tV$ для всех $n \ge 1$, то положим $\eta(tV) = \infty$.

Определим также случайный вектор

$$\chi = \chi(tV) \equiv \xi(\eta)(1 - p),$$

где $p = \inf\{u \in (0, 1] : S(\eta-1) + u\xi(\eta) \in tV\}$. Случайный вектор χ можно назвать *величиной первого вхождения в множество* tV или, по аналогии с одномерным случаем, *величиной первого перескока границы* $t\Gamma$ множества tV. Положение траектории $S(n)$ в момент первого попадания в tV есть вектор $S(\eta(tV))$, который мы представим в виде суммы

$$S(\eta(tV)) = \theta(tV) + \chi(tV),$$

где $\theta(tV) = S(\eta - 1) + p\xi(\eta)$ — точка на границе $t\Gamma$ множества tV, в которой блуждание «впервые пересекло» границу $t\Gamma$.

Таким образом, тройка

$$(\eta(tV), \theta(tV), \chi(tV))$$

определяет момент, место и величину первого вхождения в множество tV блуждания $S(n)$. Названные случайные величины на множестве $\eta = \infty$ не определены. В их определении присутствует некоторая условность, связанная с подразумеваемой «прямолинейностью» движения от точки $S(\eta - 1)$ до точки $S(\eta)$. Вместо (η, θ, χ) можно было бы рассмотреть также в известном смысле эквивалентную тройку величин $(\eta, \hat\theta, \hat\xi)$, где $\hat\theta \equiv S(\eta)$, $\hat\xi \equiv \xi(\eta) = S(\eta) - S(\eta - 1)$, в определении которых упомянутая условность отсутствует. Однако формулировки утверждений для тройки (η, θ, χ) оказались несколько более простыми и наглядными. По этой причине, а также следуя определенным традициям в граничных задачах, мы на ней и остановимся. Отметим также, что $S(\eta)$ и χ существенно зависимы. Например, если Γ — гиперплоскость, ортогональная вектору N, то $\langle S(\eta)-x, \mathrm{N}\rangle = \langle \chi, \mathrm{N}\rangle$, где x — какая-нибудь точка на поверхности $t\Gamma$.

Предельные теоремы для распределения $(2d+1)$-мерного вектора

$$(\eta, \theta, \chi)$$

и его отдельных компонент и составляют существо граничных задач для многомерных случайных блужданий. Эти задачи могут иметь, конечно, и несколько иную форму, как, например, известная задача о времени и месте прохождения случайным блужданием $\{x + S(n)\}_{n=0}^{\infty}$ границы положительного ортанта $\mathbb{R}^{d+} = \{\alpha \in \mathbb{R}^d : \alpha_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, d\}$ при x, принадлежащем внутренности $(\mathbb{R}^{d+})$ ортанта $\mathbb{R}^{d+}$, $|x| \to \infty$ (см., например, [11]).

При этом мы, как правило, будем оставлять в стороне «собственные предельные распределения» для нормированных (η, θ) в случае $a = \mathbf{E}\xi = 0$, которые могут быть найдены с помощью диффузионной аппроксимации (в этом направлении имеется значительное количество работ (см., например, [12–16]).

Наша основная цель — изучение вероятностей больших уклонений, т. е. асимптотики вероятностей вида $\mathbf{P}(\eta \in A, \theta \in B)$, когда либо множество B значительно удалено от луча $\{\alpha = au, u \geq 0\}$, либо множество A значительно удалено от значения $m = \frac{|x|}{|a|}$, где x — точка пересечения границы $t\Gamma$ множества tV с лучом $\{\alpha = au, u \geq 0\}$ $(a \neq 0)$. В этом случае рассматриваемые вероятности будут сходиться к нулю. В таких задачах мы, как правило, будем предполагать выполненным так называемое первое условие Крамера об экспоненциальном убывании $\mathbf{P}(|\xi| > t)$. Для полноты картины в ряде случаев мы будем изучать и собственные предельные распределения, когда только что названные свойства множеств A и B не выполнены, $|a| \neq 0$. В этом случае условия Крамера не требуется.

Основные утверждения работы мы поместили в п. 2 (случай, когда блуждание посещает множество tV с вероятностью, близкой к 1), п. 3 (локальные теоремы для η, θ, χ) и п. 4 (интегральные теоремы по η). Доказательства основных утверждений приведены в пп. 5, 6. В п. 7 (приложение) рассматривается ряд вспомогательных утверждений. Среди них: (а) равномерный вариант теоремы восстановления для функции восстановления «с запретом»; (б) формулировки нескольких интегролокальных теорем, полученных в работах [7, 8, 10], которым мы придали форму, удобную для применения в настоящей работе.

2. Время и место первого попадания в множество tV в случае, когда $a = \mathbf{E}\xi \neq 0$ и луч $\{ua : u \geq 0\}$ пересекает множество V. Условимся через $[V]$ и (V) обозначать замыкание и внутренность множества $V \subseteq \mathbb{R}^d$. Тогда граница множества V определяется как $\Gamma = [V] \setminus (V)$.

В дальнейшем символом e мы будем обозначать векторы единичной длины; скажем, для вектора $\alpha \neq 0$ положим

$$\mathrm{e}(\alpha) = \frac{\alpha}{|\alpha|}.$$

Обозначим через $\Gamma(z) = z \inf\{u > 0 : uz \in \Gamma\}$ точку первого пересечения границы Γ с лучом $\{uz : u > 0\}$, если такое пересечение происходит. Тогда $|\Gamma(z)|$ — расстояние от начала координат до множества Γ по лучу $\{uz : u > 0\}$

(в случае, когда этот луч не пересекает множества Γ, положим по определению $|\Gamma(z)| = \infty$). Ясно, что $v = t\Gamma(z)$ будет точкой пересечения этого луча с границей $t\Gamma$ множества tV, $\Gamma(cz) = \Gamma(z)$.

Символами c, C с индексами или без будем обозначать различные постоянные, не всегда одни и те же, если они присутствуют в разных формулах. Для $\varepsilon > 0$ через $U_\varepsilon(x)$ и $U_\varepsilon(A)$ будем обозначать ε-окрестности точки $z \in \mathbb{R}^d$ и множества $A \subseteq \mathbb{R}^d$ соответственно.

Нам понадобится следующее условие гладкости границы Γ множества V в окрестности точки $\Gamma(z)$) (при $z = a$ в этом пункте).

$(D_1(z))$. *Функция* $|\Gamma(\mathrm{e})| > 0$ *в некоторой окрестности* $\mathrm{e}(z)$ *удовлетворяет условию Липшица:*

$$\big|\,|\Gamma(\mathrm{e}')| - |\Gamma(\mathrm{e}'')|\,\big| \le c|\mathrm{e}' - \mathrm{e}''|$$

для $\mathrm{e}', \mathrm{e}'' \in U_\varepsilon(\mathrm{e}(z))$, $\varepsilon > 0$, $c < \infty$.

Заметим, что вместо $(D_1(z))$ можно рассматривать также следующее близкое к нему условие.

$(D_1^*(z))$. *В некоторой окрестности точки* $\Gamma(\mathrm{e}(z))$ *поверхность* Γ *непрерывна* (*функция* $\Gamma(\mathrm{e})$ *непрерывна*)*; п. в. в этой окрестности поверхность* Γ *дифференцируема, т. е. существует матрица* $\Gamma'(\mathrm{e})$ *с элементами*

$$\gamma_{i,j}(\mathrm{e}) = \frac{\partial \Gamma_i(\mathrm{e})}{\partial \mathrm{e}_j},$$

и при этом

$$|\gamma_{i,j}(\mathrm{e})| \le C, \quad \langle z, \mathrm{N}_{\Gamma(\mathrm{e})}\rangle \ge \delta, \tag{1}$$

где $C < \infty$, $\delta > 0$, $\mathrm{e} \in U_\varepsilon(\mathrm{e}(z))$, $\mathrm{N}_{\Gamma(\mathrm{e})}$ *— единичная нормаль к поверхности* Γ *в точке* $\Gamma(\mathrm{e})$, *направленная внутрь множества* V, e_j, $j = 1, \dots, d$, *— координаты вектора* e. *Кроме того, для п. в. точек* e', e'' *из окрестности* $U_\varepsilon(\mathrm{e}(z))$ *функция* $f(t) = \Gamma(\mathrm{e}' + t(\mathrm{e}'' - \mathrm{e}'))$ *абсолютно непрерывна на отрезке* $[0, 1]$.

Условие $(D_1^*(z))$ влечет за собой условие $(D_1(z))$. Действительно, для п. в. e', e'' имеем

$$\Gamma(\mathrm{e}'') - \Gamma(\mathrm{e}') = f(1) - f(0) = \int\limits_0^1 f'(u)\,du.$$

Поэтому в силу первого неравенства в (1) при $\mathrm{e}', \mathrm{e}'' \in U_\varepsilon(\mathrm{e}(z))$ верно неравенство

$$|\Gamma(\mathrm{e}'') - \Gamma(\mathrm{e}')| \le C|\mathrm{e}'' - \mathrm{e}'|.$$

Отсюда и из второго неравенства в (1) следует условие $(D_1(z))$.

Обозначим через ζ гауссовский случайный вектор с нулевым средним и ковариационной матрицей B, где $B = B_\xi$ — ковариационная матрица вектора ξ.

Обозначим через L плоскость

$$L = L(a, 0) \equiv \{\alpha : \langle \alpha, a\rangle = 0\},$$

ортогональную вектору a, а через $\mathscr{P}^L$ — оператор проектирования на L, так что

$$z \equiv \mathscr{P}^L z + \mathrm{e}\langle \mathrm{e}, z\rangle \quad \text{при} \quad \mathrm{e} = \mathrm{e}(a)$$

для любого $z \in \mathbb{R}^d$.

Для двух случайных векторов $\beta^{(1)}$ и $\beta^{(2)}$, заданных, вообще говоря, на разных вероятностных пространствах, будем писать

$$\beta^{(1)} \underset{D}{=} \beta^{(2)},$$

если распределения этих векторов совпадают.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty$, $a = \mathbf{E}\xi \neq 0$ *и выполнено условие* $(D_1(a))$. *Тогда верно представление*

$$(\eta(tV), \theta(tV)) \underset{D}{=} (\eta^*, \theta^*), \tag{2}$$

$$\eta^* = \frac{t}{|a|}\left|\Gamma\left(a + \frac{1}{\sqrt{m}}\mathscr{P}^L\zeta\right)\right| - \frac{\sqrt{m}}{|a|}\langle \mathrm{e}(a), \zeta\rangle + \varepsilon^{(1)}(t)\sqrt{t},$$

$$\theta^* = t\Gamma\left(a + \frac{1}{\sqrt{m}}\mathscr{P}^L\zeta\right) + \varepsilon^{(2)}(t)\sqrt{t} \in t\Gamma,$$

где $m = t\frac{|\Gamma(a)|}{|a|}$ *и при* $t \to \infty$

$$|\varepsilon^{(i)}(t)| \underset{P}{\to} 0, \quad i = 1, 2.$$

Первое слагаемое в главной части η^* определяет время, затраченное при детерминированном прямолинейном движении со скоростью $|a|$ от начала координат до точки $t\Gamma\big(a + \frac{1}{\sqrt{m}}\mathscr{P}^L\zeta\big)$. Второе слагаемое отражает влияние разброса, возникающее от замены этого движения движением со случайными скачками $\langle \mathrm{e}(a), \xi\rangle$ по тому же направлению. Значение $m = t\frac{|\Gamma(a)|}{|a|}$ есть время, затраченное на детерминированное движение от 0 до точки $t\Gamma(a)$.

Для случайных векторов $\beta^{(t)}, \beta$ будем писать

$$\beta^{(t)} \Longrightarrow \beta$$

при $t \to \infty$, если распределения $\beta^{(t)}$ слабо сходятся к распределению β.

Рассмотрим наряду с условием $(D_1(z))$ условие

$(D_{1+}(z))$**.** *Граница* Γ *в окрестности точки* $\Gamma(\mathrm{e}(z))$ *непрерывно дифференцируема. Под этим мы будем понимать, что функция* $\Gamma(\mathrm{e})$ *в окрестности точки* $\mathrm{e}(z)$ *непрерывно дифференцируема.*

Если выполнено условие $(D_{1+}(z))$, то в некоторой окрестности точки $\Gamma(\mathrm{e}(z))$ определен единичный вектор нормали $\mathrm{N}_{\Gamma(\mathrm{e}(z))}$ (мы будем считать его направленным внутрь множества V) и выполнены неравенства (1), так что условие $(D_{1+}(z))$ влечет за собой условия $(D_1^*(z))$, $(D_1(z))$.

Пусть выполнено условие $(D_{1+}(a))$. Положим для краткости $\mathrm{N}_{\Gamma(a)} = \mathrm{N}$. Если вектор N коллинеарен вектору a, то

$$t\Gamma\left(a + \frac{1}{\sqrt{m}}z\right) = t\Gamma(a) + o(\sqrt{m}),$$

и в качестве следствия из теоремы 1 мы получаем хорошо известный «одномерный» результат

$$\eta(tV) \underset{D}{=} m - \frac{\sqrt{m}}{|a|}\langle \mathrm{e}(a), \zeta\rangle + o(\sqrt{m}).$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда нормаль N не обязательно коллинеарна a. Касательная плоскость T к поверхности Γ в точке $\Gamma(a)$ задается соотношением

$$T = \{\alpha : \langle \mathrm{N}, \alpha - \Gamma(a)\rangle = 0\}.$$

Рассмотрим точку

$$T(z) = zu_0, \quad u_0 = \inf\{u : uz \in T\}$$

пересечения лучом $\{\alpha = uz : u > 0\}$ поверхности T. Без труда находим

$$T(z) = z\frac{\langle \mathrm{N}, \Gamma(a)\rangle}{\langle \mathrm{N}, z\rangle},$$

$$T\left(a + \frac{1}{\sqrt{m}}z\right) = \Gamma(a) + \frac{z}{\sqrt{m}}\frac{m}{t} - \frac{\Gamma(a)}{\sqrt{m}}\frac{\langle \mathrm{N}, z\rangle}{\langle \mathrm{N}, a\rangle}.$$

Поскольку при $m \to \infty$

$$\Gamma\left(a + \frac{1}{\sqrt{m}}\mathscr{P}^L\zeta\right) = T\left(a + \frac{1}{\sqrt{m}}\mathscr{P}^L\zeta\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right),$$

мы доказали

Следствие 1.1. *Пусть выполнено условие* $(D_{1+}(a))$, *где* $a = \mathbf{E}\xi \neq 0$. *Тогда при* $t \to \infty$

$$\left(\frac{\eta(tV) - m}{\sqrt{m}}, \frac{\theta(tV) - x}{\sqrt{m}}\right) \Longrightarrow \left(-\frac{1}{|a|}\frac{\langle \mathrm{N}, \zeta\rangle}{\langle \mathrm{N}, \mathrm{e}(a)\rangle}, \zeta - \mathrm{e}(a)\frac{\langle \mathrm{N}, \zeta\rangle}{\langle \mathrm{N}, \mathrm{e}(a)\rangle}\right), \tag{3}$$

где $x = t\Gamma(a)$.

Таким образом, при выполнении условия $(D_{1+}(a))$ совместное распределение для η и θ является *асимптотически нормальным.* При невыполнении условия $(D_{1+}(a))$ это, вообще говоря, не так.

Рассмотрим теперь более внимательно вектор $\frac{\theta(tV)-x}{\sqrt{m}}$ в левой части (3). Если граница Γ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $\Gamma(a)$, то этот вектор допускает явное ортогональное разложение на компоненты, одна из которых лежит в плоскости $L(\mathrm{N}, 0) = T - \Gamma(a)$, другая — вдоль вектора N. Очевидно, что для компоненты $\frac{\mathscr{P}^{L(\mathrm{N},0)}(\theta(tV)-x)}{\sqrt{m}}$, лежащей в $L(\mathrm{N}, 0)$, сохранится уже полученное в следствии 1.1 утверждение (3):

$$\frac{\mathscr{P}^{L(\mathrm{N},0)}(\theta(tV) - x)}{\sqrt{m}} \Longrightarrow \zeta - \mathrm{e}(a)\frac{\langle \mathrm{N}, \zeta\rangle}{\langle \mathrm{N}, \mathrm{e}(a)\rangle}.$$

Для отыскания второй компоненты заметим, что в силу (2)

$$\theta \underset{D}{=} t\Gamma\left(a + \frac{1}{\sqrt{m}}\mathscr{P}^L\zeta\right) + o(1)\sqrt{t} \in t\Gamma.$$

Если граница Γ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $\Gamma(a)$ и для $z \in \mathbb{R}^d$ вектор $t\Gamma(a + \frac{1}{\sqrt{t}}\mathscr{P}^L z) + \sqrt{t}o(1)$ лежит на границе $t\Gamma$, то

$$\begin{aligned} t\Gamma\left(a + \frac{1}{\sqrt{t}}\mathscr{P}^L z\right) + \sqrt{t}o(1) &= t\Gamma\left(a + \frac{1}{\sqrt{t}}\mathscr{P}^L(z + o(1)\right) \\ &= t\Gamma(a) + \sqrt{t}(1 + o(1))(z - z^{(1)}) + (1 + o(1))\mathrm{N}(z - z^{(1)})\frac{R}{2}(z - z^{(1)})^T, \end{aligned}$$

где

$$z^{(1)} = \mathrm{e}(a)\frac{\langle \mathrm{N}, z\rangle}{\langle \mathrm{N}, \mathrm{e}(a)\rangle},$$

R — матрица кривизны для поверхности Γ в точке $\Gamma(a)$, N — единичный вектор нормали к поверхности Γ в точке $\Gamma(a)$. Поскольку вектор $z - z^{(1)}$ ортогонален вектору N, для $x = t\Gamma(a)$, $t\Gamma(a + \frac{1}{\sqrt{t}}\mathscr{P}^L z) + \sqrt{t}o(1) \in t\Gamma$ верно равенство

$$\left\langle \mathrm{N}, \left(t\Gamma(a + \frac{1}{\sqrt{t}}\mathscr{P}^L z) + \sqrt{t}o(1) - x\right)\right\rangle = (1 + o(1))\mathrm{N}(z - z^{(1)})\frac{R}{2}(z - z^{(1)})^T,$$

и мы доказали

Следствие 1.2. *Пусть выполнено условие $(D_{1+}(a))$, где $a = \mathbf{E}\xi \neq 0$ и, кроме того, поверхность Γ в некоторой окрестности точки $\Gamma(a)$ дважды непрерывно дифференцируема. Тогда при $t \to \infty$*

$$\left(\frac{\eta(tV)-m}{\sqrt{m}}, \frac{\mathscr{P}^{L(\mathrm{N},0)}(\theta(tV)-x)}{\sqrt{m}}, \langle \mathrm{N}, \theta(tV)-x\rangle\right)$$
$$\Longrightarrow \left(-\frac{1}{|a|}\langle \mathrm{e}(a), \zeta^{(1)}\rangle, \quad \zeta-\zeta^{(1)}, \quad (\zeta-\zeta^{(1)})\frac{|\Gamma(a)|R}{2|a|}(\zeta-\zeta^{(1)})^T\right),$$

где $\zeta^{(1)} = \mathrm{e}(a)\frac{\langle \mathrm{N},\zeta\rangle}{\langle \mathrm{N},\mathrm{e}(a)\rangle}$.

Приведем теперь утверждение об оценке «хвоста» распределения длины $|\chi|$ вектора первого вхождения $\chi(tV)$ блуждания $S(n)$ в множество tV.

Для измеримого множества $W \subset \mathbb{R}^d$ определим меру (функцию) восстановления

$$H(W) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S(n) \in W),$$

где $S(0) = 0$. Пусть

$$\tau(W) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{\{S(n)\in W\}}$$

— время, которое блуждание $S(n)$ провело в множестве U. Очевидно, что

$$H(W) = \mathbf{E}\tau(W).$$

Обозначим для $k = 1, 2, \ldots$

$$A_k(W) = U_k(W) \setminus U_{k-1}(W),$$

где для $\varepsilon > 0$, как и ранее, множество $U_\varepsilon(W)$ есть ε-окрестность множества W, $U_0(W) = W$. Положим

$$h(W) = \sup_{k\geq 1} H(A_k(W))$$

и обозначим через

$$\pi(u) = \int_u^{\infty} \mathbf{P}(|\xi| > v)dv$$

«двойной хвост» распределения случайной величины $|\xi|$.

Для $z \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$ введем в рассмотрение конус

$$C(\varepsilon, z) = z + \{v \in \mathbb{R}^d : |\mathrm{e}(v) - \mathrm{e}(a)| \leq \varepsilon\}$$

с вершиной в точке z и с «углом» 2ε около луча $\{v = z + ta : \ t \geq 0\}$.

Теорема 2. I. *Для любого $u \geq 0$*

$$\mathbf{P}(|\chi(tV)| > u; \ \eta(tV) < \infty) \leq h(tV)\pi(u). \tag{4}$$

Если граница множества Γ есть плоскость $L(\mathrm{N}, c) \equiv \{v \in \mathbb{R}^d : \langle \mathrm{N}, v\rangle = c\}$, и при этом $\langle \mathrm{N}, a\rangle > 0$, то в определении $\pi(u)$ вероятность $\mathbf{P}(|\xi| > v)$ можно заменить вероятностью $\mathbf{P}(|\xi| > v, \langle \mathrm{N}, \xi\rangle > 0)$.

II. *Пусть множество V таково, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и для любого $v \in V$*

$$C(\varepsilon, v) \subseteq V. \tag{5}$$

Тогда для любых $t \ge 0$

$$\mathbf{P}(\eta(tV) < \infty) = 1, \quad h(tV) \le \bar{h} \equiv H(C^c(\varepsilon, \Gamma(a))) < \infty. \tag{6}$$

Таким образом, при выполнении (4) *при всех* $u \ge 0$, $t \ge 0$

$$\mathbf{P}(|\chi(tV)| > u) \le \bar{h}\pi(u). \tag{7}$$

Пусть единичный вектор N таков, что $\langle \mathrm{N}, a\rangle > 0$. Тогда очевидно, что множество $V = \{v \in \mathbb{R}^d : \langle \mathrm{N}, v\rangle \ge c\}$, ограниченное плоскостью $L(\mathrm{N}, c)$, удовлетворяет условию (5).

Отметим, что в части II теоремы 2 рассматриваются множества V, для которых выполнено некоторое условие «во всех точках границы» Γ. Если же ограничиться лишь условиями «на часть точек границы» Γ, то получить в общем случае равномерное по $t > 0$ неравенство

$$\mathbf{P}(|\chi(tV)| > u) \le C\pi(u), \quad C < \infty,$$

верное при всех $u > 0$, не удастся. В этом можно убедиться, рассмотрев в $\mathbb{R}^2$ множество $V = \{\alpha : \alpha_1 \ge 1,\ \alpha_2 \ge -v\}$, $v > 0$. Если $a = \mathbf{E}\xi = (1, 0)$, то очевидно, что с положительной вероятностью $p(t)$ первое вхождение в множество tV осуществится через «горизонтальный участок границы». Поскольку в ортогональном к a направлении случайный вектор ξ имеет нулевое среднее, то оценить «хвост» распределения перескока через горизонтальную границу удастся только с помощью «тройного хвоста распределения» (см. [17])

$$\bar{\pi}(u) = \int_u^\infty \pi(v)\,dv.$$

В этом случае удается получить лишь неравенства вида

$$\mathbf{P}(|\chi(tV)| > u) \le C(\pi(u) + p(t)\bar{\pi}(u)), \quad C < \infty.$$

Ясно, что полученное неравенство слабее утверждения (7). Если же не стремиться получить равномерное по $t > 0$ неравенство, то можно ограничиться следующими условиями на границу в окрестности точки $\Gamma(a)$.

Следствие 2.1. *Пусть множество* V *удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Тогда для любого фиксированного* $u \ge 0$ *выполняется неравенство*

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbf{P}(|\chi(tV)| > u) \le \bar{h}\pi(u),$$

где $\bar{h} \equiv H(C^c(\varepsilon, \Gamma(a))) < \infty$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Всегда можно считать, что для некоторого $\delta > 0$ часть $\Gamma_\delta = \Gamma \cap U_\delta(\Gamma(a))$ границы Γ совпадает с частью границы Γ' множества V' из класса $\mathscr{K}(\varepsilon)$:

$$\Gamma_\delta = \Gamma' \cap U_\delta(\Gamma(a)).$$

Из теоремы 1 следует, что на множестве $A(t)$, вероятность которого стремится к 1, функционалы $\chi(tV)$ и $\chi(tV')$ совпадают. Поэтому

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbf{P}(|\chi(tV)| > u) = \limsup_{t\to\infty} \mathbf{P}(|\chi(tV')| > u).$$

Осталось воспользоваться неравенством (7).

Если граница Γ в окрестности точки $\Gamma(a)$ непрерывно дифференцируема, то утверждение теоремы 1 можно дополнить утверждением о существовании предельного распределения для вектора $\chi(tV)$ величины первого вхождения в множество tV.

Нам понадобятся следующие обозначения. Пусть, как и прежде, N — единичный вектор нормали к границе Γ в точке $\Gamma(a)$. Для $u \geq 0$ определим вероятность
$$p(u) \equiv \mathbf{P}(\inf_{k\geq 0}\langle \mathrm{N}, S(k)\rangle \geq -u),$$
которая положительна при всех $u \geq 0$, если $\langle \mathrm{N}, a\rangle > 0$ (см., например, [18]). Введем в рассмотрение распределения
$$F(u,dw) = \mathbf{P}\biggl(\Bigl(1-\frac{u}{\langle \mathrm{N},\xi\rangle}\Bigr)\xi \in dw/\langle \mathrm{N},\xi\rangle > u\biggr).$$
Это распределения вектора $\chi(W)$ вхождения в множество $W = (\Pi(\mathrm{N},u))$ блуждания $S(n)$, $n = 0,1,\ldots$, при условии, что вхождение осуществится на первом шаге, где, как и прежде, $(\Pi(\mathrm{N},u)) \equiv \{v \in \mathbb{R}^d : \langle \mathrm{N}, v\rangle > u\}$ — открытое полупространство, ограниченное плоскостью с нормалью N.

Теорема 3. *Пусть $a = \mathbf{E}\xi \neq 0$, выполнено условие $(D_{1+}(a))$ и случайная величина $\xi^{(v)} \equiv \langle v,\xi\rangle$ в некоторой окрестности точки N является нерешетчатой. Тогда имеет место слабая сходимость распределений при $t \to \infty$:*
$$\mathbf{P}(\chi(tV) \in dw) \Longrightarrow \frac{1}{\langle \mathrm{N},a\rangle}\int\limits_{u=0}^{\infty} p(u)F(u,dw)\,du. \tag{8}$$

Следствие 3.1. *В условиях теоремы 3 выполняется равенство*
$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(\langle \mathrm{N}, \chi(tV)\rangle > s) = \frac{1}{\mathbf{E}\xi_+^{(\mathrm{N})}}\int\limits_s^{\infty}\mathbf{P}\bigl(\xi_+^{(\mathrm{N})} > t\bigr)\,dt,$$
где $\xi_+^{(\mathrm{N})}$ — первая положительная сумма в блуждании $\langle \mathrm{N}, S(n)\rangle$, $n = 0,1,\ldots$.

Иначе говоря, предел для распределения $\mathbf{P}(\langle \mathrm{N},\chi(tV)\rangle \in dw)$ совпадает с распределением перескока через бесконечно удаленный барьер одномерного блуждания $\langle \mathrm{N}, S(n)\rangle$, $n = 0,1,\ldots$ (см., например, [19]).

Из следствий 1.1, 1.2 и теоремы 3 вытекает

Следствие 3.2. *В условиях теоремы 3 при $t \to \infty$*
$$\biggl(\frac{\eta(tV)-m}{\sqrt{m}}, \frac{(\theta(tV)-x)}{\sqrt{m}}, \chi(tV)\biggr) \Longrightarrow \biggl(-\frac{1}{|a|}\langle \mathrm{e}(a), \zeta^{(1)}\rangle, \zeta-\zeta^{(1)}, \hat{\chi}\biggr),$$
где $\zeta^{(1)} = a\frac{\langle \mathrm{N},\zeta\rangle}{\langle \mathrm{N},a\rangle}$, случайный вектор $\hat{\chi}$ имеет распределение, стоящее в правой части (8), и не зависит от гауссовского вектора ζ. Если, кроме того, поверхность Γ в некоторой окрестности точки $\Gamma(a)$ дважды непрерывно дифференцируема, то полученное утверждение можно дополнить разложением для $\theta(tV)-x$ в следствии 1.2: при $t \to \infty$
$$\biggl(\frac{\eta(tV)-m}{\sqrt{m}}, \frac{\mathscr{P}^{L(\mathrm{N})}(\theta(tV)-x)}{\sqrt{m}}, \langle \mathrm{N}, \theta(tV)-x\rangle, \chi(tV)\biggr)$$
$$\Longrightarrow \biggl(-\frac{1}{|a|}\langle \mathrm{e}(a), \zeta^{(1)}\rangle,\ \zeta-\zeta^{(1)}, (\zeta-\zeta^{(1)})\frac{|\Gamma(a)|R}{2|a|}(\zeta-\zeta^{(1)})^T, \hat{\chi}\biggr).$$

3. Локальные теоремы для η, θ, χ при произвольном взаимном расположении вектора $a = \mathbf{E}\xi$ и множества V. В этом пункте будем предполагать, что выполняется следующее так называемое *первое условие Крамера.*

(C_1). *Функция $\varphi(\lambda) \equiv \mathbf{E}e^{\langle\lambda,\xi\rangle}$ аналитична в окрестности некоторой точки $\lambda_0 \in \mathbb{R}^d$, т. е.*

$$\sup_{|\lambda-\lambda_0|\le\delta} \varphi(\lambda) < \infty$$

для некоторого $\delta > 0$.

Обозначим через $\Omega = \{\lambda : \varphi(\lambda) < \infty\}$ выпуклое множество, где функция $\varphi(\lambda)$ конечна. Условие (C_1) означает, что внутренность (Ω) множества Ω непуста.

Преобразованием Крамера F_λ над распределением F в точке $\lambda \in \Omega$ называется распределение

$$F_\lambda(U) = \frac{\mathbf{E}(e^{\langle\lambda,\xi\rangle}; \xi \in U)}{\varphi(\lambda)}, \quad U \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Функцией уклонений $\Lambda(\alpha)$ для случайного вектора ξ (распределения F) называют преобразование Лежандра над функцией $A(\lambda) = \ln\varphi(\lambda)$:

$$\Lambda(\alpha) = \sup_\lambda\{\langle\lambda,\alpha\rangle - A(\lambda)\}. \tag{9}$$

Вероятностный смысл функции уклонений определяет соотношение

$$\Lambda(\alpha) = -\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}\biggl(\frac{S(n)}{n} \in U_\varepsilon(\alpha)\biggr),$$

где $U_\varepsilon(\alpha)$ — ε-окрестность точки α.

Обозначим через

$$\Delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : x_i \le y_i < x_i + \Delta,\ i = 1,\dots,d\}$$

куб со стороной $\Delta > 0$ и вершиной в точке x. Тогда в точках непрерывности функции $\Lambda(\alpha)$ выполняется равенство [10]

$$\Lambda(\alpha) = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}(S(n) \in \Delta(x)), \tag{10}$$

где $\frac{x}{n} \to \alpha$, $\Delta = o(n)$, $\Delta > \Delta_0$, константа $\Delta_0 \ge 0$ зависит только от распределения F.

Введем условие на характеристическую функцию $f(t) = \varphi(it)$, $t \in \mathbb{R}^d$ (так называемое *второе условие Крамера*).

(C_2). *Имеет место соотношение*

$$\limsup_{t\in\mathbb{R}^d, |t|\to\infty} |f(t)| < 1.$$

Если выполнено условие (C_2), то в (10) число Δ можно считать произвольным фиксированным или достаточно медленно сходящимся к 0.

Точку $\lambda \in \mathbb{R}^d$, в которой достигается максимум в определении (9), обозначим через $\lambda(\alpha)$. Таким образом,

$$\Lambda(\alpha) = \langle\lambda(\alpha),\alpha\rangle - A(\lambda(\alpha)),$$

и при этом выполнено (см., например, [20])

$$\lambda(\alpha) = \Lambda'(\alpha) \equiv \operatorname{grad} \Lambda(\alpha).$$

Обозначим

$$\mathscr{A}' = \{\alpha = A'(\lambda) \equiv \operatorname{grad} A(\lambda) : \lambda \in (\Omega)\};$$

для $\alpha \in \mathscr{A}'$ функция $\lambda(\alpha)$ является единственным решением уравнения

$$A'(\lambda) = \alpha.$$

Распределение F_λ при $\lambda = \lambda(\alpha)$ обозначим через $F^{(\alpha)}$, а случайную величину с этим распределением — через $\xi^{(\alpha)}$. Известно (см., например, [20]), что для $\alpha \in \mathscr{A}'$ верны равенства

$$\mathbf{E}\xi^{(\alpha)} = \alpha, \quad B(\alpha) \equiv \mathbf{E}(\xi^{(\alpha)} - \alpha)^T(\xi^{(\alpha)} - \alpha) = (\Lambda''(\alpha))^{-1}.$$

Таким образом, $F^{(\alpha)}$ — преобразование Крамера со средним α.

Для формулировки основных утверждений нам понадобится еще ряд обозначений. Пусть x — какая-нибудь точка границы $t\Gamma$ множества tV. Ниже мы будем изучать асимптотику вероятностей

$$\mathbf{P}(\eta(tV) = n,\ S(n) \in x + W)$$

в предположении, что поверхность Γ удовлетворяет условию $(D_{1+}(\alpha))$, $\alpha = \frac{x}{n} \in \mathscr{A}'$. Будем предполагать в дальнейшем, что $\alpha \in \mathscr{A}'$.

Пусть $\mathrm{N} = \mathrm{N}_{\Gamma(\alpha)}$ — единичная нормаль к поверхности Γ в точке $\Gamma(\alpha) \in \Gamma$ (или к поверхности $t\Gamma$ в точке x; заметим, что $\frac{x}{t} \in \Gamma$, и, стало быть, при $\mathrm{e}(\alpha) \to \mathrm{e}_0$ выполняется $\frac{x}{t} \to \Gamma(\mathrm{e}_0) = \mathrm{const}$). Напомним, что в $\mathbb{R}^d$ мы определили полупространство

$$\Pi(\mathrm{N}) = \Pi(\mathrm{N}, 0) \equiv \{v : \langle \mathrm{N}, v\rangle \le 0\},$$

которое расположено «снизу» от касательной плоскости $L(\mathrm{N}) = L(\mathrm{N}, 0) \equiv \{v \in \mathbb{R}^d : \langle \mathrm{N}, v\rangle = 0\}$ к поверхности $t\Gamma - x$ в точке 0. «Выше» $L(\mathrm{N})$ лежит открытое полупространство $\Pi^c(\mathrm{N}) = \{v : \langle \mathrm{N}, v\rangle > 0\}$.

Для $\alpha \in \mathscr{A}'$ введем в рассмотрение функцию

$$p_\alpha = p_\alpha(z) \equiv \mathbf{P}(\inf_{n\ge 1} \langle \mathrm{N}, S^{(\alpha)}(n)\rangle \ge \langle \mathrm{N}, z\rangle),$$

где $\mathrm{N} = \mathrm{N}_{\Gamma(\alpha)}$, $S^{(\alpha)}(n) = \xi^{(\alpha)}(1) + \dots + \xi^{(\alpha)}(n)$, и независимые слагаемые $\xi^{(\alpha)}(i)$ имеют общее распределение $F^{(\alpha)}$. Известно (см., например, [18]), что если $\langle \mathrm{N}, \alpha\rangle > 0$, то значение $p_\alpha(z)$ положительно для всех $z \in \Pi(\mathrm{N})$.

Для $\alpha \in \mathscr{A}'$ определим σ-конечную меру $Q(\alpha) = Q(\alpha, W)$ с носителем в $\Pi^c(\mathrm{N})$, положив для борелевского множества $W \subseteq \Pi^c(\mathrm{N})$

$$Q(\alpha, W) = \frac{1}{\varphi(\lambda(\alpha))} \int\limits_{z \in \Pi(\mathrm{N})} e^{-\langle \lambda(\alpha), z\rangle} p_\alpha(z) \mathbf{P}(z + \xi \in W)\, dz. \tag{11}$$

Как будет доказано ниже (см. доказательство теоремы 4), для $W \subseteq \Pi^c(\mathrm{N})$ справедливо тождество

$$Q(\alpha, W) \equiv \int\limits_W e^{-\langle \lambda(\alpha), w\rangle} q_\alpha(w)\, dw, \quad q_\alpha(w) = \int\limits_{\Pi(\mathrm{N})} p_\alpha(v) \mathbf{P}(w - \xi^{(\alpha)} \in dv), \tag{12}$$

так что мера $Q(\alpha)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^d$.

Замечание 1. Если единичный вектор N' таков, что $\langle \mathrm{N}', \lambda(\alpha)\rangle > 0$, $\langle \mathrm{N}', \mathrm{N}\rangle > 0$, множество $W \subseteq \Pi^c(\mathrm{N}')$ не ограничено в направлении вектора N' и ограничено в направлении касательной плоскости $L(\mathrm{N}, 0)$, то мера $Q(\alpha, W)$ конечна. Более точно, пусть единичный вектор N' удовлетворяет условию $\langle \lambda(\alpha), \mathrm{N}'\rangle > 0$. Рассмотрим параллельный лучу N' цилиндр $W(\Delta'(v), \mathrm{N}')$ с основанием $\Delta'(v) \subseteq L(\mathrm{N}', 0)$, где $\Delta'(v)$ — куб размерности $d-1$ с вершиной в точке $v \in L(\mathrm{N}', 0)$ и стороной длины Δ. Тогда

$$Q(\alpha, W(\Delta'(v), \mathrm{N}')) < \infty$$

и при $\Delta \to 0$

$$Q(\alpha, W(\Delta'(v), \mathrm{N}')) \sim \Delta^{d-1} q(\alpha, \mathrm{N}'), \tag{13}$$

где

$$q(\alpha, \mathrm{N}') = \int_0^\infty e^{-\langle \lambda(\alpha), \mathrm{N}'\rangle y} q_\alpha(y\mathrm{N}')\, dy < \infty.$$

Для доказательства последнего неравенства достаточно заметить, что

$$q(\alpha, \mathrm{N}') \le \int_0^\infty q_\alpha(y\mathrm{N}')\, dy,$$

где в силу определения (12) для некоторых $\delta > 0$, $c < \infty$ выполняется

$$q_\alpha(y\mathrm{N}') \le \mathbf{P}(\langle \mathrm{N}, \xi^{(\alpha)}\rangle > y\langle \mathrm{N}', \mathrm{N}\rangle) \le ce^{-y\delta}.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (C_1), (C_2) *и для фиксированного ненулевого вектора* $\alpha_0 \in \mathscr{A}'$ *множество* V *удовлетворяет условию* $(D_{1+}(\alpha_0))$, $x \in t\Gamma$ *и*

$$\alpha \equiv \frac{x}{n} \to \alpha_0$$

при $n \to \infty$. *Тогда для любых* $\Delta_0 > 0$, $M < \infty$ *можно выбрать последовательность* $\Delta_n \to 0$ *такую, что*

$$\mathbf{P}(\eta(tV) = n, S(n) \in x + \Delta(y)) = \frac{Q(\alpha, \Delta(y))}{(2\pi n)^{d/2}\sigma(\alpha)} e^{-n\Lambda(\alpha)}(1 + \varepsilon_n), \tag{14}$$

где $\sigma^2(\alpha) = \det B(\alpha)$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup |\varepsilon_n| = 0,$$

$\sup$ *берется по всем* $\Delta > 0$, $\Delta_0 \ge \Delta \ge \Delta_n$, $y \in \mathbb{R}^d$, $|y| \le M$.

Замечание 2. Если $x = n\alpha \in t\Gamma$ и вектор нормали к поверхности Γ в точке $\Gamma(\alpha)$ таков, что $\langle \mathrm{N}, \alpha\rangle = o(1)$ при $\alpha \to \alpha_0$, то условие $(D_{1+}(\alpha_0))$ не выполнено, ибо не выполнено второе неравенство в (1), которое следует из $(D_{1+}(\alpha_0))$. Соотношение $\langle \mathrm{N}, \alpha\rangle = o(1)$ возможно, когда либо (a) $s = \frac{t}{n} = o(1)$, либо (b) $s = \frac{t}{n} \ge \delta > 0$, $\langle \mathrm{N}, \mathrm{e}(\alpha)\rangle = o(1)$. Случай (a) представляет собой открытую проблему об асимптотике вероятностей

$$\mathbf{P}(z + S^{(\alpha)}(k) \notin tV - x,\ k = 1, 2, \dots, n)$$

при фиксированном $z \in \Pi(\mathrm{N})$, решение которой предполагает уточнение результатов работ [7, 8]. Ситуация (b) в некотором частном случае рассмотрена в недавних работах [21, 22].

Получим некоторые следствия из теоремы 4. Если W — произвольное множество в $\Pi^c(\mathrm{N})$ из класса множеств с достаточно «тонкой» границей, то, «приближая» W объединениями кубиков, можно получить равномерный по этому классу вариант утверждения (14). Для этого через $\mathscr{F}(c)$ обозначим класс измеримых множеств W, лежащих в шаре $U_c(0)$ радиуса c, для которых при любом $\varepsilon \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$\mu(U_\varepsilon(\partial W)) \le c\varepsilon,$$

где ∂W — граница W, $\mu(.)$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^d$. Любое ограниченное множество с гладкой границей попадает при подходящем c в класс $\mathscr{F}(c)$.

Следствие 4.1. *Пусть выполнены условия* (C_1), (C_2). *Пусть для фиксированного ненулевого вектора* $\alpha_0 \in \mathscr{A}'$ *множество* V *удовлетворяет условию* $(D_{1+}(\alpha_0))$. *Тогда найдется* $\delta > 0$ *такое, что для* $\alpha \equiv \frac{x}{n}$, $x \in t\Gamma$, *и любого* $c < \infty$

$$\mathbf{P}(\eta(tV) = n, S(n) \in x + W) = \frac{1}{(2\pi n^{d/2})\sigma(\alpha)} e^{-n\Lambda(\alpha)} \Big(Q(\alpha, W) + \varepsilon_n\Big), \tag{15}$$

где

$$\lim_{n\to\infty} \sup |\varepsilon_n| = 0,$$

$\sup$ *берется по классу* $|\alpha - \alpha_0| \le \delta$, $W \in \mathscr{F}(c)$.

Для сравнения отметим, что из теоремы 9 (см. приложение), доказанной в [10], вытекает, что

$$\mathbf{P}(S(n) \in x + W) = \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}\sigma(\alpha)} e^{-n\Lambda(\alpha)} \big(Q_0(\alpha, W) + \varepsilon_n^{(0)}\big), \tag{16}$$

где

$$Q_0(\alpha, W) \equiv \int\limits_W e^{-\langle \lambda(\alpha), w\rangle}\, dw,$$

$\varepsilon_n^{(0)}$ обладает всеми свойствами последовательности ε_n из следствия 4.1. Ясно, что мера $Q(\alpha)$ абсолютно непрерывна относительно меры $Q_0(\alpha)$,

$$\frac{\partial Q(\alpha)}{\partial Q_0(\alpha)}(w) = q_\alpha(w), \quad w \in \Pi^c(\mathrm{N}).$$

Таким образом, верно

Следствие 4.2. *Если* W *таково, что мера Лебега* $\mu(W)$ *положительна, то в условиях следствия* 4.1 *справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(\eta(tV) = n / S(n) \in x + W) = f(W)\big(1 + \varepsilon_n^{(0)}\big),$$

где $\alpha = \frac{x}{n}$, $x \in t\Gamma$, $f(W) = \frac{Q(\alpha,W)}{Q_0(\alpha,W)}$ *и* $\varepsilon_n^{(0)}$ *обладает всеми свойствами последовательности* ε_n *из следствия* 4.1.

Замечание 3. В теореме 4 и следствии 4.1 на самом деле важна ограниченность множества W лишь «в направлении» плоскости $L(\mathrm{N}, 0)$. При этом в направлении вектора N, как уже отмечалось, множество W в теореме 4 и следствии 4.1, лежащее «выше» плоскости $L(\mathrm{N}, 0)$, может быть не ограниченным. В частности, утверждение следствия 4.1 сохранится, если в качестве множества W выбрать цилиндр $W = W(\Delta'(v), \mathrm{N}')$, который введен в замечании 1 к определению меры $Q(\alpha, .)$ и для которого при $\Delta \to 0$ выполняется соотношение (13).

Перейдем теперь к изучению асимптотики вероятности события

$$\{\eta(tV) = n\} \tag{17}$$

(эта вероятность всегда стремится к 0 при $n \to \infty$) в том случае, когда $s \equiv \frac{t}{n} \to s_0 > 0$ при $n \to \infty$. Нетрудно видеть, что основной вклад в вероятность этого события вносят траектории, которые впервые пересекают границу $s\Gamma$ множества sV в окрестности некоторой неслучайной точки $\alpha_0 = \alpha(s_0) \in s_0\Gamma$. Эта точка (мы будем называть ее *наиболее вероятной точкой* в множестве s_0V) определяется следующим образом.

Обозначим

$$\Lambda(U) = \inf_{v \in U} \Lambda(v), \quad U \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Если в качестве U взять множество sV, то нетрудно видеть, что для рассматриваемого множества V названный inf будет достигаться на границе $s\Gamma$. Далее, определим на границе $s\Gamma$ множества $U = sV$ точку $\alpha(s)$, в которой достигается минимум $\Lambda(v)$:

$$\Lambda(\alpha(s)) = \Lambda(sV). \tag{18}$$

Точка $\alpha(\frac{t}{n})$ и будет наиболее вероятной точкой в множестве $\frac{t}{n}V$. Для изучения асимптотики вероятности $\mathbf{P}(\eta(tV) = n)$ нам понадобится дополнительное условие на границу множества V.

$(D_2(s))$. *Вектор* $\alpha(s)$ *единствен и в окрестности точки* $\gamma \equiv \Gamma(\mathrm{e}(\alpha(s)))$ *граница* Γ *дважды непрерывно дифференцируема* (*функция* $\Gamma(\mathrm{e})$ *дважды непрерывно дифференцируема*).

Если граница Γ в точке γ дважды непрерывно дифференцируема, то, как мы уже отмечали, в этой точке определена не только единичная нормаль $\mathrm{N} = \mathrm{N}_\gamma$, но и матрица кривизны $R = R_\gamma$. При условии $(D_2(s))$ точка $\alpha(s) \in s\Gamma$ является единственной точкой касания поверхностей $s\Gamma$ и $\{v : \Lambda(v) = \Lambda(\alpha(s))\}$. Напомним, что единичный вектор N направлен внутрь множества V; вектор $\lambda(\alpha(s))$ направлен вне множества $\{v : \Lambda(v) \le \Lambda(\alpha(s))\}$. Поэтому единичные нормали к этим поверхностям в точке $\alpha(s)$ совпадают:

$$\mathrm{N}_{\Gamma(\alpha(s))} = \mathrm{e}(\lambda(\alpha(s))).$$

Рассмотрим интеграл

$$I(s) \equiv \int\limits_{L(\mathrm{N},0)} l(v)\mu'(dv), \quad l(v) = l(v,s) \equiv e^{-v\frac{s\Lambda''(\alpha)+|\lambda(\alpha)|R}{2}v^T}, \tag{19}$$

где $\mu'(dv)$ — мера Лебега на плоскости $L(\mathrm{N},0)$, $R = R_\gamma$, $\mathrm{N} = \mathrm{N}_\gamma$, $\gamma = \Gamma(\alpha)$, $\alpha = \alpha(s)$. Как показано в [20], из условия $I(s) < \infty$ следует, что *касание в точке* $\alpha(s)$ *поверхностей* $s\Gamma$ *и* $\{v : \Lambda(v) = \Lambda(\alpha(s))\}$, о котором мы говорили выше, *является касанием первого порядка*. Если выполнены условия $(D_2(s_0))$, $\alpha(s_0) \in \mathscr{A}'$, $I(s_0) < \infty$, то при $s = \frac{t}{n} \to s_0 > 0$ выполняется равенство (см. [20])

$$\mathbf{P}(S(n) \in tV) = c\frac{1}{\sqrt{n}}e^{-n\Lambda(\alpha(s))}(1 + o(1)),$$

где константа $c > 0$ известна в явном виде. Ясно, что вероятность $\mathbf{P}(\eta(tV) = n)$ не превосходит $\mathbf{P}(S(n) \in tV)$. Мы покажем, что она *имеет тот же порядок асимптотики с точностью до константы*.

Для этого изучим прежде асимптотику

$$\mathbf{P}\biggl(\eta(tV)=n,\ \frac{\mathscr{P}^L(S(\eta(tV))-x)}{\sqrt{t}}\in dv\biggr),$$

где $x=n\alpha(s)$, $s=\frac{t}{n}\to s_0$, $v\in L(\mathrm{N},0)$. Для произвольной точки $v\in L(\mathrm{N},0)$ обозначим через x' точку пересечения поверхности $t\Gamma-x$ с лучом $\{\sqrt{t}v+y\mathrm{N}:\ y\in\mathbb{R}^1\}$. С ростом t точка x' имеет вид $x'=\sqrt{t}v+\mathrm{N}v\frac{R}{2}v^T(1+o(1))$, $R=R_{\Gamma(\alpha_0)}$ — матрица кривизны границы Γ в точке $\Gamma(\alpha_0)$, $\alpha_0=\alpha(s_0)$. Заметим, что

$$\mathbf{P}\biggl(\eta(tV)=n,\ \frac{\mathscr{P}^L(S(\eta(tV))-x)}{\sqrt{t}}\in\Delta'(v)\bigr)=\mathbf{P}(\eta(tV)=n,$$
$$S(\eta(tV))-x)\in W(\sqrt{t}\Delta'(v),\mathrm{N})\biggr),$$

где цилиндр $W(\sqrt{t}\Delta'(v),\mathrm{N})$ определен в замечании 1, и воспользуемся следствием 4.1 (с учетом замечаний 1, 3). При $\Delta\to0$ можно вывести отсюда, что

$$\mathbf{P}\biggl(\eta(tV)=n,\ \frac{\mathscr{P}^L(S(\eta(tV))-x)}{\sqrt{t}}\in dv\biggr)=G^{(s)}(n,v)\mu'(dv)(1+o(1)),\qquad(20)$$

где

$$G^{(s)}(n,v)\equiv\frac{t^{(d-1)/2}}{(2\pi n)^{d/2}\sigma(\alpha)}e^{-n\Lambda(\alpha+\alpha')}q(\alpha_0,\mathrm{N}),$$

функция $q(\alpha,\mathrm{N})$ определена формулой (13),

$$\alpha'=\frac{\sqrt{t}v+\mathrm{N}v\frac{R}{2}v^T}{n},\quad v\in L(\mathrm{N},0),\quad \alpha=\alpha(s),\quad s=\frac{t}{n}.$$

Поскольку

$$n\Lambda(\alpha+\alpha')=n\Lambda(\alpha)+\sqrt{t}\langle\lambda(\alpha),v\rangle+\langle\lambda(\alpha),\mathrm{N}\rangle v\frac{R}{2}v^Tn+\frac{nt}{n^2}v\frac{\Lambda''(\alpha)}{2}v^T+o(1),$$
$$\langle\lambda(\alpha),v\rangle=0,\quad \langle\lambda(\alpha),\mathrm{N}\rangle=|\lambda(\alpha)|,$$

получаем

$$G^{(s)}(n,v)\sim\frac{s^{(d-1)/2}}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{n}\sigma(\alpha)}e^{-n\Lambda(\alpha)}l(v,s_0)q(\alpha_0,\mathrm{N}),\qquad(21)$$

где функция

$$l(v,s_0)=e^{-v\frac{s_0\Lambda''(\alpha_0)+|\lambda(\alpha_0)|R}{2}v^T}$$

определена формулой (19), так что

$$I(s_0)=\int\limits_{L(\mathrm{N},0)}l(v,s_0)\mu'(dv)<\infty.$$

Если обозначить

$$p(s)\equiv\frac{s^{(d-1)/2}}{(2\pi)^{d/2}\sigma(\alpha)}q(\alpha(s),\mathrm{N})I(s),\qquad(22)$$

то интеграл от правой части (21) по мере μ' будет иметь вид

$$\frac{p(s_0)}{\sqrt{n}}e^{-n\Lambda(\alpha)}.$$

Из соотношения (21) следует, что для любого $M < \infty$

$$\mathbf{P}\biggl(\eta(tV) = n,\ \left|\frac{\mathscr{P}^L(S(\eta(tV)) - x)}{\sqrt{t}}\right| \le M\biggr) = \frac{p(s_0)}{\sqrt{n}} e^{-n\Lambda(\alpha)}(1 - \delta(M) + o(1)), \quad (23)$$

где

$$\delta(M) = \frac{1}{I(s_0)} \int\limits_{v \in L(\mathrm{N},0),|v| \ge M} l(v, s_0)\, dv.$$

Поэтому для нахождения асимптотики $\mathbf{P}(\eta(tV) = n)$ достаточно доказать, что

$$G \equiv \lim_{M\to\infty} \limsup_{t\to\infty} \sqrt{n} e^{n\Lambda(\alpha(s))} \mathbf{P}\biggl(\eta(tV) = n,\ \left|\frac{\mathscr{P}^L(S(\eta(tV)) - x)}{\sqrt{t}}\right| \ge M\biggr) = 0.$$

Поскольку G не превосходит

$$\overline{G} \equiv \lim_{M\to\infty} \limsup_{t\to\infty} \sqrt{n} e^{n\Lambda(\alpha(s))} \mathbf{P}\biggl(S(n) \in tV,\ \left|\frac{\mathscr{P}^L(S(\eta(tV)) - x)}{\sqrt{t}}\right| \ge M\biggr)$$

и в [20] доказано (см. доказательство теоремы 1 в § 4), что $\overline{G} = 0$, то необходимая оценка $G = 0$ установлена. Так как, очевидно, $\delta(M) \to 0$ при $M \to \infty$, из (20)–(23) следует

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (C_1), (C_2) и для некоторого фиксированного $s_0 > 0$ для множества V выполнено условие $(D_2(s_0))$, причем $\alpha(s_0) \in \mathscr{A}'$, $I(s_0) < \infty$. Тогда для $s = \frac{t}{n} \to s_0$*

$$\mathbf{P}(\eta(tV) = n) = \frac{p(s)}{\sqrt{n}} e^{-n\Lambda(\alpha(s))}(1 + o(1)). \quad (24)$$

При этом имеет место слабая сходимость при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\biggl(\frac{\mathscr{P}^L(S(n) - x)}{\sqrt{t}} \in dv/\eta(tV) = n\biggr) \Longrightarrow l(v, s_0)\mu'(dv), \quad (25)$$

где функция $l(v, s)$ определена в (19), $v \in L(\mathrm{N})$, $\mu'(dv)$ — мера Лебега на $L(\mathrm{N})$.

Замечание 4. Как и в следствии 3.2, из теоремы 5 можно получить предельную теорему для совместного распределения

$$\mathbf{P}\biggl(\frac{\mathscr{P}^L(S(n) - x)}{\sqrt{t}} \in dv,\ \chi(tV) \in dw/\eta(tV) = n\biggr).$$

Как и в следствиях 1.2, 3.2, можно дополнительно изучать предельное условное распределение для ортогонального разложения вектора

$$\theta(tV) - x = \mathscr{P}^{L(\mathrm{N})}(\theta(tV) - x) + \mathrm{N}\langle \mathrm{N}, \theta(tV) - x\rangle.$$

Предельное распределение проекции $\theta(tV) - x$ на нормаль N будет определяться квадратичной формой с матрицей кривизны R от гауссовского случайного вектора с распределением $G^{(s)}(dv)$.

4. Интегральные теоремы для момента достижения $\eta(tV)$. Теоремы 4, 5 позволяют отыскать асимптотику вероятностей событий

$$\{\eta(tV) \le n\}, \quad \{n \le \eta(tV) < \infty\} \quad (26)$$

для целого $n = n(t)$ такого, что $\frac{n}{t} \to b$, $0 \le b < \infty$, в случае, когда эти вероятности стремятся к 0 (ситуация, когда эти вероятности не стремятся к 0, описывается в теореме 1).

Приведем прежде теорему о *логарифмической асимптотике* изучаемых вероятностей, которая получена в [23].

Пусть $\frac{n}{t} \to u > 0$. В широких предположениях (см. теорему 5 и, например, [23]) верны соотношения

$$\ln \mathbf{P}(\eta(tV) = n) \sim \ln \mathbf{P}(S(n) \in tV) \sim -n\Lambda\left(\frac{t}{n}V\right) \sim -tu\Lambda\left(\frac{1}{u}V\right). \tag{27}$$

Из (27) следует, что логарифмическую асимптотику событий (26) определяет функция

$$D_u(V) = \inf_{v\in V} D_u(v), \quad D_u(v) = u\Lambda\left(\frac{1}{u}v\right).$$

Теорема 6 [24]. *Пусть фиксировано число $0 \le b < \infty$ и для измеримого ограниченного множества V числа $u_+ \in [b,\infty)$, $u_- \in [0,b]$, $u_\pm = u_\pm(b)$, таковы, что*

$$\inf_{u\le b} D_u(V) = D_{u_-}(V), \quad \inf_{u\ge b} D_u(V) = D_{u_+}(V).$$

Пусть выполнено условие

$$D_{u_\pm}([V]) = D_{u_\pm}((V))$$

и функция $D_u(V)$ непрерывна по u в точках $u = u_\pm$. Тогда для целого $n = n(t) \ge 2$, $\frac{n}{t} \to b$, имеют место равенства

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}(n \le \eta(tV) < \infty) = -D_{u_+}(V),$$
$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}(\eta(tV) < n-1) = -D_{u_-}(V).$$

Из теоремы 6 следует, в частности, что определяющее значение в описании асимптотики вероятности

$$\mathbf{P}(\eta(tV) < \infty)$$

имеет *вторая функция уклонений*

$$D(v) = \inf_{u>0} D_u(v),$$

которая введена и изучена в работе [23]. Логарифмическая асимптотика этой вероятности имеет вид

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}(\eta(tV) < \infty) = -D(V),$$

где $D(V) = \inf\limits_{v\in V} D(v)$.

Приведем теперь теоремы о точной асимптотике вероятностей событий (26). Пусть u^* — число u, на котором достигается inf функции $D_u(V)$ при $u > 0$:

$$D_{u^*}(V) = \inf_{u>0} D_u(V) \equiv D(V).$$

Если $u^* > 0$, то

$$D(V) = D_{u^*}(V) = u^*\Lambda\left(\alpha\left(\frac{1}{u^*}\right)\right),$$

где согласно определению (18) точка $\alpha(\frac{1}{u^*}) \in \frac{1}{u^*}\Gamma$ — наиболее вероятная точка в множестве $\frac{1}{u^*}V$. Как установлено в [23], если $\alpha(\frac{1}{u^*}) \in \mathscr{A}'$, $I(\frac{1}{u^*}) < \infty$, то точка минимума $u^* > 0$ единственна и при этом

$$\sigma^2 \equiv D''_{u^*}(V) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} D_u(V)\bigg|_{u=u^*} > 0. \tag{28}$$

Как видно из теоремы 6, важным обстоятельством, определяющим характер асимптотик вероятностей событий (26), является положение числа $b = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{n}{t}$ относительно числа u^*.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* (C_1), (C_2).

I. *Пусть* $\frac{n}{t} \to b \le u^*$, $(u^* - \frac{n}{t})\sqrt{t} \to \infty$ *и для множества* V *выполнено условие* $(D_2(\frac{1}{b}))$, *причем* $\alpha(\frac{1}{b}) \in \mathscr{A}'$, $I(\frac{1}{b}) < \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(\eta(tV) \le n) = \frac{c_1}{(1 - e^{-|D'_{\frac{n}{t}}(V)|})\sqrt{t}} e^{-tD_{\frac{n}{t}}(V)}(1 + o(1)),$$

где константа $c_1 = c_1(b) > 0$ *известна в явном виде.*

II. *Пусть* $\frac{n}{t} = \frac{1}{u^*} + y\frac{1}{\sqrt{t}}$, $n \ge 1$, *и для множества* V *выполнено условие* $(D_2(\frac{1}{u^*}))$, *причем* $\alpha(\frac{1}{u^*}) \in \mathscr{A}'$, $I(\frac{1}{u^*}) < \infty$. *Тогда существует функция* $y(t) \to \infty$ *такая, что при* $-y(t) \le y \le \infty$

$$\mathbf{P}(\eta(tV) < n) = c_2\Phi(y/\sigma)e^{-tD(V)}(1 + o(1)) \tag{29}$$

и при $y \le y(t)$

$$\mathbf{P}(\infty > \eta(tV) \ge n) = c_2(1 - \Phi(y/\sigma))e^{-tD(V)}(1 + o(1)), \tag{30}$$

где

$$\Phi(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

— *стандартный нормальный закон, константа* $\sigma^2 = D''_{u^*}(V) > 0$ *определена равенством* (28), *константа* $c_2 > 0$ *известна в явном виде.*

III. *Пусть* $\frac{n}{t} \to b \ge u^*$, $(\frac{n}{t} - u^*)\sqrt{t} \to \infty$ *и для множества* V *выполнено условие* $(D_2(\frac{1}{b}))$, *причем* $\alpha(\frac{1}{b}) \in \mathscr{A}'$, $I(\frac{1}{b}) < \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(\infty > \eta(tV) \ge n) = \frac{c_3}{(1 - e^{-|D'_{\frac{n}{t}}(V)|})\sqrt{t}} e^{-tD_{\frac{n}{t}}(V)}(1 + o(1)),$$

где константа $c_3 = c_3(b) > 0$ *известна в явном виде.*

Замечание 5. Функция $y(t)$ в соотношениях (29), (30) может быть уточнена. Например, если функция $D_u(V)$ имеет в точке минимума $u = u^*$ третью производную, то в качестве $y(t)$ можно выбрать *любую функцию* $y(t) = o(t^{1/6})$. Для существования $D'''_{u^*}(V) = \frac{\partial^3}{\partial u^3} D_u(V)|_{u=u^*}$ в точке минимума $u = u^*$, в свою очередь, достаточно, чтобы граница Γ множества V имела в окрестности точки $\gamma = \Gamma(\alpha(\frac{1}{u^*}))$ третью производную.

Замечание 6. Как и в теореме 5, в условиях теоремы 7 можно дополнительно изучать предельное условное распределение величины $\frac{\mathscr{P}^L(S(\eta(tv)) - x)}{\sqrt{t}}$ при каждом из условий $\{\infty > \eta(tV) \ge n\}$, $\{\eta(tV) \le n\}$. Кроме того, можно получить совместное предельное распределение для пары $\frac{\mathscr{P}^L(S(\eta(tv))-x)}{\sqrt{t}}, \chi(tV)$ при тех же условиях.

В работе [24] изучена асимптотика функции $H(tV)$ при $t\to\infty$, где

$$H(tV)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(S(n)\in tV)$$

— многомерная функция восстановления. Там доказано, в частности, что если в точке s^* выполнено условие $(D_2(s^*))$ и при этом $\alpha(s^*)\in\mathscr{A}'$, $I(s^*)<\infty$, то

$$H(tV)\sim c_1e^{-tD(V)},$$

где константа $c_1>0$ известна в явном виде [24]. Из теоремы 7 следует, что в этих условиях верно соотношение

$$\mathbf{P}(\eta(tV)<\infty)\sim c_2e^{-tD(V)},$$

поэтому мы получили соотношение

$$\mathbf{P}(\eta(tV)<\infty)\sim\frac{c_2}{c_1}H(tV).$$

Этот результат был приведен в качестве гипотезы в [23].

5. Доказательства теорем 1–3

Доказательство теоремы 1. Выберем целое $m_1=[m]-[m_2]$, где $m_2=\sqrt{t}\ln\ln t$ и $[u]$ — целая часть вещественного u.

Первый шаг доказательства представляет самостоятельный интерес, поэтому выделим его в виде леммы.

Для вектора $z\in\mathbb{R}^d$ и множества $A\subseteq\mathbb{R}^d$ обозначим через $r(z,A)$ первую точку пересечения множества A с лучом $\{z+au:u>0\}$:

$$r(z,A)=z+au(z,A),\quad u(z,A)=\inf\{u>0:z+au\in A\}.$$

Положим для краткости $r(z)=r(z,\Gamma)$.

Лемма 5.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда*

$$\eta(tV)=\frac{t}{|a|}\left|r\left(\frac{S^{(0)}(m_1)}{t}\right)\right|-\frac{1}{|a|}\langle \mathrm{e}(a),S^{(0)}(m_1)\rangle+\delta^{(1)}(t),$$
$$\theta(tV)=tr\left(\frac{S^{(0)}(m_1)}{t}\right)+\delta^{(2)}(t),$$

где $S^{(0)}(m_1)=S(m_1)-am_1$,

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(|\delta^{(i)}(t)|\le t^{1/4}(\ln\ln t)^2)=1,\quad i=1,2.$$

Лемму 5.1 докажем несколько позже. Сейчас продолжим доказательство теоремы 1.

В силу центральной предельной теоремы верно представление

$$S^{(0)}(m_1)\underset{D}{=}\sqrt{m_1}(\zeta+\varepsilon')=\sqrt{m}(\zeta+\varepsilon),$$

где

$$|\varepsilon'|=|\varepsilon'(t)|\underset{P}{\to}0,\quad|\varepsilon|=|\varepsilon(t)|\underset{P}{\to}0$$

при $t \to \infty$.

Заметим, что в силу условия $(D_1(a))$ на событии $\{|\zeta| + |\varepsilon| \le \ln t\}$, вероятность которого стремится к 1, справедливы неравенства

$$\left| tr\left(\frac{\sqrt{m}\zeta + \sqrt{m}\varepsilon}{t}\right) - tr\left(\frac{\sqrt{m}\zeta}{t}\right)\right| \le C\sqrt{t}|\varepsilon|,$$

$$\left| t\Gamma\left(a + \frac{\sqrt{m}}{t}\mathscr{P}^L\zeta\right) - tr\left(\frac{\sqrt{m}\zeta}{t}\right)\right| \le C.$$

Поэтому утверждение теоремы 1 следует из утверждения леммы 5.1. Теорема 1 доказана.

Доказательство леммы 5.1. В силу выбора m_2 и условия (D_1) из закона повторного логарифма следует равенство

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{\eta(tV)}{m} - 1\right| \le \delta\sqrt{m\ln m}\right) = 1$$

для любого $\delta > 0$. Поэтому на событии $A = \{m + m_2 \ge \eta(tV) > m - m_2\}$, вероятность которого стремится к 1, имеем

$$\eta(tV) = m_1 + \eta'(tV_t), \quad \theta(tV) = S(m_1) + \theta'(tV_t), \tag{31}$$

где функционалы η', θ' суть функционалы η, θ, определенные на блуждании

$$S'(n) = S(m_1 + n) - S(m_1), \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$V_t = V - \frac{S(m_1)}{t}.$$

Для $S^{(0)}(m_1) = S(m_1) - am_1$ рассмотрим событие

$$B = \{|S^{(0)}(m_1)| \le \sqrt{t\ln t}\},$$

вероятность которого стремится к 1 в силу центральной предельной теоремы.

Обозначим через R расстояние по лучу $\{au : u > 0\}$ от точки $S(m_1)$ до множества tV. Очевидно, что

$$R = |r(S^{(0)}(m_1), tV)| - \langle \mathrm{e}(a), S^{(0)}(m_1)\rangle - |a|m_1, \tag{32}$$

при этом

$$R \le |x - m_1 a| + c\sqrt{t\ln t} \le c'\sqrt{t\ln t} \equiv c'm_3.$$

Поэтому в силу закона повторного логарифма и условия $(D_1(a))$ для любого $\delta > 0$ верно равенство

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(|\eta'(tV_t) - R/|a|| \le \delta\sqrt{m_3\ln m_3}) = 1. \tag{33}$$

Рассмотрим событие $C = \{|\varepsilon_1| \le \sqrt{m_3\ln m_3}\}$. На событии ABC, вероятность которого стремится к 1, имеем

$$\theta'(tV_t) = r(S(m_1), tV) - S(m_1) + \varepsilon_2 = r(S^{(0)}(m_1), tV) - S(m_1) + \varepsilon_2,$$

где $|\varepsilon_2| = o(\sqrt{m_3\ln m_3})$ при $t \to \infty$. Вернемся к (31). В силу (32), (33) на событии ABC

$$\eta(tV) = \frac{|r(S^{(0)}(m_1), tV)|}{|a|} - \frac{\langle \mathrm{e}(a), S^{(0)}(m_1)\rangle}{|a|} + o(\sqrt{m_3\ln m_3}),$$

$$\theta(tV) = r(S^{(0)}(m_1), tV) + o(\sqrt{m_3 \ln m_3}).$$

Осталось заметить, что

$$\sqrt{m_3 \ln m_3} = O(t^{1/4}\sqrt{\ln t}).$$

Лемма 5.1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Легко видеть, что

$$V^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k(V),$$

поэтому

$$\mathbf{P}(|\chi(V)| > u) \le \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{V^c} \mathbf{P}(\eta(V) = n-1, S(n-1) \in dv)\mathbf{P}(|\chi(V)| > u, v+\xi(n) \in V)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_k(V)} \mathbf{P}(S(n-1) \in dv)\mathbf{P}(|\chi(tV)| > u, v + \xi(n) \in V).$$

На множестве A_k расстояние от точки v до множества tV не меньше чем k, поэтому $|\xi(n) - \chi(V)| \ge k$ и, стало быть, $|\xi(n)| = |\chi(V)| + |\xi(n) - \chi(V)| > k + u$. Мы доказали, что

$$\sup_{v \in A_k(V)} \mathbf{P}(|\xi(n)| > u, v + \xi(n) \in V) \le \mathbf{P}(|\xi| > u + k),$$

и тем самым

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_k(V)} \mathbf{P}(S(n-1) \in dv)\mathbf{P}(|\chi(tV)| > u, v + \xi(n) \in V)$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(S(n-1) \in A_k(V))\mathbf{P}(|\xi| > u + k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} H(A_k(V))\mathbf{P}(|\xi| > u + k) \le R(V)\int\limits_{u}^{\infty} \mathbf{P}(|\xi| > v)\, dv.$$

Утверждение I теоремы 2 доказано.

Обозначим через $\mathscr{K}(\varepsilon)$ класс множеств W, удовлетворяющих условию (5). Очевидно, что если $V \in \mathscr{K}(\varepsilon)$, то для $W = tV$ или $W = U_t(V)$ при $t > 0$ выполняется $W \in \mathscr{K}(\varepsilon)$. Поэтому для названных возможных значений W

$$h(W) \le \sup_{k \ge 1} H(U_1(U_{k-1}(W)) \setminus U_{k-1}(W)) \le \sup_{G \in \mathscr{K}(\varepsilon)} H(U_1(G) \setminus G).$$

Заметим, что всегда для $G \in \mathscr{K}(\varepsilon)$

$$U_1(G) \setminus G \subseteq C^c(\varepsilon, \Gamma(a)),$$

так что

$$h(W) \le \bar{h} \equiv H(C^c(\varepsilon, \Gamma(a))).$$

Поскольку (см. [23]) $H(C^c(\varepsilon, \Gamma(a))) < \infty$, второе соотношение (6) доказано. Так как первое соотношение (6) следует из усиленного закона больших чисел, соотношение (6) доказано. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть сначала Γ — гиперплоскость $L(\mathrm{e}, \langle \mathrm{e}, \gamma\rangle)$ с нормалью e, проходящая через точку $\gamma \equiv \Gamma(a)$. Рассмотрим одномерное блуждание

$$S^{(\mathrm{e})}(n) = \langle \mathrm{e}, S(n)\rangle, \quad n = 0, 1, \dots,$$

и введем одномерную меру восстановления с «запретом»:

$$H_t^{*(\mathrm{e})}(du) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S^{(\mathrm{e})}(n) \in du,\, 0 \le \max_{k\le n} S^{(\mathrm{e})}(k) \le t).$$

Тогда по формуле полной вероятности по моменту $\eta(tV) - 1$ имеем

$$\mathbf{P}(\chi(tV) \in dv) = \int_{-\infty}^{t\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S^{(\mathrm{e})}(n) \in du,\, \max_{0\le k\le n} S^{(\mathrm{e})} \le t\gamma) F(t\gamma - u, dv)$$

$$= \int_{-\infty}^{t\gamma} H_{t\gamma}^{*(\mathrm{e})}(du) F(t\gamma - u, dv), \qquad (34)$$

где $\gamma = \Gamma(a)$. Пусть $U \subseteq \{\alpha : \langle \mathrm{e}, \alpha\rangle > 0\}$ — ограниченное измеримое множество. Тогда функция $z_U(u) = F(u, U)$ является *неотрицательной непосредственно интегрируемой по Риману функцией* (см. [19]), так что формулу (34) можно переписать в виде

$$\mathbf{P}(\chi(tV) \in U) = \int_{-\infty}^{t\gamma} H_{t\gamma}^{*(\mathrm{e})}(du) z_U(t\gamma - u).$$

Вместе с теоремой 8 (см. п. 7) верна эквивалентная ей *альтернативная форма теоремы восстановления* (см. [19]), в силу которой

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(\chi(tV) \in U) = \frac{1}{a^{(\mathrm{e})}} \int_0^{\infty} z_U(u) r(u)\, du.$$

Утверждение доказываемой теоремы в частном случае, когда Γ — плоскость, доказано.

Докажем теперь теорему 3 в общем случае. Выберем $\varepsilon > 0$ и функции $g(t) \to \infty$, $\delta(t) \to 0$ таким образом, что для любого единичного вектора $\mathrm{e} \in \mathbb{R}^d$ такого, что $|\mathrm{e} - \mathrm{e}(a)| \le \varepsilon$, выполняется оценка

$$\sup_{|\mathrm{e}-\mathrm{e}'| \le \sqrt{g(t)\ln g(y)}} |t\Gamma(\mathrm{e}') - t\Gamma(\mathrm{e}) - t\langle \mathrm{N}_{\Gamma(\mathrm{e})}, \mathrm{e} - \mathrm{e}'\rangle| \le \delta(t),$$

где $\mathrm{N}_{\Gamma(\mathrm{e})}$ — единичная нормаль к границе Γ в точке $\Gamma(\mathrm{e})$. Иначе говоря, участок границы $t\Gamma$ в $\sqrt{g(t)\ln g(y)}$-окрестности точки $\Gamma(\mathrm{e})$ лежит между двумя плоскостями $L_{\pm} \equiv L(\mathrm{N}_{\Gamma(\mathrm{e})}, c_{\pm})$, расстояние между которыми равно $\delta(t)$ и стремится к 0. Очевидно, что в силу условия гладкости, принятого в доказываемой теореме, такие параметры ε, g, δ существуют. Обозначим $\Gamma_t' = t\Gamma - g(t)\mathrm{e}(a)$. Поверхность Γ_t' лежит ниже поверхности Γ, и расстояние между этими поверхностями по вектору a равно $g(t)$ и растет до ∞. В силу теорем 1 и 2 можно выбрать событие $A(t)$ со стремящейся к 1 вероятностью, которое мы сейчас опишем. На событии $A(t)$ траектория блуждания $S(n)$ сначала перескакивает границу Γ_t и при этом в момент перескока оказывается в случайной точке $v(t) \equiv t\Gamma(\mathrm{e}) - s\mathrm{e}(a)$, где $|\mathrm{e} - \mathrm{e}(a)| \le \varepsilon$, $g(t)/2 \le s \le g(t)$, так что до границы $t\Gamma$ от этой случайной точки расстояние s не менее $g(t)/2$; двигаясь далее «почти прямолинейно», блуждание $S(n)$, перескакивая нижнюю плоскость L_- (которая построена по случайной точке $v(t)$), имеет величину перескока вдоль вектора $\mathrm{e}(a)$ более $\delta(t)$, так что при этом блуждание попадает и в множество tV, граница которого зажата между плоскостями L_-, L_+. Стало быть, на этом событии $A(t)$ выполняется неравенство $|\chi(\Gamma_t') - \chi(tV)| \le \delta(t)$. Далее, в силу равномерной теоремы восстановления (см. теорему 8 в п. 7: очевидно, что распределение случайной величины $\langle \mathrm{N}_{\Gamma(\mathrm{e})}, \xi\rangle$ лежит в подходящем классе $\mathscr{M}$, введенном перед теоремой 8) для всякого элементарного события из множества $A(t)$ распределение перескока $\chi(\Gamma_t')$ слабо сходится к общему распределению, определяемому правой частью формулы (8). Поэтому верна формула (8), и теорема 3 доказана.

6. Доказательства теорем 4, 7.

Доказательство теоремы 4. Мы приведем два доказательства теоремы 4, которые иллюстрируют разные возможности использования результатов [7, 8]: в первом будет использоваться представление (12) для меры $Q(\alpha, W)$, во втором — представление (11).

Рассмотрим фиксированный куб $\Delta(y) \subseteq \Pi^c(\mathrm{N})$. Пусть $\Delta^* = \frac{\Delta}{m}$ и целое m стремится к ∞ достаточно медленно. Представим куб $\Delta(y)$ в виде объединения m^d экземпляров «маленьких» непересекающихся кубиков:

$$\Delta(y) = \bigcup_i \Delta^*(z_i).$$

Тогда по формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}(\eta(tV) = n,\, S(n) \in x + \Delta(y)) = \sum_i \mathbf{P}(S(n) \in x + \Delta^*(z_i))\mathbf{P}(\eta(tV) = n/S(n) \in x + \Delta^*(z_i)). \quad (35)$$

В силу результатов работ [7, 8] (см. теорему 10 в п. 7) асимптотика условной вероятности

$$\mathbf{P}(\eta(tV) = n/S(n) \in x + \Delta^*(z_i)) = \mathbf{P}(S(n-k) - x \in tV^c - x,\ k = 1, 2, \dots, n/S(n) \in x + \Delta^*(z_i))$$

совпадает с асимптотикой аналогичной вероятности (но не условной) для блуждания

$$z_i - S^{(\alpha)}(k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $S^{(\alpha)}(k) = \xi^{(\alpha)}(1) + \dots + \xi^{(\alpha)}(k)$, и независимые слагаемые $\xi^{(\alpha)}(i)$ имеют общее распределение $F^{(\alpha)}$:

$$\mathbf{P}(S(n-k) - x \in tV^c - x,\ k = 1, 2, \dots, n/S(n) \in x + \Delta^*(z_i)) = \mathbf{P}(z_i - S^{(\alpha)}(k) \in tV^x - x,\ k = 1, 2, \dots)(1 + o(1)).$$

Заметим далее, что множество $tV^c - x$ с ростом $t \to \infty$ «превращается» в множество $\Pi(\mathrm{N})$, поэтому

$$\mathbf{P}(z_i - S^{(\alpha)}(k) \in tV^c - x,\ k = 1, 2, \dots) \sim \int\limits_{\Pi(\mathrm{N})} \mathbf{P}(z_i - \xi^{(\alpha)} \in dv)\mathbf{P}(\max_{k\ge 1}\{-\langle \mathrm{N}, S^{(\alpha)}(k)\rangle < \langle \mathrm{N}, v\rangle\}) = q_\alpha(z_i).$$

Используя соотношение (16), можно записать

$$\mathbf{P}(S(n) \in x + \Delta^*(z_i)) \sim \frac{(\Delta^*)^d}{(2\pi n)^{d/2}\sigma(\alpha)} e^{-n\Lambda(\alpha) - \langle \lambda(\alpha), z_i \rangle}.$$

Поэтому сумма в правой части (35) представляется в виде интеграла

$$\mathbf{P}(\eta(tV) = n,\, S(n) \in x + \Delta(y)) \\ = \frac{1}{n^{d/2}\sigma(\alpha)(2\pi)^{d/2}} e^{-n\Lambda(\alpha)} \int\limits_{\Delta(y)} e^{-\langle \lambda(\alpha), w \rangle} q_\alpha(w)\, dw (1 + o(1)),$$

и при этом можно показать, что слагаемое $o(1)$ равномерно мало по классу $|y| \le N$ и $\Delta_n \le \Delta \le \Delta_0$, если последовательность Δ_n стремится к 0 достаточно медленно. Теорема 4 доказана.

Приведем теперь (схематично) альтернативное доказательство теоремы 4, в котором будет установлено представление (11) меры $Q(\alpha, W)$.

Изучаемую вероятность представим в виде интеграла

$$\mathbf{P}(\eta(tV) = n,\, S(n) \in x + \Delta(y)) \\ = \int\limits_{v \in tV^c - x} \mathbf{P}(S(n-1) \in x + dv,\, S(k) \in tV^c,\ k = 1, 2, \dots, n-1) \\ \times \mathbf{P}(\xi(n) + x + v \in x + \Delta(y)). \quad (36)$$

Область интегрирования разобьем на две части: $\widehat{V}_t = (tV^c - x) \cap tU_\varepsilon(0)$ и ее дополнение $(tV^c - x) \setminus \widehat{V}_t$. Хорошо известно (см., например, [20]), что кратчайшая (наиболее вероятная) траектория, соединяющая точки 0 и x, является прямолинейной. Это означает, в частности, что все траектории нашего блуждания, которые заканчиваются в момент n в множестве $x + \Delta(y)$ и у которых $S(n-1) - x \notin tU_\varepsilon(0)$, имеют вероятность, экспоненциально меньшую, чем вероятность

$$\mathbf{P}(S(n) \in x + \Delta(y)) \sim \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}\sigma(\alpha)} e^{-n\Lambda(\alpha)} Q_0(\alpha, \Delta(y)). \quad (37)$$

Поскольку мы уже знаем, что вероятность (36) имеет тот же порядок, что и вероятность (37), то при изучении асимптотики (36) можно ограничиться интегралом в (36) по множеству $\widehat{V}_t$.

В силу результатов работ [7, 8] (см. теорему 10 в п. 7) при $v \in \widehat{V}_t$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(S(n-1) \in x + dv,\ S(k) \in tV^c,\ k = 1, 2, \dots, n-1) \\ = \mathbf{P}(S(n-1) \in x + dv)\mathbf{P}(S(k) \in tV^c,\ k = 1, 2, \dots, n-1 / S(n-1) \in x + dv) \\ \sim \frac{1}{(2\pi n)^{d/2}\sigma(\alpha)} e^{-(n-1)\Lambda(\frac{x+v}{n-1})} dv p_\alpha(v).$$

Поскольку

$$(n-1)\Lambda\left(\frac{x+v}{n-1}\right) = n\Lambda(\alpha) + \langle \lambda(\alpha), v \rangle + \ln \varphi(\lambda(\alpha)) + o(1),$$

вероятность (36) асимптотически эквивалентна

$$\frac{1}{n^{d/2}(2\pi)^{d/2}\sigma(\alpha)\varphi(\lambda(\alpha))} e^{-n\Lambda(\alpha)} \int\limits_{v \in \widehat{V}_t} e^{-\langle \lambda(\alpha), v \rangle} p_\alpha(v) \mathbf{P}(\xi + v \in \Delta(y))\, dv.$$

В наших условиях множество $\widehat{V}_t = (tV^c - x) \cap tU_\varepsilon(0)$ при $t \to \infty$ «переходит» в множество $\Pi(\mathrm{N})$, поэтому интеграл в правой части последнего соотношения в пределе превращается в интеграл

$$\int\limits_{v \in \Pi(\mathrm{N})} e^{-\langle \lambda(\alpha), v\rangle} p_\alpha(v) \mathbf{P}(\xi + v \in \Delta(y))\, dv = \varphi(\lambda(\alpha)) Q(\alpha, \Delta(y)).$$

Утверждение (14), в котором мера $Q(\alpha, W)$ имеет форму (11), установлено.

Доказательство теоремы 7. По существу, теорема 7 является следствием теоремы 5. В силу этой теоремы для доказательства частей I–III теоремы 7 достаточно оценить суммы

$$\Sigma_n \equiv \sum_{k=1}^{n} k^{-1/2} p(s) e^{-k\Lambda(\alpha(s))}, \quad \Sigma^n \equiv \sum_{k=n}^{\infty} k^{-1/2} p(s) e^{-k\Lambda(\alpha(s))}, \tag{38}$$

где $s = \frac{t}{k}$. Для этого, в свою очередь, следует воспользоваться леммой 7.1 (см. п. 7), в которой следует выбрать функцию

$$f(u) = u\Lambda\biggl(\alpha\biggl(\frac{1}{u}\biggr)\biggr) \equiv D_u(V).$$

Теорема 7 доказана.

7. Приложение.

7.1. Равномерная теорема восстановления для меры восстановления с «запретом». Для случайной величины ζ с распределением G определим *функцию* (*меру*) *восстановления* (ф.в.)

$$H = H^{(G)}(du) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(Z(n) \in du),$$

где $Z(n) = \zeta(1) + \cdots + \zeta(n)$ — сумма независимых случайных величин с общим распределением G. Аналогично определим *функцию* (*меру*) *восстановления с запретом* (ф.в.з.)

$$H_t^* = H_t^{*(G)}(du) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(Z(n) \in du,\ \max_{0 \le k \le n} Z(k) \le t).$$

Через $z = z(u)$, $u \in \mathbb{R}^1$, будем обозначать индикаторы интервалов (α, β), $0 \le \alpha \le \beta < \infty$. Свертку функции $z = z(u)$ с σ-конечной мерой $V(du)$ определим так:

$$z * V(t) = \int z(t - u) V(du).$$

В частности, функции

$$z * H(t) = \int z(t-u) H(du), \quad z * H_t^*(t) = \int z(t-u) H_t^*(du)$$

— результат свертки функции z с ф.в. H и ф.в.з. H^*.

Абсолютный минимум блуждания $Z(n)$ обозначим через

$$Z_- \equiv \min_{n \ge 0} Z(n).$$

Если $\mathbf{E}\xi \equiv a > 0$, то случайная величина Z_- собственная, и в этом случае обозначим ее распределение через $V_- = V_-^{(G)}(du) \equiv \mathbf{P}(Z_- \in du)$, а «хвост» ее распределения — через

$$r(u) = r^{(G)}(u) \equiv \mathbf{P}(Z_- \geq -u).$$

Для формулировки равномерной теоремы восстановления для ф.в.з., следуя [24], введем класс функций $\mathscr{M} = \mathscr{M}(A, B, \psi)$, где $A > 0$ — константа, $B = B(t)$, $t \geq 0$, — функция, стремящаяся к 0, $\psi = \psi(u)$, $u \geq 1$, — положительная функция. Будем говорить, что распределение G *лежит в классе* $\mathscr{M}(A, B, \psi)$, если случайная величина с распределением G удовлетворяет условиям:

$(m1)$ $\mathbf{E}\zeta \equiv a(G) \geq A$;

$(m2)$ *при всех* $t \geq 0$ *выполняется* $\mathbf{E}(|\zeta|; |\zeta| \geq t) \leq B(t)$;

$(m3)$ *при всех* $u \geq 1$ *выполняется* $|\mathbf{E}\exp\{iu\zeta\} - 1| \geq \psi(u)$.

Теорема 8 (равномерная теорема восстановления для ф.в.з.). *Для любых* $\delta_0 > 0$, $\rho \geq 0$

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{G \in \mathscr{M}, 0 \leq \delta \leq \delta_0} \left| H_t^{*(G)}((t-\rho, t-\rho-\delta)) - \frac{1}{a(G)} \int_{\rho}^{\rho+\delta} r^{(G)}(u)\, du \right| = 0.$$

Доказательство. Для блуждания $Z(n)$ определим первую положительную сумму

$$\zeta_+ \equiv Z(\eta_+), \quad \eta_+ \equiv \inf\{n \geq 1 : Z(n) > 0\}.$$

Распределение ζ_+ обозначим через $G_+ = \mathbf{P}(\zeta_+ \in du)$. Убедимся, что по заданным параметрам A, B, ψ, которые определяют класс $\mathscr{M}$, можно выбрать параметры A_+, B_+, ψ_+ таким образом, что если распределение G лежит в классе $\mathscr{M}$, то

$$G_+ \in \mathscr{M}_+ \equiv \mathscr{M}(A_+, B_+, \psi_+).$$

Действительно, числа $a(G)$ и $a(G_+)$ связаны соотношением (см., например, [18])

$$a(G_+) \equiv \mathbf{E}\zeta_+ = p(G)a,$$

где

$$p(G) \equiv \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbf{P}(Z(n) \leq 0) \right\}.$$

При этом ряд, определяющий константу p, сходится равномерно в классе $\mathscr{M}$ (см. [17]). Это позволяет получить неравенство $(m1)$ для $a(G_+)$. Неравенство $(m2)$ для G_+ следует из равномерных оценок для «хвоста» распределения G_+ через «хвост» распределения G (см., например, теорему 2). Наконец, из факторизационного тождества (см., например, [18])

$$(1 - \mathbf{E}e^{iu\zeta_+})(1 - \mathbf{E}(e^{iu\zeta_-}; \tau_- < \infty)) = \mathbf{E}e^{iu\zeta},$$

где ζ_- — первая неположительная сумма для блуждания $Z(n)$, τ_- — момент ее появления, следует, что

$$|1 - \mathbf{E}e^{iu\zeta_+}| \geq \frac{1}{p} |1 - \mathbf{E}e^{iu\zeta}|,$$

поэтому неравенство $(m3)$ для G_+ тоже установлено.

Используя формулу полной вероятности по положению максимума траектории $Z(k)$ до момента n, можно вывести для индикатора z любого интервала (α, β) тождество

$$z * H^{*(G)}(t) = z^* * H_+^{(G)}(t),$$

где

$$H_+^{(G)}(du) \equiv H^{(G_+)}(du), \quad z^* = z^{*(G)}(t) \equiv \int z(t-u)V_1(du),$$

$$V_1(du) = V_1^{(G)}(du) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(Z(n) \in du, \max_{0\le k\le n} Z(k) \le 0).$$

Известно (см., например, [18]), что

$$V_1^{(G)}(du) = pV_-^{(G)}(du) \equiv p\mathbf{P}(Z_- \in du).$$

Поэтому для $\alpha = \rho$, $\beta = \rho + \delta$ верно равенство

$$z * H_t^*((t-\rho, t-\rho-\delta)) = p\mathbf{E}H_+((t+\alpha^*, t+\beta^*)),$$

где $\alpha^* = (Z_- + \rho)_+$, $\beta^* = (Z_- + \rho + \delta)_+$. Воспользуемся далее теоремой 2.6 в [24], в силу которой

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{G_+\in\mathscr{M}_+, 0\le\beta^*-\alpha^*\le\delta_0} |\Delta(G_+, \alpha^*, \beta^*, t)| = 0,$$

где

$$\Delta(G_+, \alpha^*, \beta^*, t) = H_+((t+\alpha^*, t+\beta^*)) - \frac{\beta^*-\alpha^*}{a(G_+)}.$$

Мы сделали очевидное «усовершенствование» теоремы 2.6 в [24], добавив супремум по $0 \le \beta^* - \alpha^* \le \delta_0$. Тогда

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{G\in\mathscr{M}, 0\le\beta-\alpha\le\delta_0} |\mathbf{E}\Delta(G_+, \alpha^*, \beta^*, t)| \le \lim_{t\to\infty} \sup_{G_+\in\mathscr{M}_+, 0\le\beta^*-\alpha^*\le\delta_0} |\Delta(G_+, \alpha^*, \beta^*, t)| = 0.$$

Осталось заметить, что

$$|\mathbf{E}\Delta(G_+, \alpha^*, \beta^*, t)| = \left| H_t^{*(G)}((t-\rho, t-\rho-\delta)) - \frac{1}{a(G)} \int_\rho^{\rho+\delta} r^{(G)}(u)\, du \right|.$$

Теорема 8 доказана.

7.2. Равномерные интегролокальные теоремы для сумм случайных векторов. Все обозначения, которые используются ниже, введены в п. 5. Напомним, в частности, что класс $\mathscr{F}(c)$ определен перед следствием 4.1.

Теорема 9 [9]. *Пусть выполнены условия* (C_1), (C_2). *Тогда для любого компакта* $K \subseteq \mathscr{A}'$, *любых* $c > 0$, $N < \infty$ *и любой последовательности* $\Delta_n \to 0$ *верно равенство*

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta^*(n\alpha)) = \frac{1}{\sigma(\alpha)(2\pi n)^{d/2}} e^{-n\Lambda(\alpha)}(\mu(\Delta^*(n\alpha) + \Delta^d\varepsilon_n),$$

где $\sigma^2(\alpha) = \mathbf{E}(\xi^{(\alpha)} - \alpha)^T(\xi^{(\alpha)} - \alpha)$, $\lim_{n\to\infty} \sup|\varepsilon_n| = 0$ *и* $\sup$ *берется по классу* $\alpha \in K$, $\Delta^*(n\alpha) \in \mathscr{F}(c)$, $\Delta^*(n\alpha) \subseteq \Delta(n\alpha)$, $n^{-N} \le \Delta \le \Delta_n$.

Теоремы 10, 11, формулируемые ниже, являются, по сути, равномерными вариантами теорем 1 и 3 в [7]. Доказательства этих теорем почти дословно повторяют доказательства теорем 1 и 3 в [7], поэтому мы их опускаем.

Теорема 10. *Пусть выполнены условия* (C_1), (C_2) *и* $V_1, V_2, \dots$ — *произвольные измеримые подмножества* $\mathbb{R}^d$. *Тогда для любого компакта* $K \subseteq \mathscr{A}'$, *любых* $c > 0$, $N < \infty$, $M < \infty$ *и любой последовательности* $\Delta_n \to 0$

$$\mathbf{P}(S(i) \in V_i,\ i = 1, \dots, M / S(n) \in \Delta(n\alpha)) = \mathbf{P}(S^{(\alpha)}(i) \in V_i,\ i = 1, \dots, M)(1 + \varepsilon_n),$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \sup |\varepsilon_n| = 0$ *и* $\sup$ *берется по классу* $\alpha \in K$, $n^{-N} \le \Delta \le \Delta_n$, $V_i \in \mathscr{F}(c)$, $1 \le i \le M$.

Для положительных констант M, δ, c и компакта $K \subset \mathscr{A}'$ введем класс $\mathscr{D} = \mathscr{D}(K, M, \delta, c)$ измеримых множеств $V \subseteq \mathbb{R}^d$ таких, что

(a) $V \in \mathscr{F}(c)$,

(b) для $k \ge M$, $\alpha \in K$ $\quad V \cap U_{k\delta}(k\alpha) = \varnothing$,

(c) имеет место неравенство $\inf\limits_{\alpha\in K} \mathbf{P}(S^{(\alpha)}(m) \in V, m \ge 1) > 0$.

Теорема 11. *Пусть выполнены условия* (C_1), (C_2). *Тогда для любого компакта* $K \subseteq \mathscr{A}'$, *любых* $c > 0$, $\delta > 0$, $N < \infty$, $M < \infty$ *и любой последовательности* $\Delta_n \to 0$

$$\mathbf{P}(S(m) \notin V,\ 1 \le m \le n,\ S(n) \in \Delta(n\alpha)) \\ = \mathbf{P}(S(n) \in \Delta(n\alpha))\mathbf{P}(S^{(\alpha)}(m) \notin V, m \ge 1)(1 + \varepsilon_n),$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \sup |\varepsilon_n| = 0$, *и* $\sup$ *берется по классу* $\alpha \in K$, $n^{-N} \le \Delta \le \Delta_n$, $V \in \mathscr{D}$.

7.3. Вспомогательные леммы. Пусть выпуклая функция $f = f(u)$, $u \ge 0$, достигает минимума в единственной точке $u^* > 0$, при этом

$$f(u + u^*) = f(u^*) + \frac{u^2}{2}\sigma^2 + o(u^2), \quad \sigma^2 > 0.$$

Для целых $n \ge 1$ положим

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-tf(\frac{k}{t})}, \quad \Sigma^n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-tf(\frac{k}{t})}.$$

Лемма 7.1. I. *Если* $\frac{n}{t} \to b \le u^*$, $(u^* - \frac{n}{t})\sqrt{n} \to \infty$, *то*

$$\Sigma_n = \frac{c_1}{(1 - e^{-|f'(\frac{n}{t})|})\sqrt{t}} e^{-tf(\frac{n}{t})}(1 + o(1)),$$

где константа $c_1 > 0$ *известна в явном виде.*

II. *Если* $\frac{n}{t} = u^* + y\frac{1}{\sqrt{t}}$, $-\infty < y < \infty$, *то*

$$\Sigma_n = c_2\Phi(y/\sigma)e^{-tf(u^*)}(1 + o(1)), \quad \Sigma^n = c_2(1 - \Phi(y/\sigma))e^{-tf(u^*)}(1 + o(1)),$$

где

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

— *стандартный нормальный закон, константа* $c_2 > 0$ *известна в явном виде.*

III. *Если* $\frac{n}{t} \to b \ge u^*$, $(\frac{n}{t} - u^*)\sqrt{n} \to \infty$, *то*

$$\Sigma^n = \frac{c_3}{(1 - e^{-|f'(\frac{n}{t})|})\sqrt{t}} e^{-tf(\frac{n}{t})}(1 + o(1)),$$

где константа $c_3 > 0$ *известна в явном виде.*

Лемма 7.1 доказывается стандартным применением метода Лапласа, поэтому мы опускаем ее доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровков А. А.* Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 654–694.
2. *Borovkov A. A.* Limit theorems for random walks with boundaries // Proc. Sixth Berkeley symp. on math. stat. prob. V. III. Univ. California Press, 1970, P. 19–30.
3. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Аналитические проблемы асимптотики вероятностных распределений. Киев: Наук. думка, 1981.
4. *Малышев В. А.* Случайные блуждания. Уравнения Винера — Хопфа в четверти плоскости. Автоморфизмы Галуа. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1972.
5. *Cohen J. W.* Analysis of random walks. New York: IOS Press, 1992.
6. *Боровков А. А.* Предельные теоремы для времени и места первого прохождения границы многомерным случайным блужданием. // Докл. РАН. 1997. Т. 353, № 6. С. 711–713.
7. *Боровков А. А.* О преобразовании Крамера, больших уклонениях в граничных задачах и условном принципе инвариантности // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 3. С. 493–509.
8. *Боровков А.А.* Об условных распределениях, связанных с большими уклонениями // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 4. С. 732–744.
9. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие уклонения. I // Теория вероятностей и ее применения. 1998. Т. 43, № 1. С. 3–17.
10. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие уклонения. II // Теория вероятностей и ее применения. 2000. Т. 45, № 1. С. 5–19.
11. *Borovkov A. A.* An asymptotic exit problem for multidimensional Markov chains // Markov processes and related fields. 1997. V. 3, N 4. P. 547–564.
12. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Аналитические проблемы асимптотики вероятностных распределений. Киев: Наук. думка, 1981.
13. *Kushner H. J., Clark D. S.* Stochastic approximation methods for constrained and unconstrained systems. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verl., 1978. (Applied Mathematical Sciences; 26).
14. *Kushner H. J., Dupuis P. G.* Numerical methods for stochastic control problems in continuous time. New York etc.: Springer-Verl., 1992. (Appl. Math.; 24).
15. *Stroock D. W., Varadhan S. R. S.* Multidimensional diffusion processes.. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1979. (Grundelehren der mathematischen Wissenschaften; 233. Ser. Comprehensive Stud. in Math.).
16. *Ватанабэ С. Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1989.
17. *Могульский А. А.* Оценки для перескока случайного блуждания через границу // Теория вероятностей и ее применения. 1973. Т. 18, № 2. С. 350–357.
18. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
19. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. II. М.: Мир, 1967.
20. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Большие уклонения и проверка статистических гипотез // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1992. Т. 19. С. 1–63. (Перевод в: Siberian Advances Math. 1992. V. 2, N 3, 4; 1993. V. 3, N 1,2).
21. *Могульский А. А., Рогозин Б. А.* Случайные блуждания в положительном квадранте. I. Локальные теоремы // Мат. труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 57–97.
22. *Могульский А. А., Рогозин Б. А.* Случайные блуждания в положительном квадранте. II. Интегральные теоремы // Мат. труды. 2000. Т. 3, № 1. С. 48–118.
23. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Вторая функция уклонений и асимптотические задачи восстановления и достижения границы для многомерных блужданий // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 4. С. 745–782.
24. *Боровков А. А., Фосс С. Г.* Оценки для величины эксцесса (перескока) // Теория вероятностей и ее применения. 1999. Т. 44, № 2. С. 1–24.

Статья поступила 15 ноября 2000 г.

Боровков Александр Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
borovkov@math.nsc.ru

Могульский Анатолий Альфредович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
mogul@math.nsc.ru