Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2001. Том 42, № 2

УДК 517.2

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА О СРЕДНЕМ НА СЛУЧАЙ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

М. В. Коробков

Аннотация: В работе получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m$ — функция, непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируемая на интервале (α, β), где $m \geq 1$ и $\alpha < \beta$. Тогда отношение $(f(\beta) - f(\alpha))/(\beta - \alpha)$ есть выпуклая комбинация m значений производной f', т. е. существуют числа $\xi_i \in (\alpha, \beta)$ и p_i, $i = 1, \dots, m$, такие, что*

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \sum_{i=1}^{m} p_i f'(\xi_i), \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Для вещественнозначных функций (при $m = 1$) теорема 1 совпадает с классической теоремой Лагранжа. Для случая дифференцируемых отображений f, производная f' которых непрерывна слева на (α, β) или непрерывна справа на (α, β), утверждение теоремы 1 было получено в работе McLeod, R. M. «Mean value theorems for vector valued functions // Proc. Edinburgh Math. Soc. (Ser. 2). 1965. V. 14. P. 197–209.» Библиогр. 9.

Основным результатом настоящей статьи является следующая

Теорема 1. *Пусть $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m$ — функция, непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируемая в интервале (α, β), где $m \geq 1$ и $\alpha < \beta$. Тогда отношение $(f(\beta) - f(\alpha))/(\beta - \alpha)$ есть выпуклая комбинация m значений производной f', т. е. существуют числа $\xi_i \in (\alpha, \beta)$ и p_i, $i = 1, \dots, m$, такие, что*

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \sum_{i=1}^{m} p_i f'(\xi_i), \quad p_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1. \tag{1}$$

Здесь мы естественным образом отождествляем производную $f'(\xi)$ с элементом пространства $\mathbb{R}^m$. Очевидно, что для вещественнозначных функций (при $m = 1$) теорема 1 совпадает с классической теоремой Лагранжа. Для случая дифференцируемых отображений f, производная f' которых непрерывна слева на (α, β) или непрерывна справа на (α, β), утверждение теоремы 1 получено в работе [1]. Изучению условий, при которых справедливы аналоги формулы (1), где вместо f' фигурируют производные числа функции f (не обязательно дифференцируемой), посвящена также работа [2]. В работе [2] на

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00517), INTAS (код проекта 97–10170) и программы «Ведущие научные школы».

производные числа функции f также налагаются довольно жесткие ограничения, среди которых содержатся и аналоги условий непрерывности производной слева или справа. О других направлениях исследований по обобщению формулы Лагранжа на случай вектор-функций см., например, [3, 4].

Разностное отношение в левой части равенства (1) будем обозначать далее через Q, т. е.

$$Q = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Теорема 1, в частности, утверждает, что Q принадлежит выпуклой оболочке $\operatorname{co}\operatorname{Im} f'$ образа производной $\operatorname{Im} f'$. Напомним, что согласно теореме Каратеодори всякий элемент $A \in \operatorname{co}E$ выпуклой оболочки произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^m$ является выпуклой комбинацией $m+1$ точек из E, т. е. $A = \sum\limits_{i=1}^{m+1} p_i e_i$ для некоторых $e_i \in E$, $p_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m+1$, $\sum\limits_{i=1}^{m+1} p_i = 1$. Отсюда видно, что теорема 1 говорит о чем-то большем, нежели просто выполнение включения $Q \in \operatorname{co}\operatorname{Im} f'$. А именно, в теореме 1 дополнительно утверждается, что количество значений $f'(\xi_i)$, выпуклой комбинацией которых является Q, может быть на единицу снижено по сравнению с общей ситуацией для подмножеств $\mathbb{R}^m$. Отметим, что дальнейшее снижение числа слагаемых в (1) невозможно: для $m \geq 2$ легко построить пример функции $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m$, которая непрерывна на $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ и дифференцируема в (α, β), причем соответствующее значение Q не есть выпуклая комбинация никаких $m-1$ значений $f'(\xi_i)$.

Ниже мы докажем более сильное утверждение, из которого будет следовать и теорема 1.

Теорема 2. *Пусть $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m$ — функция, непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, и пусть $M \subset (\alpha, \beta)$ — произвольное конечное множество, содержащее не более $m-1$ точек. Тогда если функция f дифференцируема на $(\alpha, \beta) \setminus M$, то Q есть выпуклая комбинация m значений производной $f'(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, m$, причем $\xi_i \in (\alpha, \beta) \setminus M$.*

Для частного случая, когда производная f' непрерывна слева (или справа) на $(\alpha, \beta) \setminus M$, утверждение теоремы 2 также получено в работе [1].

Теорема 2 помимо всего прочего показывает, что выбор точек ξ_i в теореме 1 может быть осуществлен с некоторым произволом.

Доказательство теоремы 2. В работе [1] установлено, что

$$Q \in \operatorname{co} f'((\alpha, \beta) \setminus M). \tag{2}$$

На самом деле в [1] доказано даже более общее утверждение: если непрерывная функция f дифференцируема всюду, за исключением не более чем счетного множества точек, то включение (2) будет справедливым для любого множества M лебеговой меры 0. Читателю не составит труда самостоятельно провести доказательство этого факта, если он воспользуется индукцией по m и теоремой о (нестрогой) отделимости точки от выпуклого множества линейным функционалом в конечномерных пространствах.

Теперь наша задача заключается в том, чтобы из (2) получить (1). Если $m = 1$, то искомый результат следует из классической теоремы Дарбу о промежуточных значениях производной вещественной функции. Оказывается, что и в общем случае равенство (1) может быть получено из (2) с помощью некоторого многомерного аналога теоремы Дарбу, найденного в предыдущих работах автора [5, 6]. Напомним формулировку этого многомерного обобщения теоремы Дарбу. Следуя [5, 6], множество $U \subset X$ в метризуемом локально выпуклом пространстве X будем называть *слабо связным*, если его нельзя представить в виде объединения $U = \bigcup\limits_{t \in T} U_t$ семейства множеств U_t таких, что $U_t \neq U$, $U_t \cap \mathrm{cl}(U \setminus U_t) = \varnothing$ для каждого $t \in T$ и $U_t \cap \mathrm{cl}\,\mathrm{co}\,U_s = \varnothing$, если $t, s \in T$ и $t \neq s$. Здесь $\mathrm{cl}\,E$ — замыкание множества E.

Теорема 3 [6]. *Пусть X — метризуемое локально выпуклое пространство, и пусть $g : \Delta \to X$ — дифференцируемое отображение в X области (открытого связного множества) $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Тогда образ $\mathrm{Im}\, g'$ производной отображения g является слабо связным множеством в пространстве X^n.*

(Дальнейшее усиление теоремы 3, связанное с функциями нескольких переменных, а также применение слабой связности в теории устойчивости классов отображений см. в работах [7–9].)

Из процитированной теоремы 3, в частности, вытекает, что образ $\mathrm{Im}\, g'$ производной дифференцируемого отображения $g : (\alpha_1, \alpha_2) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ есть слабо связное множество в $\mathbb{R}^m$. Поэтому условия теоремы 2 дают нам, что

$$f'((\alpha, \beta) \setminus M) = \bigcup_{j=1}^{k} U_j, \quad k \leq m,$$

где U_j — слабо связные множества в $\mathbb{R}^m$. Теперь равенство (1) немедленно вытекает из уже имеющегося включения (2) и следующей геометрической леммы.

Лемма 1. *Пусть множество $V \subset \mathbb{R}^m$ является объединением не более чем m слабо связных множеств. Тогда любая точка $a \in \mathrm{co}V$ представляет собой выпуклую комбинацию не более чем m точек из V.*

Доказательство леммы 1. Пусть выполнены условия леммы 1 и $a \in \mathrm{co}V$. Без потери общности можно считать, что

$$a = 0 \in \mathrm{co}V. \tag{3}$$

Из включения (3) по теореме Каратеодори получаем, что найдутся векторы $b_i \in V$ и числа p_i, $i = 1, \ldots, m+1$, такие, что

$$\sum_{i=1}^{m+1} p_i b_i = 0, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m+1} p_i = 1. \tag{4}$$

Если хотя бы одно число p_i равно 0, то доказывать нечего. Кроме того, если все p_i положительны, но какие-либо m векторов из набора $\{b_1, \ldots, b_{m+1}\}$ линейно зависимы, то ввиду (4) все b_i лежат в некоторой гиперплоскости, и утверждение леммы 1 следует из справедливости теоремы Каратеодори для подмножеств пространства $\mathbb{R}^{m-1}$. Исключая эти тривиальные ситуации, будем считать далее, что

$$\forall i \in \{1, \ldots, m+1\} \ \ p_i > 0, \tag{5}$$

$$\text{векторы } b_1, \ldots, b_{i-1}, \widehat{b_i}, b_{i+1}, \ldots, b_{m+1} \text{ образуют базис в } \mathbb{R}^m. \tag{6}$$

Обозначим через I множество номеров $I = \{1, \ldots, m+1\}$. Построим конусы

$$K_i = \Big\{ -\sum_{j \in I,\, j \neq i} r_j b_j \mid r_j > 0,\ j \in I \setminus \{i\} \Big\}, \quad i \in I. \tag{7}$$

В силу (6) каждый конус K_i является открытым выпуклым множеством в $\mathbb{R}^m$. Отметим, что ввиду (4), (5) имеют место включения

$$b_i \in K_i, \quad i \in I. \tag{8}$$

Легко видеть, что для всех $i \in I$ граница ∂K_i конуса K_i определяется формулой

$$\partial K_i = \Big\{ - \sum_{j \in I,\, j \neq i} r_j b_j \mid r_j \geq 0 \text{ и } \exists k \in I \setminus \{i\}\ r_k = 0 \Big\}. \tag{9}$$

Предположим теперь, что $d \in V \cap \partial K_i$. По формуле (9) найдется номер $k \in I$, $k \neq i$, такой, что

$$d = - \sum_{j \in I,\, j \neq i,\, j \neq k} r_j b_j, \quad r_j \geq 0.$$

Тогда

$$0 = rd + \sum_{j \in I,\, j \neq i,\, j \neq k} r'_j b_j, \text{ где } r = \frac{1}{1 + \sum\limits_{j \in I,\, j \neq i,\, j \neq k} r_j}, \quad r'_j = r \cdot r_j,$$

что совпадает с утверждением леммы 1. Итак, для окончания доказательства леммы 1 осталось показать, что $V \cap \partial K_i \neq \varnothing$ при некотором $i \in I$.

Допустим, что это неверно, т. е. что

$$V \cap \partial K_i = \varnothing, \quad i \in I. \tag{10}$$

Из (5) и (6) элементарными выкладками можно вывести следующие соотношения:

$$\mathbb{R}^m = \bigcup_{i \in I} \operatorname{cl} K_i = \Big(\bigcup_{i \in I} K_i \Big) \cup \Big(\bigcup_{i \in I} \partial K_i \Big), \tag{11}$$

$$K_j \cap \operatorname{cl} \operatorname{co} K_i = K_j \cap \operatorname{cl} K_i = \varnothing \text{ при } j \neq i. \tag{12}$$

Так как мы предположили ранее, что верно (10), то из равенства (11) имеем

$$V = \bigcup_{i \in I} (V \cap K_i). \tag{13}$$

Из условий леммы 1 с помощью очевидного комбинаторного соображения получаем, что найдутся слабо связное множество $U \subset V$ и пара номеров $i_1 \in I$, $i_2 \in I$, $i_1 \neq i_2$, такие, что $b_{i_1} \in U$ и $b_{i_2} \in U$. В соответствии с (13) справедливо представление

$$U = \bigcup_{i \in I} (U \cap K_i). \tag{14}$$

Вследствие (8) имеем $U \cap K_{i_1} \neq \varnothing \neq U \cap K_{i_2}$, поэтому с учетом (12) заключаем, что $U \cap K_i \neq U$ для всех $i \in I$. Последнее утверждение вместе с (12) и (14) противоречит предположению о слабой связности U. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 1.

Принимая во внимание сделанные выше замечания, делаем вывод, что теорема 2 полностью доказана.

Автор выражает признательность профессору А. П. Копылову, обратившему его внимание на задачу получения теоремы о среднем с помощью многомерной теоремы Дарбу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *McLeod R. M.* Mean value theorems for vector valued functions // Proc. Edinburgh Math. Soc. (2). 1965. V. 14. P. 197–209.
2. *Turinici M.* An exceptional set extension of a mean value McLeod's result // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1990. V. 35, N 2. P. 173–180.
3. *Aziz A. K., Diaz J. B.* On a mean value theorem of the differential calculus of vector-valued functions, and uniqueness theorems for ordinary differential equations in a linear-normed space // Contrib. Differential Equations. 1963. V. 1. P. 251–269.
4. *Flett T. M.* Mean value theorems for vector-valued functions // Tôhoku Math. J. 1972. V. 24, N 2. P. 141–151.
5. *Коробков М. В.* Об одном обобщении понятия связности и его применении в дифференциальном исчислении и в теории устойчивости классов отображений // Докл. РАН. 1998. Т. 363, № 5. С. 590–593.
6. *Коробков М. В.* Об одном обобщении теоремы Дарбу на многомерный случай // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 118–133.
7. *Коробков М. В.* Об устойчивости классов липшицевых отображений, порожденных компактными множествами пространства линейных отображений // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 4. С. 792–810.
8. *Коробков М. В., Егоров А. А.* Устойчивость классов липшицевых отображений, теорема Дарбу и квазивыпуклые множества // Докл. РАН. 2000. Т. 373, № 5. С. 583–587.
9. *Егоров А. А., Коробков М. В.* Устойчивость классов липшицевых отображений, теорема Дарбу и квазивыпуклые множества // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1046–1059.

Статья поступила 13 ноября 2000 г.

Коробков Михаил Вячеславович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
korob@math.nsc.ru